



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ  
ФАКУЛТЕТ ЗА МАШИНСТВО И  
ГРАЂЕВИНАРСТВО У КРАЉЕВУ**

Александар В. Николић

**СТАТИЧКА И ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА  
ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ  
ПРЕСЕКА МЕТОДОМ ДИСКРЕТИЗАЦИЈЕ НА  
КРУТЕ СЕГМЕНТЕ**

Докторска дисертација

Краљево, 2017. год.

# ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА

---

## *I. Аутор*

---

Име и презиме: Александар В. Николић

Датум и место рођења: 27.08.1985. године у Краљеву, Република Србија

Садашње запослење: Асистент, Факултет за машинство и грађевинарство  
у Краљеву Универзитета у Крагујевцу

---

## *II. Докторска дисертација*

---

Наслов: Статичка и динамичка анализа еластичног штапа променљивог пресека  
методом дискретизације на круте сегменте

Број страница: 171

Број слика: 57

Број библиографских података: 104

Установа и место где је рад израђен: Факултет за машинство и грађевинарство  
у Краљеву Универзитета у Крагујевцу

Научна област (УДК): Механика крутих тела - Статика, Механика крутих тела -  
Динамика, Осцилације тела са расподељеним параметрима  
(531.2, 531.3, 534.1)

Ментор: др Славиша Шалинић, ванредни професор, Факултет за машинство  
и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагујевцу

---

## *III. Оцена и одбрана*

---

Датум пријаве теме: 20.05.2015.

Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-04-484/15 од  
09.09.2015.

Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:

1. др Драган Милосављевић, редовни професор, Факултет инжењерских наука,  
Универзитет у Крагујевцу,
2. др Александар Обрадовић, редовни професор, Машински факултет,  
Универзитет у Београду,
3. др Србољуб Симић, редовни професор, Факултет техничких наука,  
Универзитет у Новом Саду,
4. др Радован Булатовић, ванредни професор, Факултет за машинство и  
грађевинарство у Краљеву, Универзитет у Крагујевцу
5. др Славиша Шалинић, ванредни професор, Факултет за машинство и  
грађевинарство у Краљеву, Универзитет у Крагујевцу

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:

1. др Михаило Лазаревић, редовни професор, Машински факултет,  
Универзитет у Београду,
2. др Александар Обрадовић, редовни професор, Машински факултет,  
Универзитет у Београду,
3. др Србољуб Симић, редовни професор, Факултет техничких наука,  
Универзитет у Новом Саду,
4. др Радован Булатовић, редовни професор, Факултет за машинство и  
грађевинарство у Краљеву, Универзитет у Крагујевцу
5. др Гордана Богдановић, ванредни професор, Факултет инжењерских наука,  
Универзитет у Крагујевцу

Датум одбране дисертације:

---

## ЗАХВАЛНОСТ

*Ова дисертација настала је као резултат мог вишегодишњег научно-истраживачког рада на Катедри за примењену механику, математику и физику Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагујевцу.*

*Највећу захвалност дугујем ментору др Славиши Шалинићу на несебичној помоћи при избору теме докторске дисертације, као и на корисним саветима, добронамерној критици и подршци током израде дисертације. Поред тога, захвалан сам и што ме је постепено уводио у свет науке и истраживања, што је умногоме допринело мом интересовању за механику као науку.*

*Захваљујем се и др Србољубу Симићу, руководиоцу пројекта бр. ОН174016 који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, на пруженој шанси да будем део истраживачког тима којим руководи од 2011. године па до данас.*

*Члановима Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације др Михаилу Лазаревићу, др Александру Обрадовићу, др Србољубу Симићу, др Радовану Булатовићу, и др Гордани Богдановић захваљујем се на одвојеном времену и корисним сугестијама којима су допринели квалитету ове дисертације.*

*На крају, неизмерну захвалност дугујем својој породици на безрезервној подршци током израде дисертације и мог досадашњег школовања уопште.*

## РЕЗИМЕ

У овој дисертацији предложен је нови начин дискретизације нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека на круте сегменте. Разматран је Ојлер-Бернулијев модел еластичног штапа. За опис положаја крутих сегмената коришћене су апсолутне координате у односу на инерцијални координатни систем. Диференцијалне једначине кретања система крутих сегмената изведене су у два корака. У првом кораку, формиране су диференцијалне једначине кретања система од три крута сегмента, којима је дискретизован један еластични сегмент константних параметара и елементарне дужине. Због појаве прекобројних координата у ту сврху су коришћене Лагранжеве једначине са множитељима веза. Елиминацијом множитеља веза добијене су диференцијалне једначине кретања елементарног еластичног сегмента константних параметара у независним координатама. У другом кораку су формиране диференцијалне једначине кретања нехомогеног штапа променљивог попречног пресека коришћењем Лагранжевих једначина друге врсте. Добијене су диференцијалне једначине кретања дискретизованог модела аксијално притиснутог еластичног штапа произвољно променљивих параметара у облику система крутих сегмената. На основу добијених диференцијалних једначина кретања формиран је карактеристичан проблем из којег је могуће анализирати модалне карактеристике и вредност критичне силе извијања ових штапова. Нумеричким примерима је показана ефикасност предложеног метода. Предложени начин дискретизације еластичног штапа проширен је и на анализу гипких механизма и еластичног штапа који се обрће око непомичне осе. Разматрани су гипки механизми код којих су крути чланови и гипки зглобови редно повезани у облику отвореног кинематичког ланца без гранања. Предложени приближни модел гипког зглоба узима у обзир и утицај смицања. Одговарајућим избором координата тачака крутих чланова гипког механизма могуће је одредити њихова померања на ефикасан начин. Такође, коришћењем предложеног приступа је могуће анализирати и модалне карактеристике ове врсте механизма. У диференцијалним једначинама које описују обртање еластичног штапа око непомичне осе уочени су чланови који указују на утицај инерцијалних сила на штап. Са повећањем интензитета угаоне брзине долази до смањења појединих чланова матрице крутости. Ова појава назива се ефекат динамичког омекшавања штапа услед обртања и карактеристична је за линеарне моделе. Ефикасност формираних дискретизованих модела гипких механизма и еластичног штапа који се обрће око непомичне осе проверена је у нумеричким примерима.

**Кључне речи:** метод крутих сегмената, нехомогени еластични штап променљивог попречног пресека, статичка и динамичка анализа, гипки механизми, штап који се обрће око непомичне осе

## ABSTRACT

A new approach to the discretization of the non-homogeneous flexible beam with variable cross-section into the rigid segments is proposed in this dissertation. The Euler-Bernoulli beam model was considered. Absolute coordinates relative to the inertial coordinate system were used to describe the position of the rigid segments. The differential equations of motion of the considered system of rigid segments were formed into the two steps. In the first step, the differential equations of motion of the system of three rigid segments, by which the one flexible segment of constant parameters is discretized, were formed. The Lagrange's equations of the first kind were used for this purpose due to the presence of redundant coordinates. After the elimination of the Lagrange multipliers, the differential equations of motion of the flexible segment of constant parameters in independent coordinates were obtained. In the second step, the differential equations of motion of the entire variable-parameter flexible beam were formed by using the Lagrange equations of the second kind. Differential equations of motion of the discretized model of axially compressed flexible beam with arbitrarily variable parameters in the form of the system of rigid segments were obtained. On the basis of the obtained differential equations of motion, the characteristic problem is formed from which it is possible to analyze the modal characteristics and the value of critical buckling force of the considered beam. The proposed method is verified through numerical examples. The proposed method of discretization of the flexible beam is extended to the dynamic analysis of the compliant mechanisms and the rotational flexible beam. Compliant mechanisms in which the rigid members and flexible joints are serially connected in the form of an open kinematic chain without branching were considered. The proposed discretized model of the compliant joint takes into account the shear effect. By appropriate selection of coordinates of the compliant members points it is possible to determine their displacements in an efficient manner. Also, by using the proposed approach it is possible to analyze the modal characteristics of this type of mechanisms. The members that describe the influence of the inertial forces on the beam during the beam rotation are identified in the differential equations. As intensity of the beam angular velocity increases, the some members of the stiffness matrix decrease. This phenomenon is usually called the effect of dynamic softening of beam during the rotation and it is characteristic of the linear models. The efficiency of the formed discretized models of the compliant mechanisms and the rotational flexible beam was verified in numerical examples.

**Key words:** rigid segment method, non-homogeneous flexible beam with variable cross-section, static and dynamic analysis, compliant mechanisms, rotational flexible beam

# Садржај

<b>1</b>	<b>УВОД</b>	<b>1</b>
1.1	Садржај рада . . . . .	4
<b>2</b>	<b>ПРЕГЛЕД ПОСТОЈЕЋИХ ВАРИЈАНТИ МЕТОДА КРУТИХ СЕГМЕНАТА</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>МОДЕЛ НЕХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА У ОБЛИКУ СИСТЕМА КРУТИХ СЕГМЕНАТА</b>	<b>18</b>
3.1	Уводна разматрања . . . . .	18
3.2	Потенцијална енергија хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека . . . . .	18
3.3	Дискретизација хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека на круте сегменте . . . . .	22
3.4	Дискретизација нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека на круте сегменте . . . . .	24
<b>4</b>	<b>ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА НЕХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА</b>	<b>29</b>
4.1	Уводна разматрања . . . . .	29
4.2	Диференцијалне једначине кретања дискретизованог модела хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека . . . . .	30
4.2.1	Једначине веза . . . . .	30
4.2.2	Кинетичка енергија дискретизованог еластичног штапа . . . . .	35
4.2.3	Потенцијална енергија дискретизованог еластичног штапа . . . . .	40
4.2.4	Генералисане силе . . . . .	45
4.2.5	Диференцијалне једначине кретања дискретизованог еластичног штапа . . . . .	47
4.3	Диференцијалне једначине кретања дискретизованог нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека . . . . .	55
4.3.1	Кинетичка енергија дискретизованог еластичног штапа . . . . .	55

4.3.2	Потенцијална енергија дискретизованог еластичног штапа . . . . .	56
4.3.3	Диференцијалне једначине кретања дискретизованог еластичног штапа . . . . .	58
<b>5</b>	<b>СЛОБОДНЕ НЕПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ НЕХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА</b>	<b>59</b>
5.1	Уводна разматрања . . . . .	59
5.2	Контурни услови . . . . .	60
5.3	Фреквентна једначина . . . . .	63
5.3.1	Кружне фреквенције слободних непригушених осцилација штапа	63
5.3.2	Коначне једначине кретања . . . . .	65
5.3.3	Критична сила извијања еластичног штапа . . . . .	66
5.4	Нумерички примери . . . . .	67
5.4.1	Еластични штап правоугаоног попречног пресека који се деформише у равни . . . . .	67
5.4.2	Хомогени еластични штап константног попречног пресека . . . . .	70
5.4.3	Хомогени еластични штап линеарно променљиве ширине и константне дебљине попречног пресека . . . . .	81
5.4.4	Двоструко линеарно закошени хомогени штап квадратног попречног пресека . . . . .	88
5.4.5	Функционално градијентни штап променљивог попречног пресека	94
5.4.6	Хомогени еластични штап са степенастом променом попречног пресека . . . . .	99
5.4.7	Просторно деформабилни еластични штап променљивог попречног пресека . . . . .	104
<b>6</b>	<b>ГИПКИ МЕХАНИЗМИ</b>	<b>110</b>
6.1	Концепт гипких механизма . . . . .	110
6.2	Потенцијална енергија гипког зглоба . . . . .	116
6.3	Дискретизација гипког зглоба на круте сегменте . . . . .	119
6.4	Квази-крути модел раванског гипког механизма . . . . .	121
6.4.1	Потенцијална енергија гипког механизма представљеног квази-крутим моделом . . . . .	122

---

6.4.2	Кинетичка енергија гипког механизма представљеног квази-крутим моделом . . . . .	125
6.4.3	Слободне непригушене осцилације гипког механизма . . . . .	127
6.4.4	Померање произвољно изабране тачке гипког механизма . . . . .	127
6.4.5	Нумерички пример . . . . .	129
<b>7</b>	<b>ОБРТАЊЕ ХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРО-МЕНЉИВОГ ПРЕСЕКА ОКО НЕПОМИЧНЕ ОСЕ</b>	<b>136</b>
7.1	Дискретизација еластичног штапа на круте сегменте . . . . .	138
7.2	Потенцијална енергија еластичног штапа који се обрће око непомичне осе . . . . .	141
7.3	Кинетичка енергија еластичног штапа који се обрће око непомичне осе	143
7.4	Диференцијалне једначине кретања еластичног штапа који се обрће око непомичне осе . . . . .	144
7.5	Фреквентна једначина . . . . .	147
7.6	Критична угаона брзина . . . . .	149
7.7	Нумерички пример . . . . .	150
<b>8</b>	<b>ЗАКЉУЧАК</b>	<b>157</b>
	<b>Литература</b>	<b>163</b>



## Листа ознака

Ознака	Назив
$l$	дужина еластичног сегмента штапа
$L$	укупна дужина штапа
$b(x), h(x)$	закон промене ширине и дебљине правоугаоног попречног пресека штапа, респективно
$c_b, c_h$	коэффицијент линеарног закошења ширине и дебљине правоугаоног попречног пресека штапа, респективно
$\alpha$	максимални степен функције промене модула еластичности функционално градијентног штапа
$\beta$	максимални степен функције промене густине функционално градијентног штапа
$\psi$	коэффицијент расподеле дужине штапа са степенастом променом попречног пресека
$\sigma$	коэффицијент односа висина попречног пресека штапа са степенастом променом попречног пресека
$b_0, h_0$	ширина и дебљина правоугаоног попречног пресека штапа при $x = 0$ , респективно
$d(x)$	закон промене спољашњег пречника прстенастог попречног пресека штапа
$d_0$	спољашњи пречник у уклештењу штапа
$d_L$	спољашњи пречник на слободном крају штапа
$\delta(x)$	закон промене дебљине зида прстенастог попречног пресека штапа
$\delta_0$	дебљина зида прстенастог попречног пресека штапа у уклештењу
$\delta_L$	дебљина зида прстенастог попречног пресека штапа на слободном крају
$A(x)$	закон промене површине попречног пресека штапа

$I_y(x), I_z(x)$	закон промене момента инерције попречног пресека штапа у односу на главне централне осе $y$ и $z$
$\rho(x)$	закон промене густине материјала штапа
$E(x)$	закон промене модула еластичности материјала штапа
$A_0$	површина попречног пресека штапа при $x = 0$
$I_{y_0}, I_{z_0}$	момент инерције попречног пресека штапа у односу на главне централне осе $y$ и $z$ при $x = 0$
$\rho_0$	густина материјала штапа при $x = 0$
$E_0$	модул еластичности материјала штапа при $x = 0$
$A_i$	површина попречног пресека $i$ -тог еластичног сегмента штапа
$I_{y_i}, I_{z_i}$	момент инерције попречног пресека $i$ -тог еластичног сегмента штапа у односу на главне централне осе $y$ и $z$
$\rho_i$	густина материјала $i$ -тог еластичног сегмента штапа
$E_i$	модул еластичности материјала $i$ -тог еластичног сегмента штапа
$G_i$	модул смицања материјала $i$ -тог еластичног сегмента штапа
$J_{O_i}$	поларни момент инерције попречног пресека $i$ -тог еластичног сегмента штапа
$m_T$	концентрисана маса на врху штапа
$\nu$	бездимензиони параметар концентрисане масе на врху штапа
$n$	број примарних еластичних сегмената
$k$	број секундарних еластичних сегмената
$\phi_2, \phi_3$	коэффициенти смицања у правцу оса $y$ и $z$
$(V_{k,s})$	$s$ -ти крути сегмент у приближном моделу еластичног штапа
$l_{k,s}$	дужина крутог сегмента $(V_{k,s})$
$m_{k,s}$	маса крутог сегмента $(V_{k,s})$
$\mathbf{J}_{C_{k,s}}$	тензор инерције крутог сегмента $(V_{k,s})$

$\mathbf{r}_{k,s}^{(0)}$	вектор положаја изабране тачке крутог сегмента $(V_{k,s})$ у односу на непокретни координатни систем $Oxyz$
$x_{k,s}, y_{k,s}, z_{k,s}$	Декартове координате изабране тачке крутог сегмента $(V_{k,s})$ у односу на непокретни координатни систем $Oxyz$
$x_{k,s}(0)$	вредност координате $x_{k,s}$ у почетном тренутку
$\tilde{x}_{k,s}$	одступање координате $x_{k,s}$ у односу на почетни положај
$\varphi_{k,s}, \psi_{k,s}, \theta_{k,s}$	углови ротације крутог сегмента $(V_{k,s})$ око непокретних оса $x_{k,s}, y_{k,s}, z_{k,s}$ , респективно
$\xi_{k,s}, \eta_{k,s}, \zeta_{k,s}$	осе покретног координатног система фиксираног за крути сегмент $(V_{k,s})$
$\mathbf{R}_{0,k}$	матрица трансформације координата из покретног координатног система $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$ у непокретни координатни систем $Oxyz$
$\mathbf{w}_{B_i}$	вектор деформација еластичног штапа у тачки $B_i$
$\mathbf{K}_{B_i}$	матрица крутости еластичног штапа која одговара деформацијама тачке $B_i$
$\mathbf{u}_{B_i}$	вектор транслаторних померања у тачки $B_i$
$\Theta_{B_i}$	вектор ротације попречног пресека штапа у тачки $B_i$
$\mathbf{R}_{B_i, B_j}$	матрица трансформације координата између тачака $B_i$ и $B_j$
$\mathbf{V}_{O_{k,s}}$	вектор брзине тачке $O_{k,s}$ крутог сегмента $(V_{k,s})$
$\mathbf{V}_{C_{k,s}}$	вектор брзине средишта маса $C_{k,s}$ крутог сегмента $(V_{k,s})$
$\boldsymbol{\omega}_{k,s}$	вектор угаоне брзине крутог сегмента $(V_{k,s})$
$f_i$	једначине веза
$\Phi$	вектор једначина веза
$\Phi_{\mathbf{v}_s}$	Јакобијева матрица која одговара вектору једначина веза $\Phi$
$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)}$	део Јакобијеве матрице који одговара вектору независних координата $\mathbf{v}_s^{(nz)}$
$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)}$	део Јакобијеве матрице који одговара вектору зависних координата $\mathbf{v}_s^{(z)}$

$\lambda$	вектор множитеља веза
$T$	укупна кинетичка енергија приближног модела еластичног штапа
$T_s$	кинетичка енергија $s$ -тог еластичног сегмента
$T_{k,s}$	кинетичка енергија крутог сегмента ( $V_{k,s}$ )
$\Pi_s$	потенцијална енергија $s$ -тог еластичног сегмента
$\Pi$	укупна потенцијална енергија приближног модела еластичног штапа
$\mathbf{v}_{k,s}$	вектор апсолутних координата крутог сегмента ( $V_{k,s}$ )
$\mathbf{v}_s^{(nz)}$	вектор независних координата $s$ -тог еластичног сегмента
$\mathbf{v}_s^{(z)}$	вектор зависних координата $s$ -тог еластичног сегмента
$\mathbf{M}_{k,s}$	матрица инерције крутог сегмента ( $V_{k,s}$ ) која одговара вектору $\dot{\mathbf{v}}_{k,s}$
$\mathbf{M}_s^{(nz)}$	матрица инерције која одговара вектору независних координата $\mathbf{v}_s^{(nz)}$
$\mathbf{M}_s^{(z)}$	матрица инерције која одговара вектору зависних координата $\mathbf{v}_s^{(z)}$
$\mathbf{M}_s^*$	матрица инерције која одговара вектору независних координата $\mathbf{v}_s^{(nz)}$ након елиминације множитеља веза
$\mathbf{Q}_s$	вектор генералисаних сила који одговара вектору $\mathbf{v}_{k,s}$
$\mathbf{Q}_s^{(nz)}$	вектор генералисаних сила који одговара вектору независних координата $\mathbf{v}_s^{(nz)}$
$\mathbf{Q}_s^{(z)}$	вектор генералисаних сила који одговара вектору зависних координата $\mathbf{v}_s^{(z)}$
$\mathbf{a}_r^{(nz)}$	вектор главних облика осциловања
$C_r$	константа интеграције
$\omega_r$	кружна фреквенција слободних непригушених осцилација
$\varepsilon_r$	релативна грешка при одређивању кружне фреквенције $\omega_r$
$\phi_r$	фазна разлика

---

$X_r(x_s), Y_r(x_s),$ $\varphi_r(x_s),$	функције главних облика осциловања у дискретним вредностима координате $x_s$ које одговарају уздужним, попречним и увијаним осцилацијама, респективно
$P_{cr}$	критична сила извијања еластичног штапа,
$\lambda_p$	бездимензиона критична сила извијања еластичног штапа,
$\varepsilon_p$	релативна грешка при одређивању критичне силе извијања,
$C_a, C_{b,t}, C_{b,r}$	кофицијенти еластичности гипког зглоба
$\alpha_f$	фактор корекције облика гипког зглоба
$\mu$	Поасонов коефицијент
$C_{B_2}$	матрица еластичног гипког зглоба
$c_{p_i}, c_{q_i}, c_{r_i}$	крутост опруга код модела ротационог еластичног штапа у облику крутих сегмената
$m_h$	маса круте главчине
$\dot{\theta}(t)$	закон промене угаоне брзине штапа током времена
$w_f$	стационарна вредност угаоне брзине ротационог штапа
$t_f$	временски период потребан за достизање стационарне угаоне брзине штапа
$\xi_r(\xi_s), \eta_r(\xi_s)$	функције главних облика осциловања у дискретним вредностима координате $\xi_s$ које одговарају уздужним и попречним осцилацијама штапа који се обрће око непомичне осе

## 1 УВОД

Велики број елемената машина као и конструкција у машинству и грађевинарству може се описати моделом нехомогеног еластичног штапа са променљивим попречним пресеком дуж штапа. Као пример могу се навести лопатице турбина, стубови ветрогенератора, антенски стубови, елементи конструкција кранова и дизалица, елементи разних механизма у машинама, сегменти индустријских манипулатора и робота, итд.

Као основни разлог за употребу елемената променљивих параметара попречног пресека и материјала у новије време намеће се уштеда материјала. Са све бржим развојем технологије и појавом масовне производње, човечанство се сусреће са проблемом ограничених ресурса многих важних материјала. Зато је при пројектовању потребно обезбедити да утрошак материјала буде оптималан, тј. минимално потребан да би се задовољили сви постављени критеријуми (напонски, деформацијски, функционални, естетски, и сл.) које одговарајући конструкциони елемент мора да испуни.

Најчешће се за реализацију ових захтева користе конструкциони елементи у облику штапова са променљивим параметрима попречног пресека дуж штапа, док су параметри материјала константни. Непроменљивост параметара материјала дуж штапа уствари значи да је материјал штапа хомоген. Међутим, жељене карактеристике конструкционих елемената могуће је постићи и применом функционално градијентних материјала [1]. Ови материјали спадају у групу композита. Настали су 1986. године као резултат вишегодишњег истраживања јапанских научника са жељом да пронађу оптималан распоред честица различитих материјала у мешавини како би се добила што боља термичка баријера за примену код свемирских летелица. Касније, њихова употреба је проширена, па се сада њиховом применом може добити жељена континуална функција промене параметара материјала (густине и модула

еластичности) дуж штапа. Са напретком технологије израде у последње време ови материјали се све чешће користе.

Статичка и динамичка анализа штапова са променљивим параметрима је обавезан корак у пројектовању инжењерских објеката чији су саставни део. Статичком анализом се могу предвидети силе и померања у појединим деловима конструкције. Такође, код релативно дугачких штапова може доћи до извијања, па је пре увођења система у експлоатацију потребно одредити вредност критичне силе извијања. Динамичка анализа се користи за одређивање коначних једначина кретања система, као и модалних карактеристика датог система. Под модалним карактеристикама подразумевају се фреквенције слободних непригушених осцилација система као и главни облици осциловања који одговарају тим фреквенцијама. Од посебног значаја је модална анализа јер је важно да не дође до поклапања фреквенција принудних сила са фреквенцијама разматраног система при слободним непригушеним осцилацијама. У супротном, долази до подрхтавања (бијења) система или резонанције, када може доћи до потпуног дефекта система.

Значај ове анализе потврђује и даље присутно велико интересовање многих истраживачких група за ову тему. Готово свакодневно се појављују нови радови у еминентним научним часописима у којима се предлажу нове или модификују већ постојеће методе за статичку и динамичку анализу штапова са променљивим параметрима. Уопштено говорећи, методе које се баве овим проблемом се могу поделити у две велике групе.

У прву групу метода спадају оне у којима се еластични штап посматра као материјални континуум. Често се овакви модели називају моделима са расподељеним параметрима [2]. Такав модел еластичног штапа има бесконачан број степени слободне кретања. При анализи динамичког понашања применом неке од метода теорије еластичности [2, 3] еластични штап се може описати парцијалним диференцијалним једначинама са променљивим коефицијентима. У случају статичке анализе, за потребе одређивања вредности критичне силе извијања, претходна парцијална диференцијална једначина се своди на обичну диференцијалну једначину јер се претпоставља да нема кретања штапа па се време искључује из анализе. Иако се ради о различитим врстама једначина (парцијалним диференцијалним и обичним диференцијалним) проблеми при њиховом решавању су готово идентични.

Једино у случају штапа константног попречног пресека и карактеристика ма-

теријала дуж штапа коефицијенти поменутих једначина су константни, па се лако може добити њихово решење у затвореној (коначној) форми. У осталим случајевима, коефицијенти једначина су променљиви и директно зависе од закона промене параметара штапа. Аналитичко решење у затвореној форми ових једначина је могуће одредити само за неке специјалне законе промене параметара штапа [3–12]. У наведеним референцама су разматрани штапови код којих је променљив неки од параметара штапа, геометријски или параметри материјала. Такође, закон промене параметара је у већини случајева линеаран. Међутим, у случајевима када је потребно разматрати неке сложеније ситуације, где се истовремено мењају параметри и попречног пресека и материјала штапа, или је закон промене неког од параметара сложенија функција, за решавање једначина је потребно користити неке од доступних нумеричких метода. Тако је на пример, у референцама [13–23] за приближно решавање парцијалних односно обичних диференцијалних једначина коришћен метод Frobenius-a [13–16], Rayleigh-Ritz-ов метод [17, 18], Adomian-ов метод декомпозиције [19, 20], варијациони итерациони метод [21], Galerkin-ов метод [22], и метод претпостављених модова [23]. Овде су поменуте само неке од коришћених нумеричких метода за решавање ових једначина у литератури. Навођење свих доступних метода би био сувише обиман посао и превазилази обим ове дисертације. Главни недостатак континуалних модела је што је готово немогуће формирати општи алгоритам који би био у стању да нумерички решава обичне диференцијалне или парцијалне диференцијалне једначине за неки општи закон промене параметара штапа. Овакав универзални алгоритам је потребан како би се током пројектовања могла брзо извршити провера статичких и динамичких карактеристика еластичних штапова променљивих параметара.

Због наведених недостатака континуалних модела, са развојем дигиталних рачунара, у другој половини двадесетог века дошло је до развоја дискретних модела за анализу еластичних штапова. Главна карактеристика оваквих модела је да имају коначан број степени слободе кретања и да се могу описати обичним диференцијалним једначинама. Као главни представник ове групе метода може се навести метод коначних елемената [24, 25]. Овај метод је широко распрострањен у практичним применама као користан и ефикасан метод за статичку и динамичку анализу еластичних штапова. Велики број комерцијалних софтверских пакета (ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, LS DYNA, итд) има за основу управо метод коначних елемената. У ве-



ликој мери се користи за решавање проблема статичке и динамичке анализе штапова променљивих параметара, као на пример у референцама [26–33].

Поред поменутог метода коначних елемената, у групу дискретних метода спада и метод крутих сегмената. Иако једноставан и ефикасан, овај метод је у доступној литератури знатно мање коришћен у односу на метод коначних елемената. У овој дисертацији биће предложен један нови начин дискретизације еластичног штапа променљивих параметара на круте сегменте. Деформације штапа биће разматране у оквиру Ојлер-Бернулијеве теорије [3] еластичних штапова. У овој теорији се због малих димензија попречног пресека штапа у односу на његову дужину занемарује утицај инерције попречног пресека и смицања на деформације. За опис кретања формираног модела еластичног штапа у облику система крутих сегмената биће коришћене апсолутне координате изабраних тачака крутих сегмената у односу на инерцијални координатни систем. Овде ће у пуној мери бити искоришћени добро развијени алгоритми аналитичке механике и механике система крутих тела за анализу понашања еластичних штапова. Циљ је да се добије универзални алгоритам за статичку и динамичку анализу еластичних штапова променљивих параметара чија тачност што је могуће мање зависи од избора закона промене параметара штапа. Тачност добијеног алгоритма биће проверена кроз поређење са доступним резултатима добијених применом континуалних модела. Поред тога, циљ је и да се обезбеде неки нови резултати који обухватају анализу утицаја различитих параметара штапа на његово статичко и динамичко понашање. У наставку ће бити укратко описан садржај поглавља од којих се састоји ова дисертација.

## 1.1 Садржај рада

У **првом поглављу** дата су уводна разматрања о значају статичке и динамичке анализе нехомогених еластичних штапова променљивог попречног пресека са аспекта пројектовања различитих инжењерских објеката. Направљен је кратак осврт на поделу модела којима се могу описати еластични штапови и у најкраћим цртама су описане карактеристике најважнијих група метода. Истакнут је значај дискретних метода за анализу штапова при инжењерском пројектовању. У последњем делу овог поглавља истакнут је предмет и циљ ове дисертације, као и кратак садржај рада по

поглављима.

У **другом поглављу** спроведена је детаљна анализа доступне литературе у којима су изложене различите варијанте метода крутих сегмената. Описан је начин дискретизације еластичног штапа за сваку од метода. Све доступне методе су систематски подељене у две групе. Прва група односи се на методе које разматрају деформације штапа у равни, а друга обухвата методе у којима су претпостављене просторне деформације штапа. Указано је на одређене предности али и недостатке постојећих приступа.

У **трећем поглављу** најпре је предложен нови начин дискретизације хомогеног просторног еластичног штапа константног попречног пресека на круте сегменте. Користећи принцип о еквивалентности инерцијалних и еластичних својстава континуалног и дискретног модела штапа детаљно је разрађен начин одређивања параметара формираног модела крутих сегмената. Затим је описан начин дискретизације нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека поделом на више хомогених штапова константног попречног пресека једнаких дужина. На крају је добијен систем крутих сегмената међусобно повезаних одговарајућим еластичним зглобовима којим је могуће приближно описати нехомогене штапове са произвољним законом промене параметара дуж штапа.

У **четвртном поглављу** формиране су диференцијалне једначине кретања разматраног система крутих сегмената коришћењем Лагранжевог формализма. Најпре је разматран систем крутих сегмената којим је описан један хомогени еластични сегмент константног попречног пресека. Због коришћења апсолутних координата погодније изабраних тачака крутих сегмената коришћене су Лагранжеве једначине са множитељима веза за елиминацију зависних координата. Након елиминације зависних координата за опис једног еластичног сегмента, формиране су диференцијалне једначине кретања штапа коришћењем Лагранжевих једначина друге врсте за произвољан број коришћених крутих сегмената. Добијени систем диференцијалних једначина кретања изражен је у векторској форми, при чему су све матрице изражене експлицитно, у зависности од задатих параметара штапа.

У **петом поглављу** су разматране слободне непригушене осцилације нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека оптерећеног аксијалним притисним силама на својим крајевима. На основу диференцијалних једначина кретања из претходног поглавља формирана је фреквентна једначина из које је у општем слу-

чају могуће одредити фреквенције осциловања штапа при дејству аксијалних притисних сила константног интензитета. Такође, ако се претпостави да нема кретања штапа, из ове једначине је могуће одредити и критичну вредност аксијалних притисних сила при којима долази до извијања штапа. Свакој одређеној фреквенцији осциловања могуће је придружити и одговарајући главни облик осциловања. Ефикасност изложеног приступа је проверена и приказана у шест различитих нумеричких примера који обухватају различите законе промене параметара штапа. Разматране су раванске и просторне осцилације штапа.

У **шестом поглављу** је предложен начин дискретизације раванског штапа прилагођеног за опис лаких гпких зглобова који представљају основу гпких механизма. Пошто је ова врста механизма у последње време све више у употреби на почетку поглавља је дат њихов кратак опис. Детаљно је описан начин одређивања параметара дискретизованог модела гпких механизма у облику отворених кинематичких ланаца без гранања. Успостављен је ефикасан алгоритам за формирање диференцијалних једначина ових механизма. На крају поглавља је одговарајућим нумеричким примером показана ефикасност предложеног приступа.

У **седмом поглављу** је разматран модел еластичног штапа који се обрће око непомичне осе управне на раван кретања штапа. Указано је на значај овог модела при динамичкој анализи великог броја модерних уређаја и делова машина. Најпре је систем дискретизован на круте сегменте, а затим су формиране диференцијалне једначине кретања у векторској форми. Дискутовано је о ефектима који се јављају током карактеристичних закона обртања штапа. Кроз нумерички пример је показана ефикасност предложеног дискретизованог модела еластичног штапа.

На крају, у **осмом поглављу** су дата закључна разматрања којима је извршена кратка анализа свега што је урађено у овој дисертацији. Поред тога, на основу искуства стеченог током рада на дисертацији, предложени су и правци даљих истраживања којима би се заокружила једна значајна целина о примени предложене методе крутих сегмената за статичку и динамичку анализу еластичних штапова.

## 2 ПРЕГЛЕД ПОСТОЈЕЋИХ ВАРИЈАНТИ МЕТОДА КРУТИХ СЕГМЕНАТА

Метод крутих сегмената стар је готово читав век. Наиме, давне 1920. године немачки научник Heinrich Hencky објавио је рад [34] у којем је дискутовао могућности анализе еластичне стабилности штапа употребом ове методе. Од тада па до данас појавио се значајан број различитих варијанти ове методе. У основи сваке од варијанти је да се у првом кораку еластични штап подели на више еластичних сегмената. Затим се, у другом кораку, сваки од уведених еластичних сегмената представља у облику система крутих сегмената који су међусобно спојени одговарајућим еластичним зглобовима. На крају се добија приближан модел еластичног штапа у облику система крутих сегмената. Разлике између ових варијанти се најчешће огледају у начину дискретизације (поделе) еластичних сегмената на круте сегменте, као и у одабиру еластичних зглобова којима су поменути крути сегменти повезани. У наставку ће бити изложене основне поставке сваке од њих.

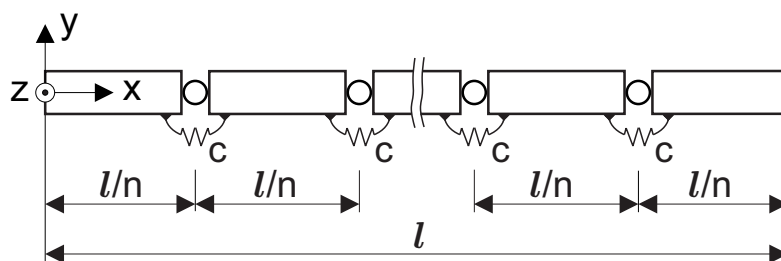
Hencky је у референци [34] предложио да се еластични штап дужине  $l$  и константног попречног пресека површине  $A$  подели на  $n$  крутих сегмената истог попречног пресека и дужине  $l/n$  (видети слику 2.1). Претпостављено је да су уведени крути сегменти међусобно повезани ротационим зглобовима са спиралним опругама крутости

$$c = n \cdot EI_z/l, \quad (2.1)$$

где је  $E$  модул еластичности материјала штапа, и  $I_z$  је момент инерције попречног пресека у односу на осу  $z$ .

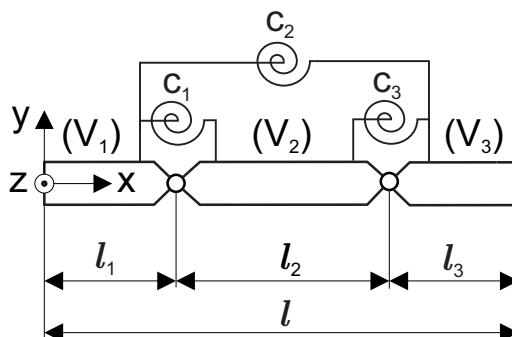
Hencky је у свом раду приказао резултате за  $n = 1, 2, 3$  и  $4$ . Показао је да се тачност изложеног приближног модела повећава са повећањем броја уведених крутих сегмената. Управо ова чињеница је била ограничавајући фактор у примени изложеног метода у време када се појавио. Наиме, да би се обезбедила довољна тачност

модела потребно је користити већи број крутих сегмената. Међутим тада се повећава и број једначина које је потребно решити, што је отежавало примену метода. Током осамдесетих година прошлог века дошло је до интензивније примене персоналних рачунара у научне сврхе. Самим тим су се стекли услови за интензивније коришћење методе крутих сегмената коју је предложио Hencky. Значајан број истраживача је користио методу коју је предложио Hencky. Тако су у референцама [35–42] анализирани еластична стабилност и слободне осцилације еластичних штапова различитог облика. Може се приметити да је овај метод у последњих неколико година често коришћен.



Слика 2.1: Дискретизација еластичног штапа на начин предложен у референци [34]

Поред ове методе, значајно је поменути приступ који су изложили Schiehlen и Raab у референци [43]. Они су предложили равански модел еластичног штапа у облику три крута сегмента ( $V_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ , који су међусобно повезани ротационим зглобовима (видети слику 2.2). У овим зглобовима постављене су спиралне опруге. Такође, први и трећи крути сегмент ( $V_1$  и  $V_3$ ) спојени су спиралном опругом. Предложени равански модел еластичног штапа назван је суперелемент.



Слика 2.2: Суперелемент предложен у референци [43]

Ако се претпостави да је укупна дужина посматраног еластичног штапа  $l$ , дужине уведених крутих сегмената су  $l_1 = l_3 = \delta l$  и  $l_2 = (1 - 2\delta)l$ , где је  $0 < \delta < 0.5$  коефицијент поделе суперелемента.

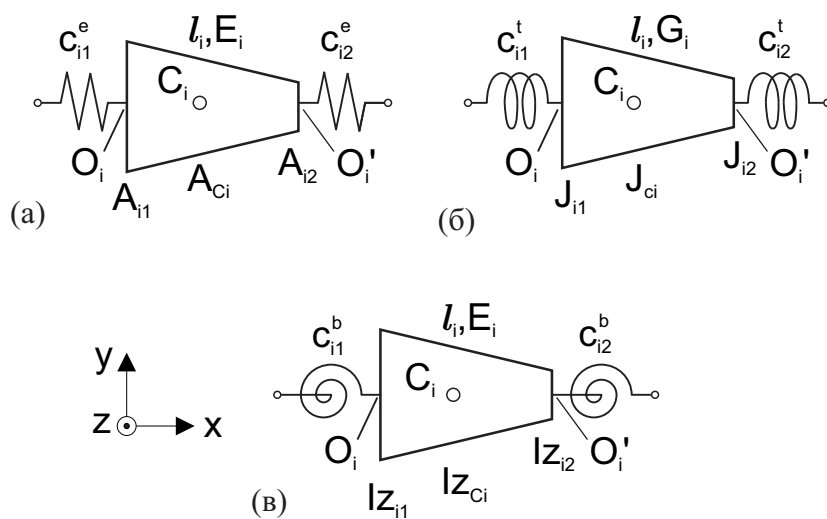
Крутости уведених спиралних опруга су

$$c_1 = c_3 = 6(EI_z/l)(1 - 2\delta)^2, \quad c_2 = 2(EI_z/l)(-1 + 6\delta - 6\delta^2). \quad (2.2)$$

Важно је напоменути да се за вредност коефицијента поделе суперелемента  $\delta = (1 - (1/\sqrt{3}))/2$  добија једноставнији модел, без спиралне опруге која повезује први и трећи крути сегмент, тј. важи да је  $c_2 = 0$  и  $c_1 = c_3 = 2EI_z/l$ . Такође, да би се повећала тачност, могуће је еластични штап поделити на више суперелемената. Конвергенција изложеног приступа проверена је на примеру одређивања кружних фреквенција осциловања еластичне конзоле.

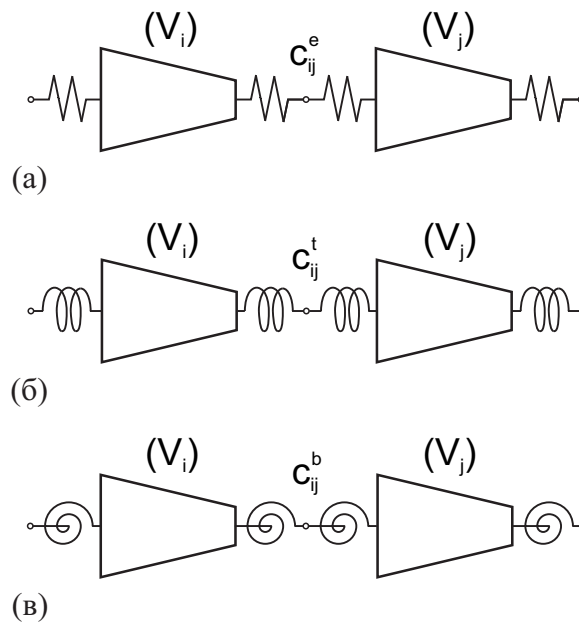
У референци [44] Rauh и Schiehlen предложили су проширење употребе изложене методе на проблеме динамичке анализе еластичне роботске руке. Притом је претпостављено да је закон промене угла ротације руке робота познат. Пошто је у предложеном моделу узета у обзир и еластичност, динамичко понашање руке робота је сложено. Показано је да се са предложеним раванским суперелементом могу успешно разматрати проблеми обртања еластичне роботске руке у равни.

Wang и Huston су у референци [45] предложили елементарни закошени крути сегмент на чијим су крајевима постављене опруге (видети слику 2.3).



Слика 2.3: Закошени крути сегменти предложени у референци [45] за опис: (а) аксијалних деформација, (б) увијања, (в) савијања

Предложеним крутим сегментима могуће је описати три врсте деформација еластичног штапа, тј. аксијалне деформације, увијање и савијање коришћењем одговарајућих опруга. Притом је претпостављено да се површина попречног пресека линеарно смањује дуж штапа. Специјално, предложеним приступом могу бити обухваћени и штапови константног попречног пресека ако се претпостави да нема закошења. Спајањем више елементарних крутих сегмената добија се приближни модел еластичног штапа у облику система крутих сегмената међусобно повезаних опругама (видети слику 2.4).



Слика 2.4: Спајање крутих сегмената из референце [45] при: (а) истезању, (б) увијању, (в) савијању

Крутости опруга уведених на крајевима сегмената, којима се описују аксијалне деформације, увијање и савијање, су:

$$c_{i1}^e = \frac{E_i (A_{O_i} - A_{C_i})}{O_i C_i \ln (A_{O_i} / A_{C_i})}, \quad c_{i2}^e = \frac{E_i (A_{O'_i} - A_{C_i})}{C_i O'_i \ln (A_{O'_i} / A_{C_i})}, \quad (2.3)$$

$$c_{i1}^t = \frac{G_i (J_{O_i} - J_{C_i})}{O_i C_i \ln (J_{O_i} / J_{C_i})}, \quad c_{i2}^t = \frac{G_i (J_{O'_i} - J_{C_i})}{C_i O'_i \ln (J_{O'_i} / J_{C_i})}, \quad (2.4)$$

$$c_{i1}^b = \frac{E_i (I_{O_i} - I_{C_i})}{O_i C_i \ln (I_{O_i} / I_{C_i})}, \quad c_{i2}^b = \frac{E_i (I_{O'_i} - I_{C_i})}{C_i O'_i \ln (I_{O'_i} / I_{C_i})}, \quad (2.5)$$

респективно, где су  $E_i$  и  $G_i$  Young-ов модул еластичности и модул смицања материјала  $i$ -тог крутог сегмента, респективно,

$$A_{C_i} = (2/3) \left( A_{O_i}^2 + A_{O_i} A_{O'_i} + A_{O'_i}^2 \right) / (A_{O_i} + A_{O'_i}) \quad (2.6)$$

је површина попречног пресека  $i$ -тог крутог сегмента на месту средишта маса,  $A_{O_i}$  и  $A_{O'_i}$  су површине попречног пресека  $i$ -тог крутог сегмента на левом и десном крају сегмента, респективно,

$$J_{C_i} = (2/3) \left( J_{O_i}^2 + J_{O_i} J_{O'_i} + J_{O'_i}^2 \right) / (J_{O_i} + J_{O'_i}) \quad (2.7)$$

је поларни момент инерције попречног пресека  $i$ -тог крутог сегмента на месту средишта маса,  $J_{O_i}$  и  $J_{O'_i}$  су поларни моменти инерције попречног пресека  $i$ -тог крутог сегмента на левом и десном крају сегмента, респективно,

$$I_{C_i} = (2/3) \left( I_{O_i}^2 + I_{O_i} I_{O'_i} + I_{O'_i}^2 \right) / (I_{O_i} + I_{O'_i}) \quad (2.8)$$

је момент инерције попречног пресека у тачки  $C_i$  у односу на осу  $z$ ,  $I_{O_i}$  и  $I_{O'_i}$  су моменти инерције попречног пресека  $i$ -тог крутог сегмента на левом и десном крају сегмента, респективно,

$$\overline{O_i C_i} = (l_i/3) (A_{O'_i} + 2A_{O_i}) / (A_{O_i} + A_{O'_i}) \quad (2.9)$$

и

$$\overline{C_i O'_i} = (l_i/3) (2A_{O'_i} + A_{O_i}) / (A_{O_i} + A_{O'_i}) \quad (2.10)$$

представљају растојање средишта маса у односу на леви и десни крај сегмента, респективно, а  $l_i$  је дужина крутог сегмента. Еквивалентна крутост система опруга која настаје спајањем две опруге које припадају суседним елементарним крутим сегментима је одређена изразима:

$$c_{ij}^e = \frac{E_i E_j (A_{O_j} - A_{C_j}) (A_{O'_i} - A_{C_i})}{E_i (A_{O'_i} - A_{C_i}) \overline{O_j C_j} \ln (A_{O_j} / A_{C_j}) + E_j (A_{O_j} - A_{C_j}) \overline{C_i O'_i} \ln (A_{O'_i} / A_{C_i})} \quad (2.11)$$

$$c_{ij}^t = \frac{G_i G_j (J_{O_j} - J_{C_j}) (J_{O'_i} - J_{C_i})}{G_i (J_{O'_i} - J_{C_i}) \overline{O_j C_j} \ln (J_{O_j} / J_{C_j}) + G_j (J_{O_j} - J_{C_j}) \overline{C_i O'_i} \ln (J_{O'_i} / J_{C_i})} \quad (2.12)$$

$$c_{ij}^b = \frac{E_i E_j (I_{O_j} - I_{C_j}) (I_{O'_i} - I_{C_i})}{E_i (I_{O'_i} - I_{C_i}) \overline{O_j C_j} \ln (I_{O_j} / I_{C_j}) + E_j (I_{O_j} - I_{C_j}) \overline{C_i O'_i} \ln (I_{O'_i} / I_{C_i})} \quad (2.13)$$



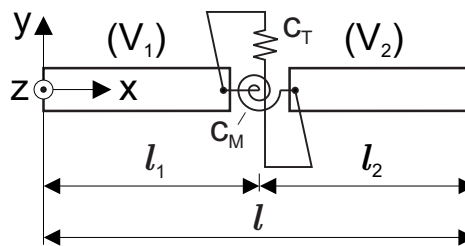
У случају када се спајају крути сегменти константног попречног пресека,  $A_i = A_j = A$ , константног Young-овог модула еластичности,  $E_i = E_j = E$ , дуж сегмента, и једнаких дужина,  $l_i = l_j = l$ , еквивалентна крутост опруга је

$$c_{ij}^e = \frac{EA}{l}, \quad c_{ij}^t = \frac{GJ}{l}, \quad c_{ij}^b = \frac{EI}{l}. \quad (2.14)$$

У поменутој референци изложени приступ је коришћен за динамичку анализу еластичног штапа при чему се претпостављало да се штап обрће око верикалне осе по унапред задатом закону обртања. Тачност методе анализирана је кроз поређење кружних фреквенција осциловања са доступним резултатима у литератури. Такође, показано је да је изложени метод погодан за динамичку анализу еластичних штапова јер је могуће описати неке специфичне ефекте као и при коришћењу аналитичких метода које су знатно сложеније. Иако поуздан, чини се да овај метод са собом носи доста сложене изразе за одређивање параметара крутости и инерције при спајању предложених сегмената.

У референцама [46, 47], Krodkiwski је предложио да се еластични штап дужине  $l$  представи у облику два крута сегмента дужина  $l_1 = l_2 = l/2$  који су међусобно повезани зглобом који допушта два степена слободе кретања, и то једну translацију у правцу  $y$  осе и једну ротацију око осе паралелне оси  $z$ . У зглобу су постављене цилиндрична и спирална опруга крутости:

$$c_M = \frac{EI_z}{l}, \quad c_T = \frac{GA}{l}. \quad (2.15)$$



Слика 2.5: Дискретизован модел еластичног штапа предложен у референци [46]

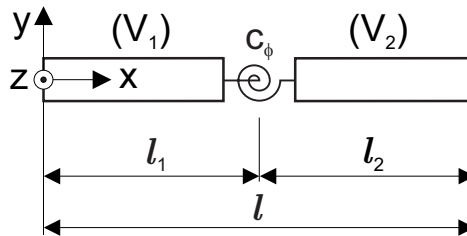
Ванегјее и Nagarajan су у референци [48] предложили да се еластични штап дужине  $l$  представи у облику два крута сегмента дужина  $l_1 = l_2 = l/2$  који су међусобно повезани спиралном опругом крутости (видети слику 2.6):

$$c_\phi = \frac{EI_z}{l}. \quad (2.16)$$

Предложеним начином дискретизације је могуће моделирати савијање у једној равни еластичног штапа. Користећи приближан модел еластичног штапа који се добија након дискретизације, анализирано је кретање свемирске летелице, при чему је претпостављено да су две антене, које летелица носи, еластичне и велике дужине. Показано је да се при наглим маневрима описаним приступом могу успешно моделирати динамичке карактеристике ове летелице. Штавише, у референци [49], Mitiguy и Vanerjee су проширили изложене идеје о дискретизацији еластичног штапа, тако да је осим савијања могуће моделирати и аксијалне деформације и увијање еластичног штапа. То се постиже увођењем цилиндричних и спиралних опруга крутости:

$$c_x = \frac{AE}{l}, \quad c_\theta = \frac{GJ_O}{l}, \quad (2.17)$$

респективно. У поменутој референци, аутори су изложили идеју о дискретизацији и начину одређивања крутости опруга али нису извршили проверу изложеног приступа кроз поређење са доступним резултатима других сродних метода у литератури.



Слика 2.6: Дискретизован модел еластичног штапа предложен у референци [48]

Сви претходно изложени приближни модели еластичног штапа представљају равнске моделе штапа, тј. претпоставља се да се штап деформише у једној равни. У већини представљених модела сматра се да је савијање доминантна врста деформације. Изузетно, у приступима изложеном у референцама [45] и [49] је поред савијања могуће анализирати аксијалне деформације и увијање штапа, али као појединачне деформације. Међутим, у инжењерској пракси се често јављају случајеви оптерећења различитих конструкција када овакви модели нису довољни да би се адекватно описао неки конструкциони елемент. У таквим ситуацијама је потребно разматрати просторне деформације еластичних штапова.

Може се приметити да постоји само неколико приступа који се заснивају на методи крутих сегмената помоћу којих је могуће анализирати просторне деформације еластичног штапа. Тако је у референци [50], Schiehlen предложио приближан модел еластичног штапа у облику система од четири крута сегмента међусобно повезаних зглобовима, као што је приказано на слици 2.7. Први и други, као и трећи и четврти крути сегмент су међусобно повезани Кардан-Хуковим зглобом, док су други и трећи крути сегмент међусобно повезани цилиндричним зглобом. Овај модел допушта шест степени слободе кретања. Дужине уведених крутих сегмената су  $l_1 = l_4 = \delta l$  и  $l_2 = l_3 = (1 - 2\delta)l/2$ , при чему је коефицијент поделе  $\delta$  дефинисан у већ поменутој референци [43] у којој је Schiehlen разматрао равански модел. Очигледна је веза између раванског и просторног модела који је предложио Schiehlen у референцама [43] и [50], респективно. Ако се занемаре уздужне деформације и увијање штапа, и претпостави да постоји савијање само у једној равни, јасно је да се просторни модел, предложен у референци [50], своди на равански модел приказан у референци [43]. Међутим, иако је Schiehlen предложио и просторни модел, у референци [50] није дискутована крутост опруга које је потребно поставити у зглобовима код оваквих модела. Касније, у референци [51], Zhao и остали аутори су детаљније описали овај модел, додавши одговарајуће опруге у зглобовима. Крутости опруга у зглобовима, којима је описано савијање у равни  $xz$ , одређене су на следећи начин:

$$c_{21} = c_{23} = \frac{6(1 - 2\delta)^2}{12 + \lambda} GA l, \quad c_{22} = \frac{12(\lambda\delta - \lambda\delta^2 + 1) - 2\lambda EI_y}{12 + \lambda} \frac{EI_y}{l}, \quad (2.18)$$

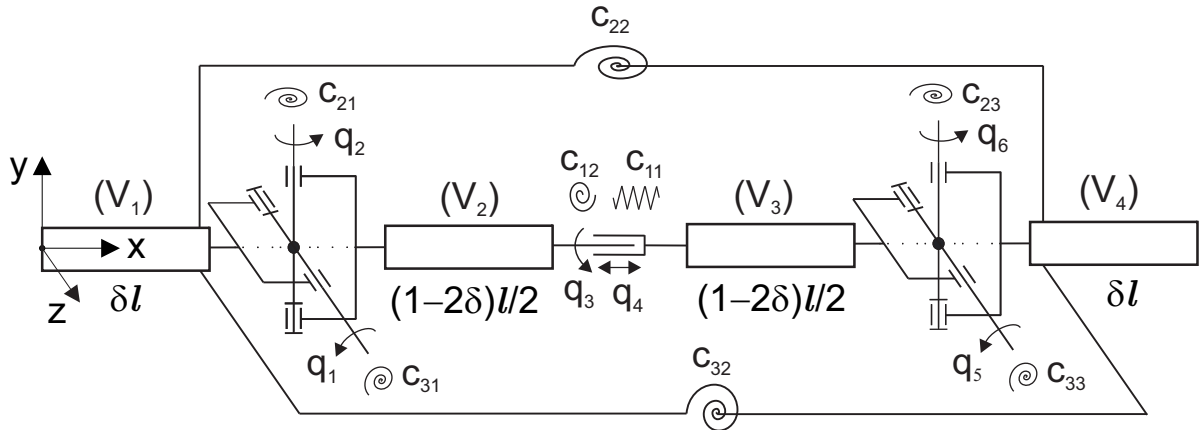
где је  $\lambda = GA l^2 / EI_y$  и  $I_y$  представља момент инерције попречног пресека у односу на осу  $y$ .

На сличан начин се могу одредити и крутости опруга у зглобовима којима је дефинисано савијање у равни  $xy$ . Крутости опруга у цилиндричном зглобу су:

$$c_{11} = \frac{EA}{l}, \quad c_{12} = \frac{GJ}{l}. \quad (2.19)$$

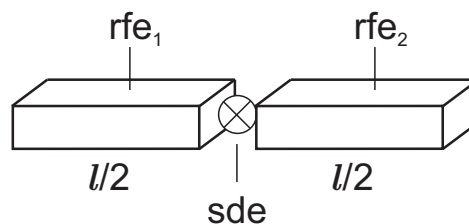
Изложени приступ је у референци [52] коришћен за формирање приближног модела ветрогенератора, а потом за анализу слободних и принудних осцилација формираног модела. Такође, у референци [51] је исти приступ коришћен за формирање приближног модела ветрогенератора, али је узета у обзир и еластичност подлоге. Анализиран је утицај принудних сила које се јављају током земљотреса на модално понашање ветрогенератора. Други значајан приступ који се бави применом методе

крутих сегмената у просторној анализи еластичних штапова је тзв. метод крутих коначних елемената, који се скраћено назива и RFEM (скраћеница од енглеске речи Rigid Finite Element Method).



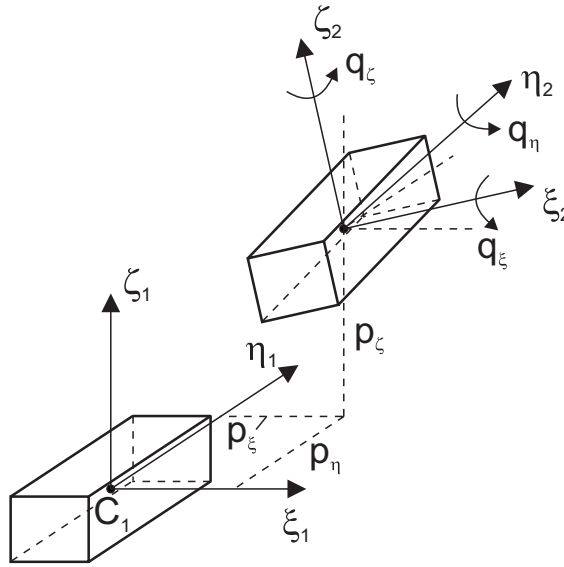
Слика 2.7: Дискретизован модел еластичног штапа предложен у референцама [51, 52]

Ова варијанта моделирања крутим телима је настала на Техничком Универзитету у Гдањску (Пољска) а њене основе је 1975. године први изложио Kruszewski у референци [53]. Идеја ове варијанте је да се еластични штап дужине  $l$  може поделити на два крута елемента,  $rfe_1$  и  $rfe_2$ , једнаке дужине  $l/2$ . Ознака крутих сегмената 'rfe' представља скраћеницу од енглеског назива 'rigid finite element'. Ови крути елементи описују инерцијална својства еластичног штапа, и међусобно су повезани лаким бездимензионим еласто-пригушним елементом sde (скраћеница од енглеског назива 'spring-damping element'), као што је приказано на слици 2.8.



Слика 2.8: Дискретизован модел еластичног штапа предложен у референци [53]

Еласто-пригушни елемент (sde) допушта шест степени слободe кретања крутог елемента  $rfe_2$  у односу на  $rfe_1$ , и то три translације  $p_\xi$ ,  $p_\eta$  и  $p_\zeta$  у правцу координатних оса  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  и  $\zeta_1$ , респективно, и три ротације  $q_\xi$ ,  $q_\eta$  и  $q_\zeta$  око координатних оса  $\xi_2$ ,  $\eta_2$  и  $\zeta_2$ , респективно (видети слику 2.9).



Слика 2.9: Релативне координате дискретизованог модела еластичног штапа из референце [54]

За разлику од осталих приступа, овде нису физички увођене опруге како би се моделирала еластичност штапа, већ је речено да је потенцијална енергија која потиче од еласто-пригушног елемента:

$$\Pi_{sde} = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{sde}^T \mathbf{K}_{sde} \mathbf{w}_{sde}, \quad (2.20)$$

где је  $\mathbf{w}_{sde} = [p_\xi \ p_\eta \ p_\zeta \ q_\xi \ q_\eta \ q_\zeta]^T$  вектор релативних деформација у еласто-пригушном елементу,  $\mathbf{K}_{sde} = \text{diag}(c_{p_\xi}, c_{p_\eta}, c_{p_\zeta}, c_{q_\xi}, c_{q_\eta}, c_{q_\zeta})$  матрица крутости еласто-пригушног елемента,

$$c_{p_\xi} = c_{p_\zeta} = \frac{GA}{l}, \quad c_{p_\eta} = \frac{EA}{l}, \quad c_{q_\xi} = \frac{EI_\xi}{l}, \quad c_{q_\eta} = \frac{GA}{l}, \quad c_{q_\zeta} = \frac{EI_\zeta}{l} \quad (2.21)$$

су елементи матрице крутости, при чему су  $I_\xi$  и  $I_\zeta$  моменти инерције попречног пресека штапа у односу на осе  $\xi$  и  $\eta$ , респективно.

Од свих до сада изложених варијанти методе крутих сегмената ова варијанта је највише коришћена у литератури за решавање различитих инжењерских проблема. Навођење свих референци у којима је овај приступ коришћен био би сувише обиман посао који превазилази обим и циљ ове дисертације. Зато је важно поменути референцу [55] која представља прегледни рад посвећен овом приступу, у којем су побројани многобројни радови у којима је овај приступ коришћен и даље развијан. Такође, у монографији [54] је детаљно описан овај приступ, као и све његове модифи-

кације и примене од настанка па до данас. Чињеница је да је ова варијанта метода крутих сегмената и данас актуелна и коришћена од стране многих истраживача.

На основу свега до сада реченог јасно је да је метод крутих сегмената нашао своје место међу методама за статичку и динамичку анализу еластичних штапова. Доказ да је и даље актуелан у истраживачким круговима је велики број објављених радова у којима се овај метод користи у последњих неколико година. Појава моћних персоналних рачунара и добро развијени алгоритми аналитичке механике су основни разлог због кога овај метод добија на значају у последње време. Иако приближан, овај метод може да обезбеди веома прецизне резултате ако се повећа број крутих сегмената у анализи. Отуда и мотив да се у овој дисертацији размотри један нови, алтернативни приступ у методу крутих сегмената који ће бити детаљно описан у наредним поглављима.

### 3 МОДЕЛ НЕХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА У ОБЛИКУ СИСТЕМА КРУТИХ СЕГМЕНАТА

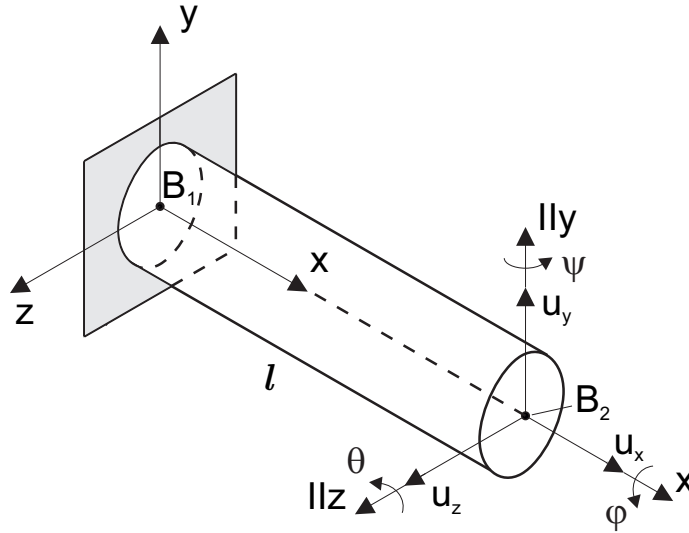
#### 3.1 Уводна разматрања

У овом поглављу биће предложен приближан модел нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека у облику система крутих сегмената константног попречног пресека међусобно повезаних одговарајућим еластичним зглобовима. Под нехомогеним штапом се у даљим разматрањима подразумева штап чији се модул еластичности и густина мењају дуж подужне осе штапа. Најпре ће бити анализиран хомогени еластични штап константног попречног пресека и формиран израз за потенцијалну енергију таквог штапа. Биће уведене одређене трансформације како би се матрица крутости штапа свела на дијагонални облик. Овим ће бити омогућено да се на ефикасан начин формира приближан модел еластичног штапа. Уз помоћ овог приближног модела биће извршена дискретизација нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека.

#### 3.2 Потенцијална енергија хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека

Нека је дат хомогени еластични штап константног попречног пресека приказан на слици 3.1. Штап је дужине  $l$  и на свом левом крају  $B_1$  је уклештен, а на свом десном крају  $B_2$  је слободан. Инерцијални координатни систем  $B_1xyz$  је фиксиран на уклештеном крају штапа при чему се оса  $x$  поклапа са осом штапа у недеформисаном стању. Осе  $y$  и  $z$  представљају главне централне осе попречног пресека штапа.

Ако се на слободном крају штапа делује неком силом, долази до угиба краја  $B_2$  у правцу координатних оса за вредности  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  као и до ротације попречног пресека штапа на крају  $B_2$  у односу на координатни систем  $B_1xyz$ . Углови ротације су означени са  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\theta$  и представљају ротацију око координатних оса  $x$ ,  $y$  и  $z$ , респективно.



Слика 3.1: Еластични штап дужине  $l$

Потенцијална енергија еластично деформисаног штапа може бити изражена на следећи начин:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{B_2}^T \mathbf{K}_{B_2} \mathbf{w}_{B_2}, \quad (3.1)$$

где је  $\mathbf{w}_{B_2} = [u_x \ u_y \ u_z \ \varphi \ \psi \ \theta]^T$  вектор деформације на слободном крају штапа  $B_2$ , а матрица  $\mathbf{K}_{B_2}$  представља матрицу крутости еластичног штапа која се, према референци [56], може изразити на следећи начин:

$$\mathbf{K}_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_2)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_2)} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3(1+\phi_3)} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_3)} & 0 & \frac{(4+\phi_3)EI_y}{l(1+\phi_3)} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_2)EI_z}{l(1+\phi_2)} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$



где је  $G$  модул смицања,  $A$  површина попречног пресека штапа,  $I_y$  и  $I_z$  су моменти инерције попречног пресека штапа у односу на главне централне осе  $y$  и  $z$ , респективно,  $J$  је поларни момент инерције попречног пресека, а  $\phi_2$  и  $\phi_3$  представљају коефицијенте смицања дуж оса  $y$  и  $z$ , респективно. С обзиром да се у овом раду разматра Ојлер-Бернулијев модел еластичног штапа у којем се занемарује смицање, у даљим разматрањима ће бити узето да је  $\phi_2 = \phi_3 = 0$ , па матрица крутости сада добија облик:

$$\mathbf{K}_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Као што се може видети, матрица  $\mathbf{K}_{B_2}$  је симетрична. Циљ је да матрица крутости разматраног еластичног штапа буде дијагонална како би се приближни модел штапа могао ефикасније формирати. Матрица крутости  $\mathbf{K}_{B_2}$  добијена је анализом деформације слободног краја штапа  $B_2$ . На основу идеје о еластичном центру, изложене у референци [57], размотримо везу између координата вектора деформација на крају еластичног штапа  $B_2$  и у еластичном центру.

Нека је на слободном крају еластичног штапа  $B_2$  фиксиран фиктивни лаки крути штап дужине  $\overline{B_2B_3} = l/2$ , при чему се тачка  $B_3$  крутог штапа (еластични центар) поклапа са средиштем недеформисаног еластичног штапа  $\overline{B_1B_2}$  (видети слику 3.2).

Нека су  $\mathbf{u}_{B_2} = \begin{bmatrix} u_{B_2x} & u_{B_2y} & u_{B_2z} \end{bmatrix}^T$  и  $\mathbf{u}_{B_3} = \begin{bmatrix} u_{B_3x} & u_{B_3y} & u_{B_3z} \end{bmatrix}^T$  вектори померања у тачкама  $B_2$  и  $B_3$ , респективно.

Ако се узме у обзир да су вектори ротације попречног пресека штапа у тачкама  $B_2$  и  $B_3$  једнаки, тј. да важи да је  $\Theta_{B_2} = \Theta_{B_3} = \Theta = \begin{bmatrix} \varphi & \psi & \theta \end{bmatrix}^T$ , веза између вектора померања  $\mathbf{u}_{B_2}$  и  $\mathbf{u}_{B_3}$  се може успоставити на следећи начин:

$$\mathbf{u}_{B_2} = \mathbf{u}_{B_3} + \tilde{\mathbf{p}}\Theta, \quad (3.4)$$

где  $\tilde{\mathbf{p}}$  представља косо-симетричну матрицу која одговара вектору  $\mathbf{p} = \overrightarrow{B_2B_3}$ .

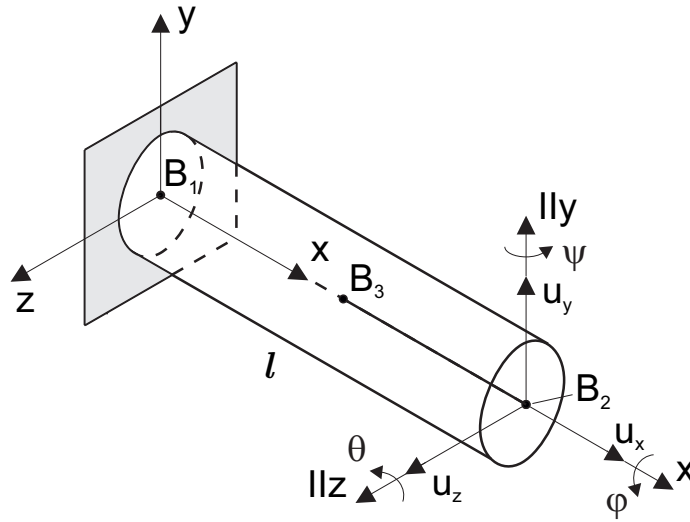
Коначно, вектор деформације еластичног штапа на слободном крају  $B_2$  се може изразити у функцији вектора деформације у тачки  $B_3$  на следећи начин:

$$\mathbf{w}_{B_2} = \mathbf{R}_{B_2, B_3} \mathbf{w}_{B_3}, \quad (3.5)$$

где су  $\mathbf{w}_{B_2} = \left[ \mathbf{u}_{B_2}^T \quad \Theta^T \right]^T$  и  $\mathbf{w}_{B_3} = \left[ \mathbf{u}_{B_3}^T \quad \Theta^T \right]^T$  вектори деформације еластичног штапа у тачкама  $B_2$  и  $B_3$ , а

$$\mathbf{R}_{B_2, B_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

представља матрицу трансформације координата између тачака  $B_2$  и  $B_3$ .



Слика 3.2: Еластични центар штапа

Сада потенцијалну енергију еластичног штапа можемо изразити у функцији вектора деформације у тачки  $B_3$  коришћењем израза (3.1) и (3.5) на следећи начин:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{B_3}^T \mathbf{K}_{B_3} \mathbf{w}_{B_3}, \quad (3.7)$$

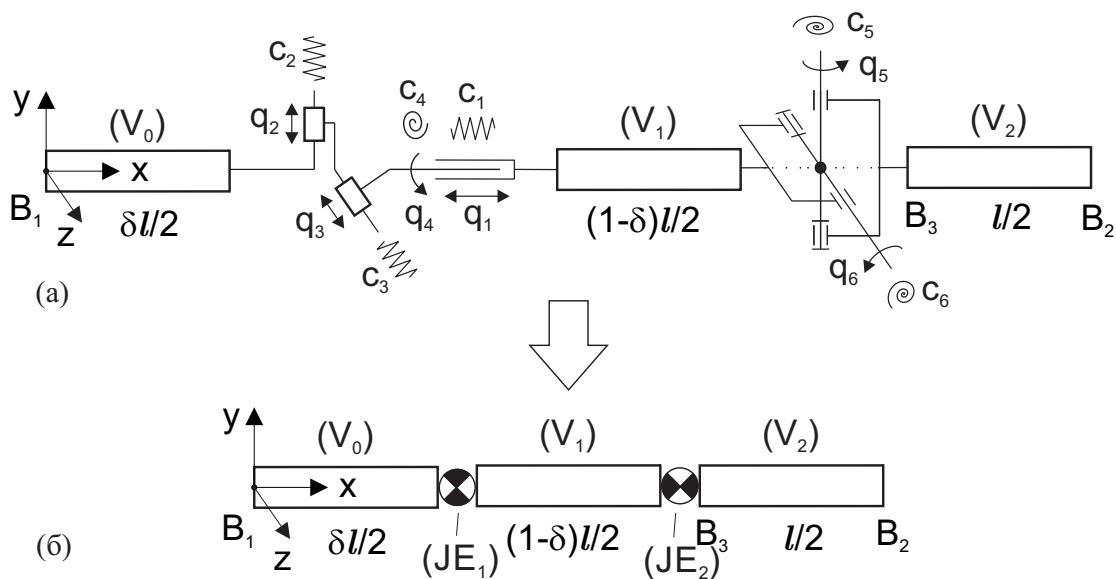
при чему важи да је

$$\mathbf{K}_{B_3} = \mathbf{R}_{B_2, B_3}^T \mathbf{K}_{B_2} \mathbf{R}_{B_2, B_3} = \text{diag} \left( \frac{AE}{l}, \frac{12EI_z}{l^3}, \frac{12EI_y}{l^3}, \frac{GJ}{l}, \frac{EI_y}{l}, \frac{EI_z}{l} \right). \quad (3.8)$$

Дакле, матрица крутости  $\mathbf{K}_{B_3}$  срачуната за еластични центар представља дијагоналну матрицу што значајно поједностављује формирање дискретизованог модела о чему ће бити речи у наредном поглављу.

### 3.3 Дискретизација хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека на круте сегменте

Овде ће бити изложене основне идеје о дискретизацији хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека на круте сегменте које ће представљати основу даљих разматрања у овој дисертацији. На слици 3.3(а) приказан је предложени приближни модел еластичног штапа, који се састоји од три крута сегмента означена са  $(V_i)$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Почетак првог крутог сегмента  $(V_0)$  поклапа се са тачком  $B_1$ , крај крутог сегмента  $(V_2)$  се поклапа са тачком  $B_2$ , док почетак крутог сегмента  $(V_2)$  одговара тачки  $B_3$  еластичног штапа приказаног на слици 3.2. Густина материјала  $\rho$ , модул еластичности  $E$  и површина попречног пресека  $A$  уведених крутих сегмената су исти као и код еластичног штапа. Дужине крутих сегмената  $(V_0)$  и  $(V_1)$  су  $\delta l/2$  и  $(1 - \delta) l/2$ , респективно, где је  $\delta$  коефицијент поделе и важи да је  $0 \leq \delta \leq 1$ . Дужина крутог сегмента  $(V_3)$  је  $l/2$ . Као што се може и видети, збир дужина прва два крута сегмента је увек  $l/2$ , јер је потребно да дужина трећег крутог сегмента увек буде једнака  $l/2$ , како би се тачка  $B_3$  стално поклапала са еластичним центром.



Слика 3.3: Дискретизација хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека на круте сегменте: (а) детаљан приказ, (б) упрошћен приказ

Крути сегменти ( $V_0$ ) и ( $V_1$ ) су међусобно повезани помоћу зглоба који допушта четири степена слободе кретања, и то три translације у правцу координатних оса  $x$ ,  $y$  и  $z$ , као и ротацију око  $x$  осе. Крути сегменти ( $V_1$ ) и ( $V_2$ ) су међусобно повезани Кардан-Хуковим зглобом који допушта два степена слободе кретања, тј. ротације око оса  $y$  и  $z$ . На овај начин се добија дискретизован модел еластичног штапа у облику три крута сегмента са шест степени слободе кретања којима одговарају генерализане координате  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), као што је приказано на слици 3.3(а). Да би предложени приближни модел могао да опише еластична својства штапа, потребно је у сваком од поменутих зглобова поставити опругу одговарајуће крутости  $c_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Крутост уведених опруга је могуће одредити водећи се принципом еквивалентности потенцијалних енергија еластичног штапа и предложеног система крутих сегмената.

Потенцијална енергија предложеног модела се може изразити на следећи начин:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_q \mathbf{q}, \quad (3.9)$$

где је

$$\mathbf{q} = \left[ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \right]^T \quad (3.10)$$

вектор релативних координата, а

$$\mathbf{K}_q = \text{diag}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (3.11)$$

представља матрицу крутости. Пошто је предложени модел изабран тако да је вектор релативних координата једнак вектору деформације еластичног штапа у тачки  $B_3$ , тј.  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{w}_{B_3}$ , да би потенцијална енергија еластичног штапа и предложеног модела биле еквивалентне, потребно је да важи да је  $\mathbf{K}_q \equiv \mathbf{K}_{B_3}$ , па на основу једнакости израза (3.8) и (3.11) важи да су вредности крутости опруга у зглобовима:

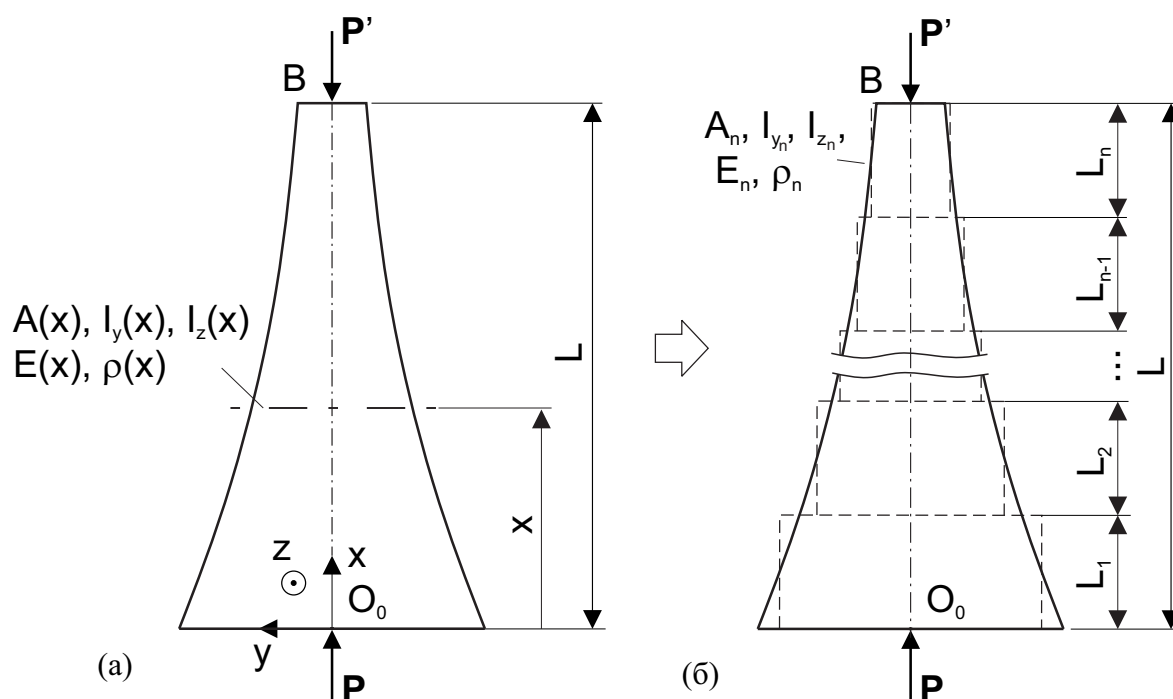
$$c_1 = \frac{AE}{l}, \quad c_2 = \frac{12EI_z}{l^3}, \quad c_3 = \frac{12EI_y}{l^3}, \quad c_4 = \frac{GJ}{l}, \quad c_5 = \frac{EI_y}{l}, \quad c_6 = \frac{EI_z}{l}. \quad (3.12)$$

Сада су дефинисани сви параметри који ближе дефинишу предложени модел еластичног штапа у облику крутих сегмената. У даљим разматрањима користиће се упрошћени приказ, као на слици 3.3(б).

### 3.4 Дискретизација нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека на круте сегменте

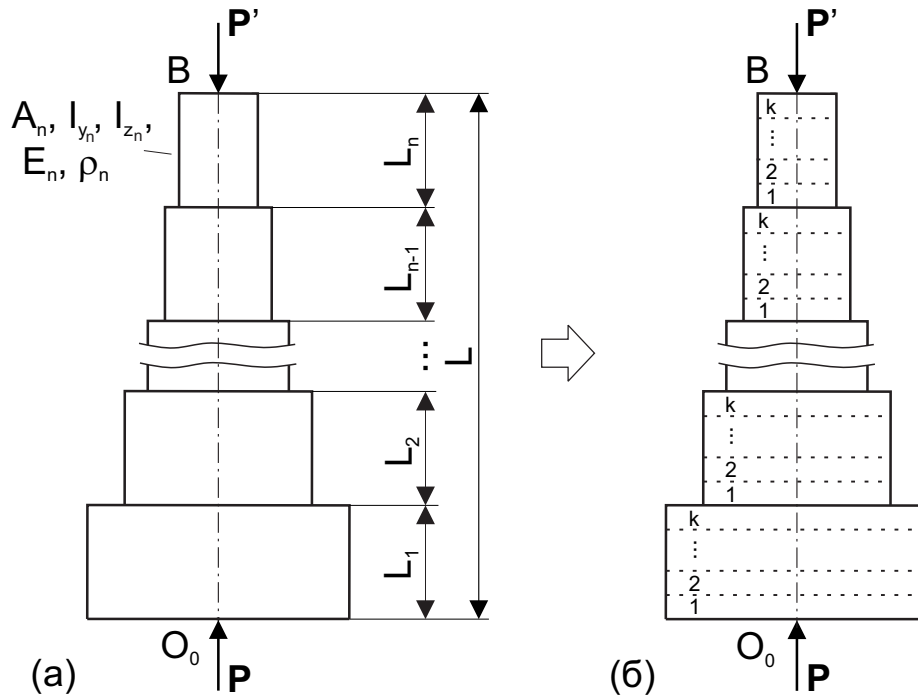
Нехомогени штапови са променљивим попречним пресеком се према начину промене параметара материјала и попречног пресека дуж штапа могу поделити у две групе.

У прву групу спадају штапови са континуалном променом параметара штапа, као што је приказано на слици 3.4(а). Параметри материјала ових штапова, густина и модул еластичности, мењају се сагласно законима промене  $\rho(x)$  и  $E(x)$ , респективно, где је  $x$  уздужна координата штапа за коју важи да је  $(0 \leq x \leq L)$ , а  $L$  представља укупну дужину штапа. Такође, геометријске карактеристике попречног пресека штапа, површина и моменти инерције попречног пресека у односу на главне централне осе  $y$  и  $z$ , дефинисане су законима промене  $A(x)$ ,  $I_y(x)$  и  $I_z(x)$ , респективно.



Слика 3.4: Еластични штап са континуалном променом параметара: (а) тачан облик, (б) приближан облик

У другу групу спадају штапови са степенастом променом попречног пресека дуж осе штапа, као што је приказано на слици 3.5(а). Ови штапови се у општем случају састоје од  $n$  сегмената различитих дужина  $L_i$ , геометријских карактеристика попречног пресека ( $A_i, I_{y_i}, I_{z_i}$ ) и карактеристика материјала ( $\rho_i, E_i$ ), при чему индекс  $i$  узима вредности  $i = 1, \dots, n$ .



Слика 3.5: Еластични штап са степенастом променом параметара: (а) тачан облик, (б) тачан облик са секундарним еластичним сегментима

Имајући у виду разлику између ове две групе штапова потребно је прилагодити начин дискретизације свакој од њих. Код анализе штапова са континуалном променом параметара дуж штапа, идеја је да се у првом кораку задати облик штапа приближно опише увођењем  $n$  еластичних сегмената једнаких дужина  $L_i = L/n$ , при чему сваки од уведених сегмената има константне геометријске карактеристике попречног пресека ( $A_i, I_{y_i}, I_{z_i}$ ) и карактеристике материјала ( $\rho_i, E_i$ ), које се могу дефинисати на следећи начин (видети слику 3.4(б)):

$$A_i = (A(x_i - L_i/2) + A(x_i) + A(x_i + L_i/2)) / 3, \quad (3.13)$$

$$I_{y_i} = (I_y(x_i - L_i/2) + I_y(x_i) + I_y(x_i + L_i/2)) / 3, \quad (3.14)$$

$$I_{z_i} = (I_z(x_i - L_i/2) + I_z(x_i) + I_z(x_i + L_i/2)) / 3, \quad (3.15)$$

$$\rho_i = (\rho(x_i - L_i/2) + \rho(x_i) + \rho(x_i + L_i/2)) / 3, \quad (3.16)$$

$$E_i = (E(x_i - L_i/2) + E(x_i) + E(x_i + L_i/2)) / 3, \quad (3.17)$$

где је

$$x_i = \begin{cases} L_1/2, & i = 1, \\ \sum_{u=1}^{i-1} L_u + L_i/2, & i > 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Уведени еластични сегменти код ове врсте штапова ће убудуће бити називани примарним сегментима. Изнета идеја није нова и уобичајена је при коришћењу методе коначних елемената за анализу ове врсте штапова (видети [24]). На овај начин је могуће приближно описати штапове са било којим континуалним законом промене параметара дуж штапа. Са повећањем броја уведених еластичних сегмената  $n$ , грешка настала приближним описом штапа се значајно смањује, па је употреба оваквог начина оправдана. У другом кораку се сваки од  $n$  уведених еластичних сегмената замењује са три крута сегмента, који су међусобно повезани еластичним зглобним елементима, као што је већ описано у претходном поглављу (видети слику 3.3). Коначно се добија приближан модел еластичног штапа са континуалном променом параметара у облику  $2n+1$  крутих сегмената међусобно повезаних одговарајућим еластичним зглобним елементима.

Код друге групе штапова са задатом степенастом променом параметара дуж штапа нема потребе за било каквим приближним представљањем параметара јер су ови параметри задати и константни за сваки од  $n$  сегмената. Међутим, иако су дужине сегмената  $L_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) задате, могуће је да ове дужине буду велике, па би дискретизација сваког од  $n$  задатих сегмената као једног еластичног сегмента била груба и носила са собом значајне грешке. Зато је потребно сваки од  $n$  задатих еластичних сегмената поделити на додатних  $k$  еластичних сегмената за које ће у даљим разматрањима бити коришћен термин секундарни сегменти. На тај начин се добија  $n \cdot k$  еластичних сегмената, при чему је  $n$  дефинисано задатим обликом штапа, док је  $k$  могуће повећавати како би се постигла задовољавајућа тачност (видети слику 3.5(a)). Други корак у дискретизацији ових штапова је исти као и код прве групе штапова. Сваки од  $n \cdot k$  еластичних сегмената представљен је у облику три крута сегмента међусобно повезана еластичним зглобним елементима. Коначно се добија

приближни модел еластичног штапа са степенастом променом параметара у облику  $2n \cdot k + 1$  крутих сегмената међусобно повезаних одговарајућим еластичним зглобним елементима. Крутости опруга уведених у сваком од  $2s$  зглобних елемената се на основу израза (3.12) могу одредити на следећи начин:

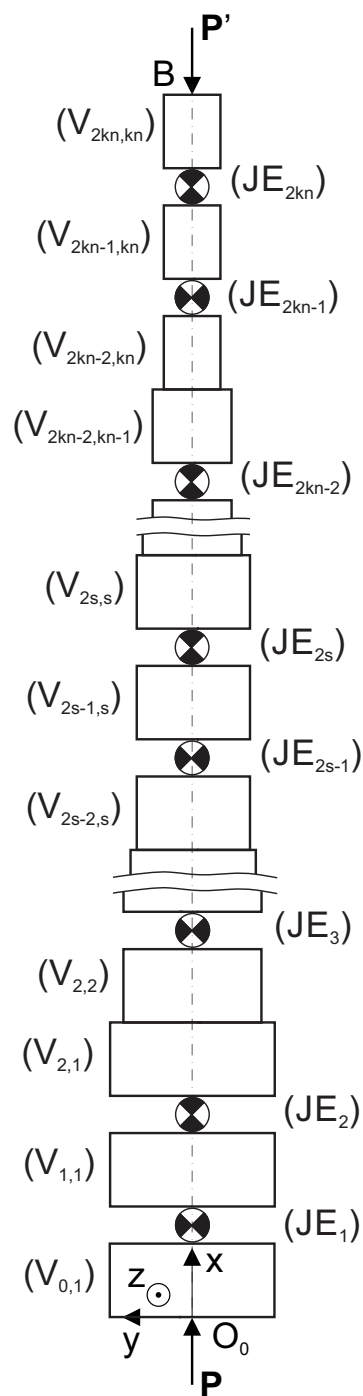
$$\begin{aligned} c_{6s-5} &= k \frac{A_i E}{L_i}, \quad c_{6s-4} = k^3 \frac{12EI_{z_i}}{L_i^3}, \quad c_{6s-3} = k^3 \frac{12EI_{y_i}}{L_i^3}, \\ c_{6s-2} &= k \frac{GJ_i}{L_i}, \quad c_{6s-1} = k \frac{EI_{y_i}}{L_i}, \quad c_{6s} = k \frac{EI_{z_i}}{L_i}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

при чему се индекси  $i$  у ознакама односе на  $i$ -ти примарни сегмент и притом важи да је  $s = j + k(i - 1)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), ( $j = 1, \dots, k$ ), ( $s = 1, \dots, n \cdot k$ ).

Ако се сада упореде добијени модели штапова са континуалном и степенастом променом параметара дуж штапа, могуће је уочити одређене сличности. Наиме, ако се претпостави да је број уведених секундарних сегмената  $k = 1$ , и да је  $L_i = L/n$ , модел штапа са степенастом променом параметара (видети слику 3.5(a)) је идентичан приближном моделу штапа са континуалном променом параметара (видети слику 3.4(a)). Зато је могуће разматрати један општи приближни модел у облику  $2n \cdot k + 1$  крутих сегмената, који је приказан на слици 3.6. Зглобни елементи су означени са  $JE_{2s-1}$  и  $JE_{2s}$  ( $s = 1, \dots, n \cdot k$ ) и представљају упрошћен приказ зглобних елемената приказаних на слици 3.3.

Дакле, представљени дискретизовани модел у општем случају у себи садржи и примарне и секундарне еластичне сегменте. Када је потребно анализирати штапове са континуалном променом параметара довољно је усвојити да је  $k = 1$ , док се број примарних еластичних сегмената  $n$  бира у зависности од жељене тачности. У том случају, дужина сваког од уведених  $n$  примарних сегмената је једнака и износи  $L_i = L/n$ , док се остали параметри ових сегмената одређују помоћу израза (3.13)-(3.18). У другом случају, ако је потребно анализирати штапове са степенастом променом параметара, сваки од сегмената је унапред дефинисан, тако да је број примарних сегмената  $n$  константан. Сада је број секундарних еластичних сегмената  $k$  променљив, и његовим повећавањем постиже се жељена тачност. У сврху даљих анализа, претпостављено је да на доњем и горњем делу штапа делују аксијалне притисне силе  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}'$ , респективно (видети слику 3.6).





Слика 3.6: Приближни модел нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека у облику система крутих сегмената

## 4 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА НЕХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

### 4.1 Уводна разматрања

У овом поглављу ће бити формиране диференцијалне једначине кретања еластичног штапа дискретизованог на круте сегменте. Најпре ће бити разматран приближан модел  $s$ -тог еластичног сегмента константних параметара приказаног на слици 4.1. Имајући у виду да је у овој дисертацији еластични штап константних параметара дуж подужне осе симетрије штапа означен као основа за формирање приближног модела штапа са променљивим параметрима дуж штапа, највише пажње ће бити посвећено извођењу диференцијалних једначина кретања управо овог елемента. Положај крутих сегмената описан је апсолутним координатама. Број ових координата је већи од броја степени слободе кретања система па су из тог разлога уведене и одговарајуће везе које ове координате морају да задовоље. Зато је за формирање диференцијалних једначина кретања приближног модела  $s$ -тог еластичног сегмента потребно користити Лагранжеве једначине са множитељима веза. Након елиминације множитеља веза добијају се диференцијалне једначине кретања приближног модела  $s$ -тог еластичног сегмента у функцији независних координата. На тај начин је за опис целокупног система крутих сегмената могуће користити Лагранжеве једначине друге врсте, јер су сада диференцијалне једначине кретања  $s$ -тог еластичног сегмента изражене у функцији независних координата.

Овакав начин формирања диференцијалних једначина кретања система крутих сегмената није типичан у литератури. Најчешће се за ову сврху користе релативне координате чија примена значајно смањује ефикасност формирања диференцијалних једначина кретања модела са већим бројем степени слободе кретања. Очекивано је

да ће се при анализи еластичних штапова са променљивим параметрима јавити потреба за коришћењем већег броја крутих сегмената због постизања жељене тачности. Зато је јасан мотив за изналажење ефикаснијег начина формирања диференцијалних једначина кретања система крутих сегмената, који ће бити изложен у наставку.

## 4.2 Диференцијалне једначине кретања дискретизованог модела хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека

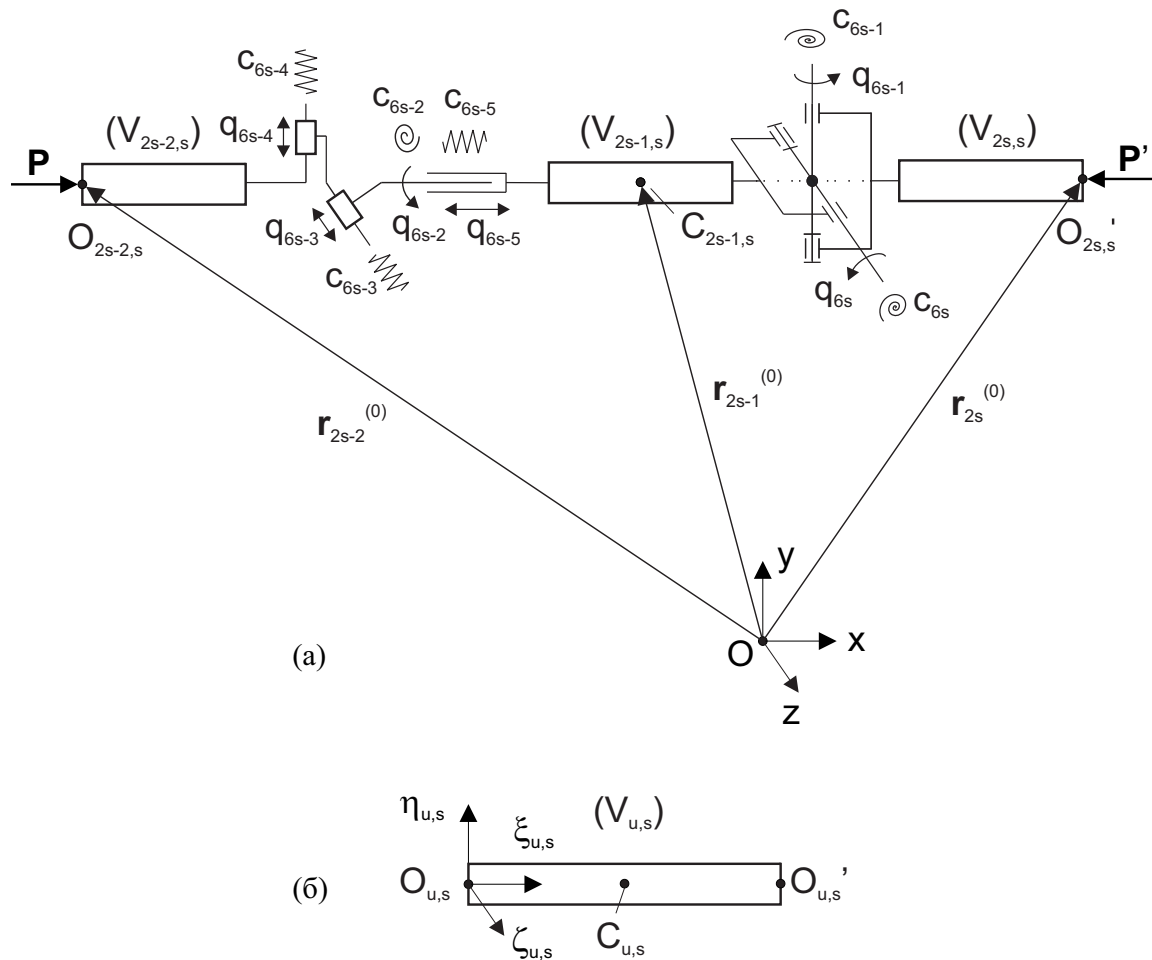
### 4.2.1 Једначине веза

За опис положаја крутих сегмената, који чине дискретизовани модел  $s$ -тог еластичног сегмента, у односу на непокретни координатни систем  $Oxyz$  коришћене су апсолутне координате, и то Декартове координате изабране тачке крутог сегмента  $x_{k,s}$ ,  $y_{k,s}$  и  $z_{k,s}$ , као и углови ротације крутог сегмента  $\varphi_{k,s}$ ,  $\psi_{k,s}$  и  $\theta_{k,s}$  око непокретних оса  $x$ ,  $y$  и  $z$ , респективно. Ови углови су у литератури познати као углови ваљања, галопирања (пропињања) и вијугања (скретања) [58, 59] („roll-pitch-yaw angles“ у литератури на енглеском језику). Користе се при проучавању кретања бродова, авиона и копнених превозних средстава. Њихова главна предност у односу на остале углове који се користе за оријентацију крутог тела у простору (као што су на пример Ојлерови углови) је у мањој осетљивости на појаву сингуларних ситуација, у којима долази до преклапања оса ротације, па није могуће разликовати извршене ротације, једну у односу на другу.

Пошто се разматрани систем крутих сегмената приказан на слици 4.1 састоји од три крута сегмента, опис положаја се врши са осамнаест апсолутних координата. За апсолутне координате које описују положај првог сегмента у ланцу ( $V_{2s-2,s}$ ) изабране су Декартове координате тачке  $O_{2s-2,s}$  на левом крају штапа, тј.  $x_{2s-2,s}$ ,  $y_{2s-2,s}$  и  $z_{2s-2,s}$ , као и углови ротације тела  $\varphi_{2s-2,s}$ ,  $\psi_{2s-2,s}$  и  $\theta_{2s-2,s}$ . Положај сегмента ( $V_{2s-1,s}$ ) дефинисан је Декартовим координатама  $x_{2s-1,s}$ ,  $y_{2s-1,s}$  и  $z_{2s-1,s}$  средишта маса  $C_{2s-1,s}$  и угловима ротације  $\varphi_{2s-1,s}$ ,  $\psi_{2s-1,s}$  и  $\theta_{2s-1,s}$ . Коначно, нека је положај сегмента ( $V_{2s,s}$ ) дефинисан Декартовим координатама  $x_{2s,s}$ ,  $y_{2s,s}$  и  $z_{2s,s}$  тачке  $O'_{2s,s}$  на десном крају

крутог сегмента и угловима ротације  $\varphi_{2s,s}$ ,  $\psi_{2s,s}$  и  $\theta_{2s,s}$ .

Систем крутих сегмената приказан на слици 4.1 има укупно дванаест степени слободе кретања. Сегмент  $(V_{2s-2,s})$  се слободно креће па самим тим има шест степени слободе кретања, а остатак система има додатних шест степени слободе кретања који потичу од релативног кретања преостала два сегмента у односу на претходни сегмент у ланцу. Пошто посматрани систем има дванаест степени слободе кретања, а претходно је уведено осамнаест апсолутних координата, потребно је дефинисати шест једначина веза пошто систем садржи исто толико зависних координата.



Слика 4.1: (а) Дискретизовани модел  $s$ -тог еластичног штапа, (б) Детаљан приказ крутог сегмента  $(V_{u,s})$

Уочимо сада везе које постоје између апсолутних координата крутих сегмената. Зглобни елемент који повезује сегменте  $(V_{2s-2,s})$  и  $(V_{2s-1,s})$  допушта релативна транс- латорна померања у правцу оса  $\xi_{2s-2,s}$ ,  $\eta_{2s-2,s}$  и  $\zeta_{2s-2,s}$ , као и ротацију око осе  $\xi_{2s-1,s}$  сегмента  $(V_{2s-1,s})$  у односу на сегмент  $(V_{2s-2,s})$ . Међутим, није омогућена ротација

сегмента ( $V_{2s-1,s}$ ) у односу на сегмент ( $V_{2s-2,s}$ ) око оса  $\eta_{2s-1,s}$  и  $\zeta_{2s-1,s}$ . Из тог разлога је могуће формирати следеће две везе које потичу од овог зглобног елемента:

$$f_1 \equiv -\psi_{2s-2,s} + \psi_{2s-1,s} = 0, \quad (4.1)$$

$$f_2 \equiv -\theta_{2s-2,s} + \theta_{2s-1,s} = 0. \quad (4.2)$$

Сегменти ( $V_{2s-1,s}$ ) и ( $V_{2s,s}$ ) повезани су Кардановим зглобом који допушта ротацију око оса  $\eta_{2s-1,s}$  и  $\zeta_{2s-1,s}$ , док ротација око осе  $\xi_{2s-1,s}$  није могућа. Зато у сваком тренутку важи да је:

$$f_3 \equiv -\varphi_{2s-1,s} + \varphi_{2s,s} = 0. \quad (4.3)$$

Поред тога, могуће је формирати следећу релацију између вектора положаја одабраних тачака крутих сегмената ( $V_{2s-1,s}$ ) и ( $V_{2s,s}$ ) које повезује Карданов зглоб:

$$\mathbf{r}_{2s-1,s}^{(0)} + \overrightarrow{C_{2s-1}O'_{2s-1,s}}^{(0)} + \overrightarrow{O_{2s}O'_{2s,s}}^{(0)} = \mathbf{r}_{2s,s}^{(0)} \quad (4.4)$$

где је

$$\mathbf{r}_{k,s}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{k,s} & y_{k,s} & z_{k,s} \end{bmatrix}^T, \quad (k = 2s - 1, 2s) \quad (4.5)$$

вектор положаја одабраних тачака крутих сегмената ( $V_{2s-1,s}$ ) и ( $V_{2s,s}$ ) у односу на непокретни координатни систем  $Oxyz$ ,  $\overrightarrow{C_{2s-1}O'_{2s-1,s}}^{(0)}$  локални вектор који спаја средиште маса сегмента ( $V_{2s-1,s}$ ) са његовим десним крајем, а  $\overrightarrow{O_{2s}O'_{2s,s}}^{(0)}$  представља локални вектор који спаја почетак и крај сегмента ( $V_{2s,s}$ ) (видети слику 4.1(б)). Експонент (0) у ознаци вектора означава да су његове пројекције изражене у односу на непокретни координатни систем  $Oxyz$ , док индекс  $s$  означава да вектор припада  $s$ -том еластичном сегменту.

Локални вектори  $\overrightarrow{C_{2s-1}O'_{2s-1,s}}^{(0)}$  и  $\overrightarrow{O_{2s}O'_{2s,s}}^{(0)}$  могу се одредити на следећи начин:

$$\overrightarrow{C_{2s-1}O'_{2s-1,s}}^{(0)} = \mathbf{R}_{0,(2s-1,s)} \overrightarrow{C_{2s-1}O'_{2s-1,s}}^{(2s-1)}, \quad (4.6)$$

$$\overrightarrow{O_{2s}O'_{2s,s}}^{(0)} = \mathbf{R}_{0,(2s,s)} \overrightarrow{O_{2s}O'_{2s,s}}^{(2s)} \quad (4.7)$$

где су

$$\overrightarrow{C_{2s-1}O'_{2s-1,s}}^{(2s-1)} = \begin{bmatrix} \frac{l_{2s-1,s}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.8)$$

и

$$\overrightarrow{O_{2s} \dot{O}'_{2s,s}}^{(2s)} = \begin{bmatrix} l_{2s,s} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.9)$$

локални вектори дефинисани у односу на локалне координатне системе

$O_{2s-1,s} \xi_{2s-1,s} \eta_{2s-1,s} \zeta_{2s-1,s}$  и  $O_{2s,s} \xi_{2s,s} \eta_{2s,s} \zeta_{2s,s}$ , фиксирани за почетак сегмената  $(V_{2s-1,s})$  и  $(V_{2s,s})$ , респективно,

$$\mathbf{R}_{0,k} = \begin{bmatrix} C\theta_k C\psi_k & C\theta_k S\psi_k S\varphi_k - S\theta_k C\varphi_k & C\theta_k S\psi_k C\varphi_k + S\theta_k S\varphi_k \\ S\theta_k C\psi_k & S\theta_k S\psi_k S\varphi_k + C\theta_k C\varphi_k & S\theta_k S\psi_k C\varphi_k - C\theta_k S\varphi_k \\ -S\psi_k & C\psi_k S\varphi_k & C\psi_k C\varphi_k \end{bmatrix}, \quad (k = (2s-2, s), (2s-1, s), (2s, s)) \quad (4.10)$$

представља матрицу трансформације координата [58] из покретног система  $O_k \xi_k \eta_k \zeta_k$  у непокретни координатни систем  $Oxyz$ , при чему  $C\varphi_k$  представља скраћеницу за  $\cos \varphi_k$  и  $S\varphi_k$  представља скраћеницу за  $\sin \varphi_k$ , итд.

Имајући у виду да се разматрају мале деформације еластичног штапа, могу се увести следеће апроксимације:

$$C\varphi_k \approx 1, S\varphi_k \approx \varphi_k, C\psi_k \approx 1, S\psi_k \approx \psi_k, C\theta_k \approx 1, S\theta_k \approx \theta_k. \quad (4.11)$$

Такође, ако су деформације мале, могу се занемарити и чланови другог реда у матрици трансформације координата, па се израз (4.10) своди на облик:

$$\mathbf{R}_{0,k} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_k & \psi_k \\ \theta_k & 1 & -\varphi_k \\ -\psi_k & \varphi_k & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

На основу израза (4.6) - (4.12), израз (4.4) добија облик:

$$\begin{Bmatrix} x_{2s-1,s} \\ y_{2s-1,s} \\ z_{2s-1,s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{2s-1,s} & \psi_{2s-1,s} \\ \theta_{2s-1,s} & 1 & -\varphi_{2s-1,s} \\ -\psi_{2s-1,s} & \varphi_{2s-1,s} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{2s-1,s}/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{2s,s} & \psi_{2s,s} \\ \theta_{2s,s} & 1 & -\varphi_{2s,s} \\ -\psi_{2s,s} & \varphi_{2s,s} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{2s,s} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{2s,s} \\ y_{2s,s} \\ z_{2s,s} \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

или у развијеном облику,

$$x_{2s-1,s} + \frac{l_{2s-1,s}}{2} + l_{2s,s} = x_{2s,s}, \quad (4.14)$$

$$y_{2s-1,s} + \frac{l_{2s-1,s}}{2}\theta_{2s-1,s} + l_{2s,s}\theta_{2s,s} = y_{2s,s}, \quad (4.15)$$

$$z_{2s-1,s} - \frac{l_{2s-1,s}}{2}\psi_{2s-1,s} - l_{2s,s}\psi_{2s,s} = z_{2s,s}. \quad (4.16)$$

Уведимо сада помоћну координату  $\tilde{x}_{k,s}$ , ( $k = 2s - 1, 2s$ ) тако да важи:

$$x_{k,s} = x_{k,s}(0) + \tilde{x}_{k,s} \quad (4.17)$$

где  $x_{k,s}(0)$  представља вредност координате  $x_{k,s}$  у почетном тренутку.

Из израза (4.14) и (4.17) следи да је:

$$x_{2s-1,s}(0) + \tilde{x}_{2s-1,s} + \frac{l_{2s-1,s}}{2} + l_{2s,s} = x_{2s,s}(0) + \tilde{x}_{2s,s}. \quad (4.18)$$

Ако узмемо у обзир да је у почетном тренутку, односно у положају када је штап недеформисан, испуњено да је:

$$x_{2s-1,s}(0) + \frac{l_{2s-1,s}}{2} + l_{2s,s} = x_{2s,s}(0) \quad (4.19)$$

онда израз (4.18) добија облик:

$$\tilde{x}_{2s-1,s} - \tilde{x}_{2s,s} = 0. \quad (4.20)$$

Помоћна координата  $\tilde{x}_{k,s}$  је уведена јер је потребно да све апсолутне координате буду мера одступања положаја крутог сегмента од равнотежног положаја, што није био случај код координате  $x_{k,s}$  јер је у равнотежном положају (недеформисани штап) важило да је  $x_{k,s} \neq 0$ .

На основу израза (4.15), (4.16) и (4.20) могу се формирати преостале три једначине веза које следе на основу карактеристика Кардановог зглоба:

$$f_4 \equiv \tilde{x}_{2s-1,s} - \tilde{x}_{2s,s} = 0, \quad (4.21)$$

$$f_5 \equiv y_{2s-1,s} + \frac{l_{2s-1,s}}{2}\theta_{2s-1,s} + l_{2s,s}\theta_{2s,s} - y_{2s,s} = 0, \quad (4.22)$$

$$f_6 \equiv z_{2s-1,s} - \frac{l_{2s-1,s}}{2}\psi_{2s-1,s} - l_{2s,s}\psi_{2s,s} - z_{2s,s} = 0. \quad (4.23)$$

Коначно, на основу израза (4.1) - (4.3) и (4.21) - (4.23) можемо формирати вектор једначина веза у облику:

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\psi_{2s-2,s} + \psi_{2s-1,s} \\ -\theta_{2s-2,s} + \theta_{2s-1,s} \\ -\varphi_{2s-1,s} + \varphi_{2s,s} \\ \tilde{x}_{2s-1,s} - \tilde{x}_{2s,s} \\ y_{2s-1,s} + \frac{l_{2s-1,s}}{2}\theta_{2s-1,s} + l_{2s,s}\theta_{2s,s} - y_{2s,s} \\ z_{2s-1,s} - \frac{l_{2s-1,s}}{2}\psi_{2s-1,s} - l_{2s,s}\psi_{2s,s} - z_{2s,s} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{6 \times 1}. \quad (4.24)$$

Приметимо да су све везе које се јављају између апсолутних координата холономне склерономне везе.

#### 4.2.2 Кинетичка енергија дискретизованог еластичног штапа

Кинетичка енергија система крутих сегмената приказаних на слици 4.1 је:

$$T_s = T_{2s-2,s} + T_{2s-1,s} + T_{2s,s}. \quad (4.25)$$

У општем случају, кинетичка енергија крутог сегмента  $(V_{k,s})$ ,  $(k = 2s - 2, 2s - 1, 2s)$  је одређена изразом:

$$T_{k,s} = \frac{1}{2}m_{k,s} \mathbf{V}_{C_{k,s}}^{(0)T} \mathbf{V}_{C_{k,s}}^{(0)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{k,s}^{(0)T} \mathbf{J}_{C_{k,s}} \boldsymbol{\omega}_{k,s}^{(0)} \quad (4.26)$$

где је  $m_{k,s}$  маса крутог сегмента,  $\mathbf{V}_{C_{k,s}}^{(0)}$  брзина средишта маса крутог сегмента у односу на непокретни координатни систем  $O_{xyz}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{k,s}^{(0)}$  угаона брзина крутог сегмента у односу на непокретни координатни систем и

$$\mathbf{J}_{C_{k,s}} = \text{diag}(J_{C_{k,s}\xi_{k,s}}, J_{C_{k,s}\eta_{k,s}}, J_{C_{k,s}\zeta_{k,s}}), \quad (4.27)$$

представља тензор инерције крутог сегмента срачунат за тачку  $C_{k,s}$  у случају када су осе  $\xi_{k,s}$ ,  $\eta_{k,s}$  и  $\zeta_{k,s}$  главне централне осе инерције.

Одредимо сада кинетичку енергију сегмента  $(V_{2s-2,s})$ . Пошто су за опис положаја тела  $(V_{2s-2,s})$  коришћене Декартове координате тачке  $O_{2s-2,s}$ , потребно је да вектор брзине средишта маса  $\mathbf{V}_{C_{2s-2,s}}^{(0)}$  изразимо у функцији брзине  $\mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)}$ .

Брзина тачке  $O_{2s-2,s}$  је:



$$\mathbf{V}_{O_{2s-s,s}}^{(0)} = \mathbf{V}_{C_{2s-2,s}}^{(0)} + \boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)} \times \overrightarrow{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(0)}} \quad (4.28)$$

Имајући у виду да је

$$\overrightarrow{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(0)}} = \mathbf{R}_{0,(2s-2,s)} \overrightarrow{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(2s-2)}}, \quad (4.29)$$

из претходног израза се може одредити брзина средишта маса  $C_{2s-2,s}$ :

$$\mathbf{V}_{C_{2s-2,s}}^{(0)} = \mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2s-2,s}^{(0)} \mathbf{R}_{0,(2s-2,s)} \overrightarrow{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(2s-2)}}. \quad (4.30)$$

Пошто на основу референце [60] важи да је

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2s-2,s}^{(0)} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_{0,(2s-2,s)}) \mathbf{R}_{0,(2s-2)}^T, \quad (4.31)$$

и за матрицу трансформације дефинисану изразом (4.10) важи да је  $\mathbf{R}_{0,(2s-2)}^T \mathbf{R}_{0,(2s-2)} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ , претходни израз добија облик:

$$\mathbf{V}_{C_{2s-2,s}}^{(0)} = \mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} - \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_{0,(2s-2,s)}) \overrightarrow{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(2s-2)}}. \quad (4.32)$$

Ако узмемо у разматрање приближан облик матрице трансформације координата, дефинисан изразом (4.12), важи да је  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2s-2,s}^{(0)} \approx \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_{0,(2s-2,s)})$  па претходни израз постаје:

$$\mathbf{V}_{C_{2s-2,s}}^{(0)} = \mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2s-2,s}^{(0)} \overrightarrow{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(2s-2)}} \quad (4.33)$$

односно,

$$\mathbf{V}_{C_{2s-2,s}}^{(0)} = \mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} + \widetilde{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(2s-2)}} \boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)}. \quad (4.34)$$

На основу израза (4.26) и (4.34), кинетичка енергија крутог сегмента ( $V_{2s-2,s}$ ) се може записати у облику:

$$\begin{aligned} T_{2s-2,s} &= \frac{1}{2} m_{2s-2,s} \left( \mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} + \widetilde{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(2s-2)}} \boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)} \right)^T \left( \mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} + \widetilde{C_{2s-2}O_{2s-2,s}^{(2s-2)}} \boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)T} \mathbf{J}_{C_{2s-2,s}} \boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Претходни израз може бити записан и у матричном облику:

$$T_{2s-2,s} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s}^T \mathbf{M}_{2s-2,s} \dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s} \quad (4.36)$$

где је

$$\dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s} = \left[ \left( \mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} \right)^T \left( \boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)} \right)^T \right]^T, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{M}_{2s-2,s} = \begin{bmatrix} m_{2s-2,s} \mathbf{I}_{3 \times 3} & m_{2s-2} \widetilde{C}_{2s-2} O_{2s-2,s}^{(2s-s)} \\ m_{2s-2} \left( \widetilde{C}_{2s-2} O_{2s-2,s}^{(2s-s)} \right)^T \mathbf{J}_{C_{2s-2,s}} + m_{2s-2,s} \left( \widetilde{C}_{2s-2} O_{2s-2,s}^{(2s-s)} \right)^T \widetilde{C}_{2s-2} O_{2s-2,s}^{(0)} & \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Имајући у виду да је

$$\mathbf{V}_{O_{2s-2,s}}^{(0)} = \left[ \dot{\tilde{x}}_{2s-2,s} \quad \dot{y}_{2s-2,s} \quad \dot{z}_{2s-2,s} \right]^T, \quad (4.39)$$

и да при претпоставци о малим деформацијама штапа важи да је

$$\boldsymbol{\omega}_{2s-2,s}^{(0)} = \left[ \dot{\varphi}_{2s-2,s} \quad \dot{\psi}_{2s-2,s} \quad \dot{\theta}_{2s-2,s} \right]^T, \quad (4.40)$$

вектор  $\dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s}$  се може представити у облику:

$$\dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s} = \left[ \dot{\tilde{x}}_{2s-2,s} \quad \dot{y}_{2s-2,s} \quad \dot{z}_{2s-2,s} \quad \dot{\varphi}_{2s-2,s} \quad \dot{\psi}_{2s-2,s} \quad \dot{\theta}_{2s-2,s} \right]^T. \quad (4.41)$$

Поред тога, ако уочимо да је

$$\overrightarrow{C_{2s-2} O_{2s-2,s}^{(2s-2)}} = \left[ \frac{l_{2s-2,s}}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (4.42)$$

и искористимо израз (4.27), матрица  $\mathbf{M}_{2s-2,s}$  се своди на облик:

$$\mathbf{M}_{2s-2,s} = \begin{bmatrix} m_{2s-2,s} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2s-2,s} & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s-2,s} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} \\ 0 & m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} \\ 0 & -m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{C_{2s-2,s} \xi_{2s-2,s}} & 0 \\ 0 & J_{C_{2s-2,s} \eta_{2s-2,s}} + m_{2s-2,s} \left( \frac{l_{2s-2,s}}{2} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{C_{2s-2,s} \zeta_{2s-2,s}} + m_{2s-2,s} \left( \frac{l_{2s-2,s}}{2} \right)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Кинетичка енергија сегмента ( $V_{2s-1,s}$ ) се на основу израза (4.26) може одредити на следећи начин:

$$T_{2s-1,s} = \frac{1}{2} m_{2s-1,s} \mathbf{V}_{C_{2s-1,s}}^{(0)T} \mathbf{V}_{C_{2s-1,s}}^{(0)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{2s-1,s}^{(0)T} \mathbf{J}_{C_{2s-1,s}} \boldsymbol{\omega}_{2s-1,s}^{(0)}, \quad (4.44)$$

односно, у матричној форми:

$$T_{2s-1,s} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{C_{2s-1,s}}^{(0)} \\ \boldsymbol{\omega}_{2s-1,s}^{(0)} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{2s-1,s} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_{C_{2s-1,s}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{C_{2s-1,s}}^{(0)} \\ \boldsymbol{\omega}_{2s-1,s}^{(0)} \end{Bmatrix}. \quad (4.45)$$

Пошто су за опис положаја сегмента ( $V_{2s-1,s}$ ) коришћене апсолутне координате средишта маса  $C_{2s-1,s}$ , сматраћемо да су вектори  $\mathbf{V}_{C_{2s-1,s}}^{(0)}$  и  $\boldsymbol{\omega}_{2s-1,s}^{(0)}$  познати, тј. да је:

$$\mathbf{V}_{C_{2s-1,s}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{2s-1,s} & \dot{y}_{2s-1,s} & \dot{z}_{2s-1,s} \end{bmatrix}^T, \quad (4.46)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2s-1,s}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{2s-1,s} & \dot{\psi}_{2s-1,s} & \dot{\theta}_{2s-1,2} \end{bmatrix}^T. \quad (4.47)$$

На основу израза (4.45), (4.46) и (4.47), кинетичка енергија сегмента ( $V_{2s-1,s}$ ) се може записати у облику:

$$T_{2s-1,s} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}_{2s-1,s}^T \mathbf{M}_{2s-1,s} \dot{\mathbf{v}}_{2s-1,s} \quad (4.48)$$

где је

$$\dot{\mathbf{v}}_{2s-1,s} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{2s-1,s} & \dot{y}_{2s-1,s} & \dot{z}_{2s-1,s} & \dot{\varphi}_{2s-1,s} & \dot{\psi}_{2s-1,s} & \dot{\theta}_{2s-1,s} \end{bmatrix}^T, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{M}_{2s-1,s} = \text{diag} (m_{2s-1,s}, m_{2s-1,s}, m_{2s-1,s}, J_{C_{2s-1,s} \xi_{2s-1,s}}, J_{C_{2s-1,s} \eta_{2s-1,s}}, J_{C_{2s-1,s} \zeta_{2s-1,s}}). \quad (4.50)$$

Кинетичка енергија сегмента ( $V_{2s,s}$ ) може се одредити на сличан начин као и за случај тела ( $V_{2s-2,s}$ ). Пошто је положај сегмента ( $V_{2s,s}$ ) описан апсолутним координатама тачке  $O'_{2s,s}$ , а не координатама тачке  $C_{2s,s}$ , може се успоставити веза између брзина ове две тачке на следећи начин:

$$\mathbf{V}_{C_{2s,s}}^{(0)} = \mathbf{V}_{O'_{2s,s}}^{(0)} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{2s,s}^{(0)} \overrightarrow{O'_{2s,s} C_{2s,s}}^{(2s)}, \quad (4.51)$$

односно,

$$\mathbf{V}_{C_{2s,s}}^{(0)} = \mathbf{V}_{O'_{2s,s}}^{(0)} - \widetilde{O'_{2s,s} C_{2s,s}}^{(2s)} \boldsymbol{\omega}_{2s,s}^{(0)}. \quad (4.52)$$

На основу израза (4.26), кинетичка енергија сегмента ( $V_{2s,s}$ ) се може изразити у матричном облику на следећи начин:

$$T_{2s,s} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}_{2s,s}^T \mathbf{M}_{2s,s} \dot{\mathbf{v}}_{2s,s} \quad (4.53)$$

где је

$$\dot{\mathbf{v}}_{2s,s} = \left[ \left( \mathbf{V}_{O'_{2s,s}}^{(0)} \right)^T \quad \left( \boldsymbol{\omega}_{2s,s}^{(0)} \right)^T \right]^T, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{M}_{2s,s} = \begin{bmatrix} m_{2s,s} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_{2s,s} \widetilde{O'_{2s,s} C_{2s,s}^{(2s)}} \\ m_{2s,s} \left( \widetilde{O'_{2s,s} C_{2s,s}^{(2s)}} \right)^T & \mathbf{J}_{C_{2s,s}} + m_{2s,s} \left( \widetilde{O'_{2s,s} C_{2s,s}^{(2s)}} \right)^T \widetilde{O'_{2s,s} C_{2s,s}^{(2s)}} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Ако је

$$\mathbf{V}_{O'_{2s,s}}^{(0)} = \left[ \begin{array}{ccc} \dot{\tilde{x}}_{2s,s} & \dot{y}_{2s,s} & \dot{z}_{2s,s} \end{array} \right]^T \quad (4.56)$$

и

$$\boldsymbol{\omega}_{2s,s}^{(0)} = \left[ \begin{array}{ccc} \dot{\varphi}_{2s,s} & \dot{\psi}_{2s,s} & \dot{\theta}_{2s,s} \end{array} \right]^T, \quad (4.57)$$

вектор  $\dot{\mathbf{v}}_{2s,s}$  се сада може представити у облику:

$$\dot{\mathbf{v}}_{2s,s} = \left[ \begin{array}{cccccc} \dot{\tilde{x}}_{2s,s} & \dot{y}_{2s,s} & \dot{z}_{2s,s} & \dot{\varphi}_{2s,s} & \dot{\psi}_{2s,s} & \dot{\theta}_{2s,s} \end{array} \right]^T. \quad (4.58)$$

Имајући у виду да је:

$$\overrightarrow{O'_{2s,s} C_{2s,s}^{(2s-2)}} = \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{l_{2s,s}}{2} & 0 & 0 \end{array} \right]^T \quad (4.59)$$

и коришћењем израза (4.27), матрица  $\mathbf{M}_{2s,s}$  се своди на следећи облик:

$$\mathbf{M}_{2s,s} = \begin{bmatrix} m_{2s,s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2s,s} & 0 & 0 & 0 & -m_{2s,s} \frac{l_{2s,s}}{2} \\ 0 & 0 & m_{2s,s} & 0 & m_{2s,s} \frac{l_{2s,s}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{C_{2s,s} \xi_{2s,s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s,s} \frac{l_{2s,s}}{2} & 0 & J_{C_{2s,s} \eta_{2s,s}} + m_{2s,s} \left( \frac{l_{2s,s}}{2} \right)^2 & 0 \\ 0 & -m_{2s,s} \frac{l_{2s,s}}{2} & 0 & 0 & 0 & J_{C_{2s,s} \zeta_{2s,s}} + m_{2s,s} \left( \frac{l_{2s,s}}{2} \right)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Пошто је одређена кинетичка енергија сваког од три крута сегмента, укупна кинетичка енергија система крутих сегмената приказаних на слици 4.1 се на основу израза (4.25) може записати у облику:

$$T_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}_s^T \mathbf{M}_s \dot{\mathbf{v}}_s. \quad (4.61)$$

Вектор првих извода апсолутних координата разматраног система крутих сегмената,  $\dot{\mathbf{v}}_s$ , може бити представљен у облику

$$\dot{\mathbf{v}}_s = \left[ \left( \dot{\mathbf{v}}_s^{(nz)} \right)^T \quad \left( \dot{\mathbf{v}}_s^{(z)} \right)^T \right]^T, \quad (4.62)$$

при чему је

$$\dot{\mathbf{v}}_s^{(nz)} = \left[ \dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s}^T \quad \dot{\mathbf{v}}_{2s,s}^T \right]^T \quad (4.63)$$

вектор првих извода независних координата, а

$$\dot{\mathbf{v}}_s^{(z)} \equiv \dot{\mathbf{v}}_{2s-1,s}^T \quad (4.64)$$

је вектор првих извода зависних координата.

Као што се може видети, узето је да независне координате представљају апсолутне координате којима је описан положај тела ( $V_{2s-2,s}$ ) и ( $V_{2s,s}$ ). Број независних координата је једнак броју степени слободе разматраног система. Такође, претпостављено је и да су координате тела ( $V_{2s-1,s}$ ) зависне.

Сагласно претходно изложеној подели координата на независне и зависне, матрица инерције  $\mathbf{M}_s$ , приказана у претходном изразу, се може представити као:

$$\mathbf{M}_s = \text{diag} \left( \mathbf{M}_s^{(nz)}, \mathbf{M}_s^{(z)} \right) \quad (4.65)$$

где је  $\mathbf{M}_s^{(nz)} = \text{diag} \left( \mathbf{M}_{2s-2,s}, \mathbf{M}_{2s,s} \right)$ , и  $\mathbf{M}_s^{(z)} \equiv \mathbf{M}_{2s-1,s}$ .

### 4.2.3 Потенцијална енергија дискретизованог еластичног штапа

Потенцијална енергија система крутих сегмената приказаних на слици 4.1 услед опруга које су постављене у зглобовима је:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \mathbf{w}_s^T \mathbf{K} \mathbf{r}_s \mathbf{w}_s \quad (4.66)$$

где је

$$\mathbf{w}_s = \begin{bmatrix} q_{6s-5} & q_{6s-4} & q_{6s-3} & q_{6s-2} & q_{6s-1} & q_{6s} \end{bmatrix}^T \quad (4.67)$$

вектор релативних померања у зглобовима и

$$\mathbf{K}\mathbf{r}_s = \text{diag}(c_{6s-5}, c_{6s-4}, c_{6s-3}, c_{6s-2}, c_{6s-1}, c_{6s}) \quad (4.68)$$

представља матрицу крутости при коришћењу уведених релативних померања у изразу (4.66).

Пошто је циљ да се положај крутих сегмената опише апсолутним координатама потребно је да се релативне координате вектора  $\mathbf{w}_s$  изразе у функцији апсолутних координата крутих сегмената. Анализирајући зглобни елемент који повезује круте сегменте  $(V_{2s-2,s})$  и  $(V_{2s-1,s})$ , може се успоставити следећа векторска релација:

$$\mathbf{r}_{2s-2,s}^{(0)} + \overrightarrow{O_{2s-2}O'_{2s-2,s}}^{(0)} + \mathbf{u}_s^{(0)} + \overrightarrow{O_{2s-1}C_{2s-1,s}}^{(0)} = \mathbf{r}_{2s-1}^{(0)} \quad (4.69)$$

односно,

$$\mathbf{r}_{2s-2,s}^{(2s-2)} + \mathbf{R}_{0,2s-2} \overrightarrow{O_{2s-2}O'_{2s-2,s}}^{(2s-2)} + \mathbf{R}_{0,2s-2} \mathbf{u}_s^{(2s-2)} + \mathbf{R}_{0,2s-1} \overrightarrow{O_{2s-1}C_{2s-1,s}}^{(2s-1)} = \mathbf{r}_{2s-1}^{(0)} \quad (4.70)$$

где је

$$\overrightarrow{O_{2s-2}O'_{2s-2,s}}^{(2s-2)} = \begin{bmatrix} l_{2s-s,s} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.71)$$

$$\overrightarrow{O_{2s-1}C_{2s-1,s}}^{(2s-1)} = \begin{bmatrix} \frac{l_{2s-1,s}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.72)$$

и где

$$\mathbf{u}_s^{(2s-2)} = \begin{bmatrix} q_{6s-5} & q_{6s-4} & q_{6s-3} \end{bmatrix}^T \quad (4.73)$$

представља вектор релативних трансляторних померања у зглобном елементу који повезује круте сегменте  $(V_{2s-2,s})$  и  $(V_{2s-1,s})$ .

Из израза (4.70) произилази да је:

$$\mathbf{u}_s^{(2s-2)} = \mathbf{R}_{0,2s-2}^{-1} \left( -\mathbf{r}_{2s-2,s}^{(2s-2)} - \mathbf{R}_{0,2s-2} \overrightarrow{O_{2s-2}O'_{2s-2,s}}^{(2s-2)} - \mathbf{R}_{0,2s-1} \overrightarrow{O_{2s-1}C_{2s-1,s}}^{(2s-1)} + \mathbf{r}_{2s-1}^{(0)} \right). \quad (4.74)$$

Ако се узме у обзир претпоставка о малим деформацијама штапа и занемаре чланови другог и вишег реда, уврштавање израза (4.5), (4.12) и (4.17) у претходни израз даје:

$$\mathbf{u}_s^{(2s-2)} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x}_{2s-1,s} - \tilde{x}_{2s-2,s} \\ y_{2s-1,s} - y_{2s-2,s} - l_{2s-2,s}\theta_{2s-2,s} - \overline{O_{2s-1}C_{2s-1,s}}\theta_{2s-1,s} \\ z_{2s-1,s} - z_{2s-2,s} + l_{2s-2,s}\psi_{2s-2,s} + \overline{O_{2s-1}C_{2s-1,s}}\psi_{2s-1,s} \end{array} \right\}. \quad (4.75)$$

Поред релативних транслација описаних у претходном изразу, зглобни елемент који повезује круте сегменте  $(V_{2s-2,s})$  и  $(V_{2s-1,s})$  допушта и релативну ротацију између ова два сегмента око осе  $\xi_{2s-2,s}$  за угао  $q_{6s-2}$  који може бити представљен као:

$$q_{6s-2} = \varphi_{2s-1,s} - \varphi_{2s-2,s}. \quad (4.76)$$

Такође, зглобни елемент који повезује круте сегменте  $(V_{2s-1,s})$  и  $(V_{2s,s})$  допушта две релативне ротације око оса  $\eta_{2s-1,s}$  и  $\zeta_{2s-1,s}$  за углове  $q_{6s-1}$  и  $q_{6s}$ , респективно, при чему важи да је:

$$q_{6s-1} = \psi_{2s,s} - \psi_{2s-1,s}. \quad (4.77)$$

На основу овога, вектор релативних координата се може представити као:

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{P}_{r,a} \mathbf{v}_s \quad (4.78)$$

где је

$$\mathbf{P}_{r,a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -l_{2s-2,s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & l_{2s-2,s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{O_{2s-1}C_{2s-1,s}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \overline{O_{2s-1}C_{2s-1,s}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

матрица трансформације апсолутних координата у релативне координате,

$$\mathbf{v}_s = \left[ \left( \mathbf{v}_s^{(nz)} \right)^T \quad \left( \mathbf{v}_s^{(z)} \right)^T \right]^T \quad (4.80)$$

представља вектор апсолутних координата, при чему је

$$\mathbf{v}_s^{(nz)} = \left[ \mathbf{v}_{2s-2,s}^T \quad \mathbf{v}_{2s,s}^T \right]^T \quad (4.81)$$

вектор независних координата, и

$$\mathbf{v}_s^{(z)} = \mathbf{v}_{2s-1,s}^T \quad (4.82)$$

је вектор зависних координата.

На основу израза (4.66) и (4.78) потенцијална енергија дефинисана изразом (4.66) може се изразити у функцији апсолутних координата крутих сегмената на следећи начин:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \mathbf{v}_s^T \mathbf{P}_{r,a}^T \mathbf{K}_{r,s} \mathbf{P}_{r,a} \mathbf{v}_s, \quad (4.83)$$

односно,

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \mathbf{v}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{v}_s \quad (4.84)$$

где је

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{P}_{r,a}^T \mathbf{K}_{r,s} \mathbf{P}_{r,a}. \quad (4.85)$$

Уврштавањем израза (4.68) и (4.79) у претходни израз, добија се да је:

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s^{(nz)} & \mathbf{K}_s^{(z,nz)} \\ \mathbf{K}_s^{(nz,z)} & \mathbf{K}_s^{(z)} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

где је

$$\mathbf{K}_s^{(nz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11,s}^{(nz)} & \mathbf{K}_{12,s}^{(nz)} \\ \mathbf{K}_{21,s}^{(nz)} & \mathbf{K}_{22,s}^{(nz)} \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

$$\mathbf{K}_{11,s}^{(nz)} = \begin{bmatrix} c_{6s-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{6s-4} & 0 & 0 & 0 & c_{6s-4} l_{2s-2,s} \\ 0 & 0 & c_{6s-3} & 0 & -c_{6s-3} l_{2s-s,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{6i-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{6s-3} l_{2s-2,s} & 0 & c_{6s-3} l_{2s-2,s}^2 & 0 \\ 0 & c_{6s-4} l_{2s-2,s} & 0 & 0 & 0 & c_{6s-4} l_{2s-2,s}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$





$$\mathbf{K}_s^{(z)} = \begin{bmatrix} c_{6s-5} & 0 & 0 \\ 0 & c_{6s-4} & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s-3} \overline{O_{2s-1} C}_{2s-1,s} \\ 0 & -c_{6s-4} \overline{O_{2s-1} C}_{2s-1,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{6s-4} \overline{O_{2s-1} C}_{2s-1,s} \\ 0 & c_{6s-3} \overline{O_{2s-1} C}_{2s-1,s} & 0 \\ c_{6s-2} & 0 & 0 \\ 0 & c_{6s-1} + c_{6s-3} \overline{O_{2s-1} C}_{2s-1,s}^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s} + c_{6s-4} \overline{O_{2s-1} C}_{2s-1,s}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

#### 4.2.4 Генералисане силе

Рад притисних сила  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}'$  на виртуалном померању система крутих сегмената приказаних на слици 4.1 гласи [61]:

$$\delta A = (\mathbf{P}^{(0)})^T \delta \mathbf{r}_{2s-2,s}^{(0)} + (\mathbf{P}'^{(0)})^T \delta \mathbf{r}_{2s,s}^{(0)} \quad (4.93)$$

при чему важи да је

$$\mathbf{P}^{(0)} = -\mathbf{P}'^{(0)} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.94)$$

где  $P$  представља интензитет притисних сила, а  $\delta \mathbf{r}_{2s-2,s}^{(0)}$  и  $\delta \mathbf{r}_{2s,s}^{(0)}$  су варијације вектора положаја тачака  $O_{2s-s,2}$  и  $O'_{2s,2}$ , респективно.

Варијација вектора положаја тачке  $O'_{2s,2}$  може се одредити у односу на варијацију вектора положаја тачке  $O_{2s-s,2}$  коришћењем следећег израза:

$$\delta \mathbf{r}_{2s,s}^{(0)} = \delta \mathbf{r}_{2s-2,s}^{(0)} + \delta \overline{O_{2s-2} O'_{2s-2,s}}^{(0)} + \delta \mathbf{u}_s^{(0)} + \delta \overline{O_{2s-1} O'_{2s-1,s}}^{(0)} + \delta \overline{O_{2s} O'_{2s,s}}^{(0)}. \quad (4.95)$$

Ако уврстимо изразе (4.94) и (4.95) у израз (4.93), рад на виртуалном померању

добија следећи облик:

$$\delta A = \left( \mathbf{P}'^{(0)} \right)^T \left( \delta \overline{O_{2s-2}} \dot{O}'_{2s-2,s} + \delta \overline{O_{2s-1}} \dot{O}'_{2s-1,s} + \delta \overline{O_{2s}} \dot{O}'_{2s,s} \right) + \left( \mathbf{P}^{(0)} \right)^T \delta \mathbf{u}_s^{(0)}. \quad (4.96)$$

У даљој анализи занемарићемо производ  $\left( \mathbf{P}^{(0)} \right)^T \delta \mathbf{u}_s^{(0)}$  у изразу (4.96). Истакнимо да, имајући у виду структуру вектора притисне силе дату у изразом (4.94), у производу  $\left( \mathbf{P}^{(0)} \right)^T \delta \mathbf{u}_s^{(0)}$  би се користила само аксијална компонента вектора  $\mathbf{u}_s^{(0)}$ . Међутим, уобичајено је да се у линеарној теорији извијања занемарују аксијалне деформације еластичног штапа. При дејству аксијалних притисних сила аксијалне деформације настају непосредно пре појаве извијања штапа и у случају Ојлер-Бернулијевог модела у незнатној мери утичу на повећање вредности критичне силе извијања (за више детаља видети [62–64]).

Ако за дефинисање оријентације локалних вектора искористимо тачну матрицу трансформације координата  $\mathbf{R}_{0,k}$ , ( $k = (2s - 2, s), (2s - 1, s), (2s, s)$ ), дефинисану изразом (4.10), рад на виртуалном померању се може изразити као:

$$\begin{aligned} \delta A = & -P \left( l_{2s-2,s} \left( -S\theta_{2s-2,s} C\psi_{2s-2,s} \delta\theta_{2s-2,s} - C\theta_{2s-2,s} S\psi_{2s-2,s} \delta\psi_{2s-2,s} \right) \right. \\ & + l_{2s-1,s} \left( -S\theta_{2s-1,s} C\psi_{2s-1,s} \delta\theta_{2s-1,s} - C\theta_{2s-1,s} S\psi_{2s-1,s} \delta\psi_{2s-1,s} \right) \\ & \left. + l_{2s,s} \left( -S\theta_{2s,s} C\psi_{2s,s} \delta\theta_{2s,s} - C\theta_{2s,s} S\psi_{2s,s} \delta\psi_{2s,s} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.97)$$

односно, након примене претпоставке о малим деформацијама (4.11):

$$\begin{aligned} \delta A = & -P \left( l_{2s-2,s} \left( -\theta_{2s-2,s} \delta\theta_{2s-2,s} - \psi_{2s-2,s} \delta\psi_{2s-2,s} \right) \right. \\ & + l_{2s-1,s} \left( -\theta_{2s-1,s} \delta\theta_{2s-1,s} - \psi_{2s-1,s} \delta\psi_{2s-1,s} \right) \\ & \left. + l_{2s,s} \left( -\theta_{2s,s} \delta\theta_{2s,s} - \psi_{2s,s} \delta\psi_{2s,s} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.98)$$

На основу спроведене поделе координата на зависне и независне у изразима (4.80)–(4.82), из претходног израза можемо одредити вектор генералисаних сила који одговара овим координатама у облику:

$$\mathbf{Q}_s = \left[ \left( \mathbf{Q}_s^{(nz)} \right)^T \quad \left( \mathbf{Q}_s^{(z)} \right)^T \right]^T \quad (4.99)$$

где је

$$(\mathbf{Q}_s^{(nz)})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{2s-2,s}^T & \mathbf{Q}_{2s,s}^T \end{bmatrix}, \quad (4.100)$$

$$(\mathbf{Q}_s^{(z)})^T = \mathbf{Q}_{2s-1,s}^T \quad (4.101)$$

и где важи да је:

$$\mathbf{Q}_k^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Pl_k\psi_k & Pl_k\theta_k \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

Приметимо да вектор генералисаних сила зависи од компонената вектора положаја. Из тог разлога вектор генералисаних сила можемо записати у облику:

$$\mathbf{Q}_s = P \cdot \mathbf{S}_s \mathbf{v}_s \quad (4.103)$$

где је

$$\mathbf{S}_s = \text{diag}(\mathbf{S}_s^{(nz)}, \mathbf{S}_s^{(z)}), \quad (4.104)$$

$$\mathbf{S}_s^{(nz)} = \text{diag}(0, 0, 0, 0, l_{2s-2,s}, l_{2s-2,s}, 0, 0, 0, 0, l_{2s,s}, l_{2s,s}) \quad (4.105)$$

и

$$\mathbf{S}_s^{(z)} = \text{diag}(0, 0, 0, 0, l_{2s-1,s}, l_{2s-1,s}). \quad (4.106)$$

#### 4.2.5 Диференцијалне једначине кретања дискретизованог еластичног штапа

Диференцијалне једначине кретања разматраног дискретизованог еластичног штапа извешћемо коришћењем Лагранжевих једначина са множитељима веза (видети [65]) као што следи:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{v}}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{v}_s + \Phi_{\mathbf{v}_s}^T \boldsymbol{\lambda} = P \cdot \mathbf{S}_s \mathbf{v}_s, \quad (4.107)$$

односно,

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{v}}_s + (\mathbf{K}_s - P \cdot \mathbf{S}_s) \mathbf{v}_s + \Phi_{\mathbf{v}_s}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}_{18 \times 1}, \quad (4.108)$$

где је  $\Phi_{\mathbf{v}_s}$  Јакобијева матрица која одговара вектору једначина веза  $\Phi$  описаног изразом (4.24) и где  $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{bmatrix}^T$  представља вектор множитеља

веза. Ако посматрамо систем једначина (4.107) може се уочити да постоји двадесет четири непознате тј. осамнаест непознатих координата садржаних у вектору  $\mathbf{v}_s$  и шест непознатих множитеља веза у вектору  $\boldsymbol{\lambda}$ . Пошто систем једначина (4.107) садржи осамнаест једначина, потребно је обезбедити додатних шест једначина. То се постиже диференцирањем вектора једначина веза (4.24), као што следи:

$$\Phi_{\mathbf{v}_s} \dot{\mathbf{v}}_s = \mathbf{0}_{6 \times 1}. \quad (4.109)$$

Сада имамо на располагању потпун систем диференцијалних једначина при чему се број непознатих величина и број једначина поклапају. Међутим, циљ у овом поглављу није да се одреди вектор множитеља веза  $\boldsymbol{\lambda}$ . Из тог разлога ћемо применити неку од метода елиминације множитеља веза. На тај начин се не само елиминише вектор множитеља веза, већ се уједно и читав систем диференцијалних једначина (4.107) и (4.109) трансформише у облик у коме фигурише само вектор независних координата  $\mathbf{v}_s^{(nz)}$ . Тиме се број једначина смањује и једнак је броју степени слободе разматраног система.

У складу са методом елиминације множитеља веза приказаним у референци [65], најпре ћемо Јакобијеву матрицу представити на следећи начин:

$$\Phi_{\mathbf{v}_s} = \left[ \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \quad | \quad \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right] \quad (4.110)$$

где је

$$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{2s-2,s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \tilde{x}_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial y_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial z_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \psi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_{2s-2,s}} \\ \\ \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_{2s,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{2s,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{2s,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{2s,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{2s,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi_{2s,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{2s,s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \tilde{x}_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial y_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial z_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \psi_{2s-2,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_{2s-2,s}} \end{array} \right] \in R^{12 \times 6} \quad (4.111)$$

део Јакобијеве матрице који одговара вектору независних координата  $\mathbf{v}_s^{(nz)}$  и

$$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{2s-1,s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \tilde{x}_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial y_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial z_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \psi_{2s-1,s}} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_{2s-1,s}} \end{array} \right] \in R^{6 \times 6} \quad (4.112)$$

представља део Јакобијеве матрице који одговара вектору зависних координата  $\mathbf{v}_s^{(z)}$ .

На основу израза (4.24), претходна два израза постају:

$$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & l_{2s,s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -l_{2s,s} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

и

$$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_{2s-1,s}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{l_{2s-1,s}}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.114)$$

Уврштавањем израза (4.62) и (4.110) у израз (4.109) добија се да је:

$$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \dot{\mathbf{v}}_s^{(nz)} + \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \dot{\mathbf{v}}_s^{(z)} = \mathbf{0}_{6 \times 1}. \quad (4.115)$$

Из претходног израза вектор првих извода зависних координата се може изразити на следећи начин:

$$\dot{\mathbf{v}}_s^{(z)} = - \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \dot{\mathbf{v}}_s^{(nz)}. \quad (4.116)$$

Вектор првих извода апсолутних координата се сада може записати у облику:

$$\dot{\mathbf{v}}_s = \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \dot{\mathbf{v}}_s^{(nz)} \quad (4.117)$$

где је

$$\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{12 \times 12} \\ - \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

Пошто је матрица  $\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)}$  константна, везе су склерономне и важи да је  $\mathbf{v}_s(t=0) = \mathbf{0}_{18 \times 1}$  и  $\mathbf{v}_s^{(nz)}(t=0) = \mathbf{0}_{12 \times 1}$ , интеграцијом једначине (4.117) добија се да је:

$$\mathbf{v}_s = \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \mathbf{v}_s^{(nz)}, \quad (4.119)$$

односно, након диференцирања израза (4.117):

$$\ddot{\mathbf{v}}_s = \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \ddot{\mathbf{v}}_s^{(nz)}. \quad (4.120)$$

Ако у израз (4.107) заменимо претходна два израза добија се да је:

$$\mathbf{M}_s \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \ddot{\mathbf{v}}_s^{(nz)} + (\mathbf{K}_s - P \cdot \mathbf{S}_s) \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \mathbf{v}_s^{(nz)} + \Phi_{\mathbf{v}_s}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}_{18 \times 1}. \quad (4.121)$$

Множењем претходног израза са леве стране матрицом  $(\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T$  добија се:

$$\begin{aligned} (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T \mathbf{M}_s \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \ddot{\mathbf{v}}_s^{(nz)} + (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T (\mathbf{K}_s - P \cdot \mathbf{S}_s) \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \mathbf{v}_s^{(nz)} \\ + (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T \Phi_{\mathbf{v}_s}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}_{18 \times 1}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Имајући у виду да је  $(\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T \Phi_{\mathbf{v}_s}^T = \mathbf{0}_{12 \times 6}$  (видети референцу [65]), претходни израз добија облик:

$$\mathbf{M}_s^* \ddot{\mathbf{v}}_s^{(nz)} + (\mathbf{K}_s^* - P \cdot \mathbf{S}_s^*) \mathbf{v}_s^{(nz)} = \mathbf{0}_{12 \times 1} \quad (4.123)$$

где је

$$\mathbf{M}_s^* = (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T \mathbf{M}_s \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)}, \quad (4.124)$$

$$\mathbf{K}_s^* = (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T \mathbf{K}_s \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)} \quad (4.125)$$

и

$$\mathbf{S}_s^* = (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)})^T \mathbf{S}_s \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z,nz)}. \quad (4.126)$$

Развијајући даље израз (4.124), на основу израза (4.65) и (4.118) добија се да је:

$$\mathbf{M}_s^* = \mathbf{M}_s^{(nz)} + \left[ (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} )^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \right]^T \mathbf{M}_s^{(z)} (\Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} )^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)}, \quad (4.127)$$

односно, ако се узму у обзир изрази (4.43), (4.50), (4.60), (4.113) и (4.114), важи да је:

$$\mathbf{M}_s^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11,s}^* & \mathbf{M}_{12,s}^* \\ \mathbf{M}_{21,s}^* & \mathbf{M}_{22,s}^* \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

где је

$$\mathbf{M}_{11,s}^* = \begin{bmatrix} m_{2s-2,s} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2s-2,s} & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s-2,s} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} \\ 0 & m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} \\ 0 & -m_{2s-2,s} \frac{l_{2s-2,s}}{2} & 0 \\ J_{C_{2s-2,s}\xi_{2s-2,s}} & 0 & 0 \\ & J_{C_{2s-2,s}\eta_{2s-2,s}} & \\ & + J_{C_{2s-1,s}\eta_{2s-1,s}} & \\ 0 & + m_{2s-2,s} \left( \frac{l_{2s-2,s}}{2} \right)^2 & 0 \\ & + m_{2s-1,s} \left( \frac{l_{2s-1,s}}{2} \right)^2 & \\ 0 & 0 & J_{C_{2s-2,s}\zeta_{2s-2,s}} \\ & & + J_{C_{2s-1,s}\zeta_{2s-1,s}} \\ & & + m_{2s-2,s} \left( \frac{l_{2s-2,s}}{2} \right)^2 \\ & & + m_{2s-1,s} \left( \frac{l_{2s-1,s}}{2} \right)^2 \end{bmatrix}, \quad (4.129)$$

$$\mathbf{M}_{12,s}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s-1,s} \frac{l_{2s-1,s}}{2} & 0 & m_{2s-1,s} \frac{l_{2s-1,s}}{2} l_{2s,s} & 0 \\ 0 & -m_{2s-1,s} \frac{l_{2s-1,s}}{2} & 0 & 0 & 0 & m_{2s-1,s} \frac{l_{2s-1,s}}{2} l_{2s,s} \end{bmatrix}, \quad (4.130)$$

$$\mathbf{M}_{21,s}^* = (\mathbf{M}_{12,s}^*)^T \quad (4.131)$$



и

$$\mathbf{M}_{22,s}^* = \begin{bmatrix} m_{2s,s} + m_{2s-1,s} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2s,s} + m_{2s-1,s} & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s,s} + m_{2s-1,s} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{2s-1,s}l_{2s,s} + m_{2s,s}\frac{l_{2s,s}}{2} \\ 0 & -m_{2s-1,s}l_{2s,s} - m_{2s,s}\frac{l_{2s,s}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{2s-1,s}l_{2s,s} - m_{2s,s}\frac{l_{2s,s}}{2} \\ 0 & m_{2s-1,s}l_{2s,s} + m_{2s,s}\frac{l_{2s,s}}{2} & 0 \\ J_{C_{2s-1,s}\xi_{2s-1,s}} + J_{C_{2s,s}\xi_{2s,s}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{C_{2s,s}\eta_{2s,s}} + m_{2s-1,s}l_{2s,s}^2 \\ & + m_{2s,s}\left(\frac{l_{2s,s}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{C_{2s,s}\zeta_{2s-1,s}} + m_{2s-1,s}l_{2s,s}^2 \\ & & + m_{2s,s}\left(\frac{l_{2s,s}}{2}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.132)$$

Слично као и код матрице инерције, развијајући даље израз за матрицу крутости (4.125), на основу израза (4.86) и (4.118) добија се:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s^* &= \mathbf{K}_s^{(nz)} - \mathbf{K}_s^{(z,nz)} \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} - \left[ \mathbf{K}_s^{(z,nz)} \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \right]^T \\ &+ \left[ \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \right]^T \mathbf{K}_s^{(z)} \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Заменом израза (4.87-4.92), (4.113) и (4.114) у претходни израз следи да је:

$$\mathbf{K}_s^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11,s}^* & \mathbf{K}_{12,s}^* \\ \mathbf{K}_{21,s}^* & \mathbf{K}_{22,s}^* \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

где је

$$\mathbf{K}_{11,s}^* = \begin{bmatrix} c_{6s-5} & 0 & 0 \\ 0 & c_{6s-4} & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{6s-3}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) \\ 0 & c_{6s-4}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s-4}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) \\ 0 & -c_{6s-3}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) & 0 \\ c_{6s-2} & 0 & 0 \\ 0 & c_{6s-1} + c_{6s-3}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s})^2 & 0 \\ 0 & -P(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s} + c_{6s-4}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s})^2 \\ & & -P(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) \end{bmatrix}, \quad (4.135)$$

$$\mathbf{K}_{12,s}^* = (\mathbf{K}_{21,s}^*)^T = \begin{bmatrix} -c_{6s-5} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{6s-4} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{6s-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s-3}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) \\ 0 & -c_{6s-4}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s-4}l_{2s,s} \\ 0 & -c_{6s-3}l_{2s,s} & 0 \\ -c_{6s-2} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{6s-1} + c_{6s-3}l_{2s,s}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) & 0 \\ 0 & 0 & -c_{6s} + c_{6s-4}l_{2s,s}(l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}) \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

и

$$\mathbf{K}_{22,s}^* = \begin{bmatrix} c_{6s-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{6s-4} & 0 & 0 & 0 & -c_{6s-4}l_{2s,s} \\ 0 & 0 & c_{6s-3} & 0 & c_{6s-3}l_{2s,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{6s-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{6s-3}l_{2s,s} & 0 & c_{6s-1} + c_{6s-3}l_{2s,s}^2 & 0 \\ 0 & -c_{6s-4}l_{2s,s} & 0 & 0 & -Pl_{2s,s} & c_{6s} + c_{6s-4}l_{2s,s}^2 \\ & & & & & -Pl_{2s,s} \end{bmatrix}. \quad (4.137)$$

Коначно, развијајући израз (4.126), на основу израза (4.104) и (4.118) важи да је:

$$\mathbf{S}_s^* = \mathbf{S}_s^{(nz)} + \left[ \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)} \right]^T \mathbf{S}_s^{(z)} \left( \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(z)} \right)^{-1} \Phi_{\mathbf{v}_s}^{(nz)}. \quad (4.138)$$

Заменом израза (4.105), (4.106), (4.113) и (4.114) у претходни израз добија се да је:

$$\mathbf{S}_s^* = \text{diag} \left( \mathbf{S}_{11,s}^*, \mathbf{S}_{22,s}^* \right) \quad (4.139)$$

где је:

$$\mathbf{S}_{11,s}^* = \text{diag} \left( 0, 0, 0, 0, l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s}, l_{2s-2,s} + l_{2s-1,s} \right) \quad (4.140)$$

и

$$\mathbf{S}_{22,s}^* = \text{diag} \left( 0, 0, 0, 0, l_{2s,s}, l_{2s,s} \right). \quad (4.141)$$

Једначина (4.123) представља диференцијалне једначине кретања разматраног система крутих сегмената по независним координатама. При томе, матрице  $\mathbf{M}_s^*$ ,  $\mathbf{K}_s^*$  и  $\mathbf{S}_s^*$  су детаљно описане изразима (4.124) - (4.141).

### 4.3 Диференцијалне једначине кретања дискретизованог нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека

#### 4.3.1 Кинетичка енергија дискретизованог еластичног штапа

Кинетичка енергија дискретизованог нехомогеног еластичног штапа променљивог пресека може се одредити као збир кинетичких енергија сваког од  $n \cdot k$  дискретизованих еластичних штапова (видети слике 3.6 и 4.1), односно:

$$T = \sum_{s=1}^{n \cdot k} T_s \quad (4.142)$$

где је  $T_s$  кинетичка енергија  $s$ -тог дискретизованог еластичног сегмента, која се на основу израза (4.128) може изразити у функцији независних координата на следећи начин:

$$T_s = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{v}}_s^{(nz)})^T \mathbf{M}_s^* \dot{\mathbf{v}}_s^{(nz)}. \quad (4.143)$$

Даљим развијањем претходног израза, уз коришћење израза (4.128) и (4.63), добија се да је:

$$T_s = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s} \\ \dot{\mathbf{v}}_{2s,s} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11,s}^* & \mathbf{M}_{12,s}^* \\ \mathbf{M}_{21,s}^* & \mathbf{M}_{22,s}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{2s-2,s} \\ \dot{\mathbf{v}}_{2s,s} \end{Bmatrix}. \quad (4.144)$$

На сличан начин као у претходном поглављу, дискретизовани модел нехомогеног еластичног штапа променљивог пресека добија се међусобним крутим спајањем дискретизованих модела сваког од  $n \cdot k$  еластичних сегмената. Као последица оваквог спајања крутих сегмената, у сваком тренутку важи да је:

$$\mathbf{v}_{2s-2,s-1} \equiv \mathbf{v}_{2s-2,s}, \quad \mathbf{v}_{2s,s} \equiv \mathbf{v}_{2s,s+1} \quad (4.145)$$

па ћемо због лакшег означавања у наставку писати да је

$$\mathbf{v}_{2s-2,s-1} \equiv \mathbf{v}_{2s-2,s} \equiv \mathbf{v}_{2s-2}, \quad \mathbf{v}_{2s,s} \equiv \mathbf{v}_{2s,s+1} \equiv \mathbf{v}_{2s}. \quad (4.146)$$

Ако узмемо у обзир претходни израз, као и изразе (4.142) и (4.144), кинетичка енергија разматраног дискретизованог модела еластичног штапа може се записати у облику:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{v}}^{(nz)})^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{v}}^{(nz)} \quad (4.147)$$

где је

$$\dot{\mathbf{v}}^{(nz)} = \left[ \dot{\mathbf{v}}_0^T \quad \dot{\mathbf{v}}_2^T \quad \dots \quad \dot{\mathbf{v}}_{2s-2}^T \quad \dot{\mathbf{v}}_{2s}^T \quad \dots \quad \dot{\mathbf{v}}_{2kn-2}^T \quad \dot{\mathbf{v}}_{2kn}^T \right]^T \quad (4.148)$$

вектор првих извода независних координата и

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11,1}^* & \mathbf{M}_{12,1}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21,1}^* & \mathbf{M}_{22,1}^* + \mathbf{M}_{11,2}^* & \mathbf{M}_{12,2}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{21,s-1}^* & \mathbf{M}_{22,s-1}^* + \mathbf{M}_{11,s}^* \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{M}_{12,s}^* & \mathbf{0} & \vdots & \\ \ddots & \vdots & \mathbf{0} & \\ \mathbf{M}_{21,kn-1}^* & \mathbf{M}_{22,kn-1}^* + \mathbf{M}_{11,kn}^* & \mathbf{M}_{12,kn}^* & \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{21,kn}^* & \mathbf{M}_{22,kn}^* & \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

представља облик матрице инерције при коришћењу претходно дефинисаног вектора.

### 4.3.2 Потенцијална енергија дискретизованог еластичног штапа

Потенцијална енергија разматраног дискретизованог еластичног штапа може се одредити као збир потенцијалних енергија сваког од  $n \cdot k$  дискретизованих еластичних

штапова (видети слике 3.6 и 4.1) :

$$\Pi = \sum_{s=1}^{n-k} \Pi_s \quad (4.150)$$

при чему се на основу израза (4.123)  $\Pi_s$  може изразити у функцији вектора независних координата као:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^{(nz)})^T (\mathbf{K}_s^* - P \cdot \mathbf{S}_s^*) \mathbf{v}^{(nz)}, \quad (4.151)$$

односно,

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{2s-2,s} \\ \mathbf{v}_{2s,s} \end{Bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11,s}^* & \mathbf{K}_{12,s}^* \\ \mathbf{K}_{21,s}^* & \mathbf{K}_{22,s}^* \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11,s}^* & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{S}_{22,s}^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{2s-2,s} \\ \mathbf{v}_{2s,s} \end{Bmatrix}. \quad (4.152)$$

Уврштавањем израза (4.152) у израз (4.150) и уз коришћење претпоставке (4.146) добија се да је укупна потенцијална енергија дискретизованог еластичног штапа:

$$\Pi = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^{(nz)})^T (\mathbf{K}^* - P\mathbf{S}^*) \mathbf{v}^{(nz)} \quad (4.153)$$

где је

$$\mathbf{v}^{(nz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^T & \mathbf{v}_2^T & \dots & \mathbf{v}_{2s-2}^T & \mathbf{v}_{2s}^T & \dots & \mathbf{v}_{2kn-2}^T & \mathbf{v}_{2kn}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.154)$$

вектор независних координата,

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11,1}^* & \mathbf{K}_{12,1}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21,1}^* & \mathbf{K}_{22,1}^* + \mathbf{K}_{11,2}^* & \mathbf{K}_{12,2}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21,s-1}^* & \mathbf{K}_{22,s-1}^* + \mathbf{K}_{11,s}^* \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{K}_{12,s}^* & \mathbf{0} & \vdots & \vdots \\ \ddots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{K}_{21,kn-1}^* & \mathbf{K}_{22,kn-1}^* + \mathbf{K}_{11,kn}^* & \mathbf{K}_{12,kn}^* & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21,kn}^* & \mathbf{K}_{22,kn}^* & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

матрица крутости и

$$\mathbf{S}^* = \text{diag} (\mathbf{S}_{11,1}^*, \mathbf{S}_{22,1}^* + \mathbf{S}_{11,2}^*, \dots, \mathbf{S}_{22,s-1}^* + \mathbf{S}_{11,s}^*, \dots, \mathbf{S}_{22,kn-1}^* + \mathbf{S}_{11,kn}^*, \mathbf{S}_{22,kn}^*) \quad (4.156)$$

матрица којом је узет у обзир утицај аксијалне притисне силе  $P$  на потенцијалну енергију дискретизованог еластичног штапа.

### 4.3.3 Диференцијалне једначине кретања дискретизованог еластичног штапа

На основу претходних разматрања, диференцијалне једначине кретања разматраног дискретизованог еластичног штапа по независним координатама могу се добити коришћењем Лагранжевих једначина друге врсте (видети [61]) као што следи:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{v}}^{(nz)}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}^{(nz)}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}^{(nz)}} + \mathbf{Q}_{\mathbf{v}^{(nz)}} \quad (4.157)$$

при чему је  $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}^{(nz)}}$  вектор генералисаних сила. С обзиром да је утицај силе Земљине теже занемарен, важи да је  $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}^{(nz)}} = \mathbf{0}_{6kn \times 1}$ .

На основу израза (4.147) и (4.151), матрични израз (4.157) у развијеном облику гласи:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{v}}^{(nz)} + (\mathbf{K}^* - \mathbf{P}\mathbf{S}^*) \mathbf{v}^{(nz)} = \mathbf{0}_{6(kn+1) \times 1} \quad (4.158)$$

где су матрице  $\mathbf{M}^*$ ,  $\mathbf{K}^*$  и  $\mathbf{S}^*$  дефинисане изразима (4.149), (4.155) и (4.156), респективно, а  $\ddot{\mathbf{v}}^{(nz)}$  представља други извод вектора независних координата разматраног система крутих сегмената дефинисан изразом (4.154).

Коначно, израз (4.158) представља диференцијалне једначине кретања по независним координатама дискретизованог нехомогеног еластичног штапа променљивог пресека оптерећеног аксијалним притисним силама на својим слободним крајевима записане у матричном облику.

## 5 СЛОБОДНЕ НЕПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ НЕХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

### 5.1 Уводна разматрања

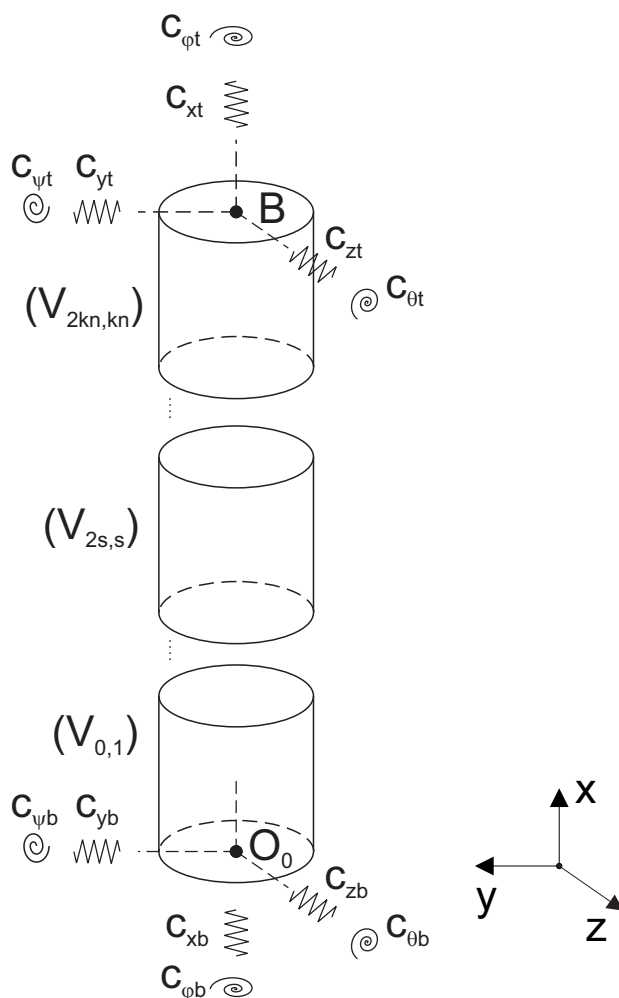
У овом поглављу биће разматране слободне непригушене осцилације нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека при дејству аксијалних притисних сила константног интензитета  $P$  на крајевима штапа. Најпре ће, на основу већ дефинисаних диференцијалних једначина кретања у претходном поглављу, бити формирана фреквентна једначина. Анализом ове једначине могуће је одредити кружне фреквенције слободних непригушених осцилација штапа као и главне облике осциловања. Такође, из формиране фреквентне једначине је могуће разматрати услове који доводе до извијања штапа, односно могуће је одредити вредност критичне силе извијања.

За пројектовање техничких објеката од највећег значаја су прве три кружне фреквенције и њима одговарајући главни облици осциловања. Из тог разлога ће и анализа осциловања еластичног штапа која следи у наставку бити ограничена на прве три кружне фреквенције. Најпре ће бити анализирани просторне осцилације еластичног штапа, а затим и различити специјални случајеви, као што су попречне осцилације у једној равни, осцилације при уздужним деформацијама као и при увијању. Такође, биће дискутован и начин увођења различитих контурних услова за разматрани еластични штап. Провера изложеног метода крутих сегмената биће извршена кроз поређење добијених резултата са резултатима добијеним коришћењем других метода које се примењују у анализи еластичних штапова.



## 5.2 Контурни услови

У свим досадашњим разматрањима у овом раду претпостављено је да су крајеви еластичног штапа слободни. Да би се формиран модел могао успешно користити за решавање реалних проблема, потребно је испитати утицај различитих контурних услова. Из тог разлога ћемо претпоставити да су на горњем и доњем крају штапа фиксиране опруге, и то три цилиндричне опруге постављене у правцу координатних оса  $x$ ,  $y$  и  $z$ , крутости  $c_x$ ,  $c_y$  и  $c_z$ , респективно, као и три спиралне опруге које одговарају угловима ротације  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\theta$ , крутости  $c_\varphi$ ,  $c_\psi$  и  $c_\theta$ , респективно.



Слика 5.1: Контурни услови наметнути преко еластично ослоњених крајева штапа

Постављене опруге су једним својим крајем фиксиране за одговарајући крај штапа а другим крајем за непокретну подлогу. На слици 5.1 дат је упрошћен приказ ових опруга, при чему је код ознаке крутости опруга постављених на врху штапа у индексу додата ознака 't', а код ознаке крутости опруга постављених на доњем крају штапа додата ознака 'b'.

Део потенцијалне енергије система, који потиче од уведених опруга на крајевима штапа, може се одредити на следећи начин:

$$\Pi_C = \frac{1}{2} \mathbf{v}^{(nz)T} \mathbf{K}_C^* \mathbf{v}^{(nz)} \quad (5.1)$$

где је

$$\mathbf{K}_C^* = \text{diag}(\mathbf{K}_{Cb}, \mathbf{0}_{6 \times 6}, \dots, \mathbf{0}_{6 \times 6}, \mathbf{K}_{Ct}) \in R^{6(kn+1) \times 6(kn+1)}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{K}_{Cb} = \text{diag}(c_{xb}, c_{yb}, c_{zb}, c_{\varphi b}, c_{\psi b}, c_{\theta b}), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{K}_{Ct} = \text{diag}(c_{xt}, c_{yt}, c_{zt}, c_{\varphi t}, c_{\psi t}, c_{\theta t}). \quad (5.4)$$

Укупна потенцијална енергија система представља збир потенцијалне енергије еластичног штапа (дефинисане изразом (4.153)) и потенцијалне енергије која потиче од уведених опруга на крајевима штапа (дефинисане изразом (5.1)), тј. важи да је:

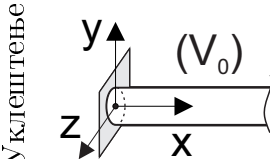
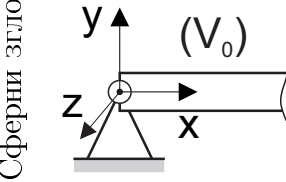
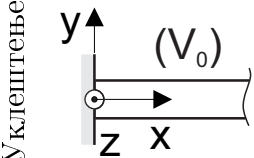
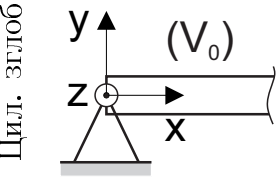
$$\Pi_u = \Pi + \Pi_C = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^{(nz)})^T (\mathbf{K}^* + \mathbf{K}_C^* - P\mathbf{S}^*) \mathbf{v}^{(nz)}. \quad (5.5)$$

Сада се могу анализирати различити контурни услови мењањем крутости уведених опруга на крајевима штапа. Опруге постављене на овај начин могу се користити за опис како крутих тако и еластичних ослонаца.

Крути ослонци се често користе при теоријским разматрањима и приближном опису реалних инжењерских објеката. Код реалних објеката идеално крути ослонци не постоје, али се веома често могу представити као такви јер су њихове еластичне деформације довољно мале да се могу занемарити. У таквим ослонцима, крутости опруга постављених у правцима у којима нема померања су бесконачно велике док су у правцима у којима је дозвољено померање крутости опруга једнаке нули. Пошто су крутости опруга бесконачно велике онда нема померања у њима и одговарајуће апсолутне координате су једнаке нули током времена. У том случају се из матрице  $\mathbf{M}^*$  и матрица  $\mathbf{K}^*$ ,  $\mathbf{K}_C^*$  и  $\mathbf{S}^*$  (видети изразе (4.149), (4.155), (5.2), и (4.156)) морају

уклонити редови и колоне које одговарају координатама које су једнаке нули.

Ако се разматрају штапови са еластичним ослоњцима, довољно је задати крутост опруге која одговара померању у којем је претпостављено да се еластичност јавља. У осталим правцима је еластичност опруге једнака нули или је бесконачно велика зависно од типа ослоњца. Неки карактеристични случајеви контурних услова реализованих постављањем опруга на крајевима просторног и раванског штапа приказани су у табели 2.

Тип деформације штапа	Врста ослоњца	Крутост опруга на крајевима штапа
Просторни штап	Укљештење 	$c_x \rightarrow \infty$ $c_y \rightarrow \infty$ $c_z \rightarrow \infty$ $c_\varphi \rightarrow \infty$ $c_\psi \rightarrow \infty$ $c_\theta \rightarrow \infty$
	Сферни зглоб 	$c_x \rightarrow \infty$ $c_y \rightarrow \infty$ $c_z \rightarrow \infty$
Равански штап	Укљештење 	$c_x \rightarrow \infty$ $c_y \rightarrow \infty$ $c_\theta \rightarrow \infty$
	Цил. зглоб 	$c_x \rightarrow \infty,$ $c_y \rightarrow \infty.$

Табела 2: Крутости опруга на крајевима штапа при различитим контурним условима

### 5.3 Фреквентна једначина

У складу са претходним разматрањима матричну диференцијалну једначину (4.158) можемо записати у следећем облику:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{v}}^{(nz)} + (\mathbf{K}^* + \mathbf{K}_C^* - PS^*) \mathbf{v}^{(nz)} = \mathbf{0}_{6(kn+1) \times 1}. \quad (5.6)$$

Овај систем диференцијалних једначина представља једначине слободних непригушених осцилација посматраног система крутих сегмената у околини равнотежног положаја  $\mathbf{v}^{(nz)}(0) = \mathbf{0}_{6(kn+1) \times 1}$ . У складу са теоријом линеарних осцилација механичких система решења ових диференцијалних једначина претпостављамо у следећем матричном облику (видети [2, 66]):

$$\mathbf{v}^{(nz)} = \mathbf{a}^{(nz)} C \cdot \cos(\omega t - \phi), \quad (5.7)$$

где је  $\mathbf{a}^{(nz)}$  амплитудни вектор,  $\omega$  фреквенција слободних непригушених осцилација,  $C$  константа интеграције, и  $\phi$  представља фазну разлику.

Заменом израза (5.7) у једначину (5.6) добијамо:

$$(\mathbf{K}^* + \mathbf{K}_C^* - PS^* - \omega^2 \mathbf{M}^*) \mathbf{a}^{(nz)} = \mathbf{0}_{6(kn+1) \times 1}. \quad (5.8)$$

Да би постојало нетривијално решење  $\mathbf{a}^{(nz)} \neq \mathbf{0}_{6(kn+1) \times 1}$  потребно је да важи да је:

$$|\mathbf{K}^* + \mathbf{K}_C^* - PS^* - \omega^2 \mathbf{M}^*| = 0. \quad (5.9)$$

Ова једначина представља тзв. фреквентну једначину.

#### 5.3.1 Кружне фреквенције слободних непригушених осцилација штапа

Из фреквентне једначине (5.9) могуће је одредити приближне вредности кружних фреквенција слободних непригушених осцилација разматраног еластичног штапа. Пошто разматрани систем крутих сегмената има  $6(kn + 1)$  степени слободе кретања и фреквентна једначина ће имати исто толико коренова. Обично се при анализи

узима да је:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_r \leq \dots \leq \omega_{6kn-1} \leq \omega_{6(kn+1)}. \quad (5.10)$$

Најнижа кружна фреквенција  $\omega_1$  се често назива и основна кружна фреквенција. Ако сада посматрамо израз (5.8), можемо уочити да свакој од добијених кружних фреквенција  $\omega_r$  ( $r = 1, \dots, 6kn$ ) одговара једначина:

$$(\mathbf{K}^* + \mathbf{K}_C^* - PS^* - \omega_r^2 \mathbf{M}^*) \mathbf{a}_r^{(nz)} = \mathbf{0}_{6(kn+1) \times 1}. \quad (5.11)$$

Из сваке од  $r$  добијених једначина могуће је одредити амплитудни вектор  $\mathbf{a}_r^{(nz)}$  који одговара кружној фреквенцији  $\omega_r$ . Овај вектор се често назива и модални вектор, или вектор главних облика осциловања. Надаље ћемо овај вектор називати вектором главних облика осциловања. Размотримо сада физичко значење елемената овог вектора. На основу вектора независних координата дефинисаног изразима (4.148) и (5.7) може се закључити да се вектор главних облика осциловања може приказати у облику:

$$\mathbf{a}_r^{(nz)} = \left[ \mathbf{a}_{0,r}^T \quad \mathbf{a}_{2,r}^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_{2s-2,r}^T \quad \mathbf{a}_{2s,r}^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_{2kn-2,r}^T \quad \mathbf{a}_{2kn,r}^T \right]^T \quad (5.12)$$

где је

$$\mathbf{a}_{2s,r} = \left[ a_{x(2s,r)} \quad a_{y(2s,r)} \quad a_{z(2s,r)} \quad a_{\varphi(2s,r)} \quad a_{\psi(2s,r)} \quad a_{\theta(2s,r)} \right]^T. \quad (5.13)$$

Да би се добили приближни главни облици осциловања при аксијалним осцилацијама у правцу осе  $x$ , попречним осцилацијама у правцу оса  $y$  и  $z$ , као и при увојним осцилацијама штапа око осе  $x$ , довољно је груписати елементе вектора  $\mathbf{a}_r^{(nz)}$  који одговарају овим осцилацијама тако да важи да је:

$$X_r(x_s) = a_{x(2s,r)}, \quad Y_r(x_s) = a_{y(2s,r)}, \quad Z_r(x_s) = a_{z(2s,r)}, \quad (5.14)$$

$$\varphi_r(x_s) = a_{\varphi(2s,r)}, \quad (s = 1, \dots, kn)$$

где је

$$x_s = \sum_{u=1}^s (l_{2u-2,u} + l_{2u-1,u} + l_{2u,u}) \quad (5.15)$$

и  $X_r(x)$ ,  $Y_r(x)$ ,  $Z_r(x)$  и  $\varphi_r(x)$  су функције главних облика осциловања дефинисане у дискретним вредностима координате  $x_s$ , које одговарају уздужним, попречним и увојним осцилацијама, респективно.

Често се у литератури, због лакшег поређења резултата, може наићи и на нормализовани облик главних облика осциловања:

$$\begin{aligned}\bar{X}_r(x_s) &= \frac{a_{x(2s,r)}}{\max(X_r(x_s))}, \bar{Y}_r(x_s) = \frac{a_{y(2s,r)}}{\max(Y_r(x_s))}, \bar{Z}_r(x_s) = \frac{a_{z(2s,r)}}{\max(Z_r(x_s))}, \\ \bar{\varphi}_r(x_s) &= \frac{a_{\varphi(2s,r)}}{\max(\varphi_r(x_s))}, \quad (s = 1, \dots, kn),\end{aligned}\tag{5.16}$$

у којем је максимална амплитудна вредност сваког од облика осциловања увек јединична.

### 5.3.2 Коначне једначине кретања

На основу претпостављеног решења (5.7) сада се може свакој кружној фреквенцији  $\omega_r$  придружити одговарајуће партикуларно решење диференцијалних једначина кретања система (5.6) у облику:

$$\mathbf{v}_r^{(nz)} = \mathbf{a}_r^{(nz)} C_r \cdot \cos(\omega_r t - \phi_r), \quad r = 1, \dots, 6(kn + 1)\tag{5.17}$$

где су  $\mathbf{a}_r^{(nz)}$ ,  $C_r$  и  $\phi_r$  амплитудни вектор, константа интеграције и фазна разлика, респективно, који одговарају кружној фреквенцији  $\omega_r$ .

Применом методе суперпозиције [2], на основу партикуларних решења (5.17), коначне једначине кретања разматраног система крутих сегмената при слободним непригушеним осцилацијама могу се одредити у облику:

$$\mathbf{v}^{(nz)}(t) = \sum_{r=1}^{6(kn+1)} \mathbf{a}_r^{(nz)} C_r \cdot \cos(\omega_r t - \phi_r).\tag{5.18}$$

Вредност константи интеграције  $C_r$  и почетних фаза  $\phi_r$  ( $r = 1, \dots, 6(kn + 1)$ ) могу се одредити решавањем система једначина:

$$\mathbf{v}^{(nz)}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{v}}^{(nz)}(0) = \dot{\mathbf{v}}_0,\tag{5.19}$$

где су  $\mathbf{v}_0 \in R^{6kn \times 1}$  и  $\dot{\mathbf{v}}_0 \in R^{6kn \times 1}$  задати вектори почетних услова.

### 5.3.3 Критична сила извијања еластичног штапа

Анализом фреквентне једначине (5.9) може се уочити да вредности кружних фреквенција осциловања зависе од интензитета притисне силе  $P$ . Као што је показано у референци [24], са повећањем интензитета притисне силе  $P$ , долази до смањења вредности одговарајућих елемената матрице крутости који зависе од интензитета ове силе, па се тако и вредности кружних фреквенција штапа смањују. Када вредност интензитета аксијалне притисне силе достигне интензитет критичне силе извијања  $P_{cr}$ , прва (основна) кружна фреквенција осциловања штапа је једнака нули. Узимајући у обзир ову чињеницу, ако се у израз (5.9) уврсти да је  $\omega = 0$ , добија се следећа једначина:

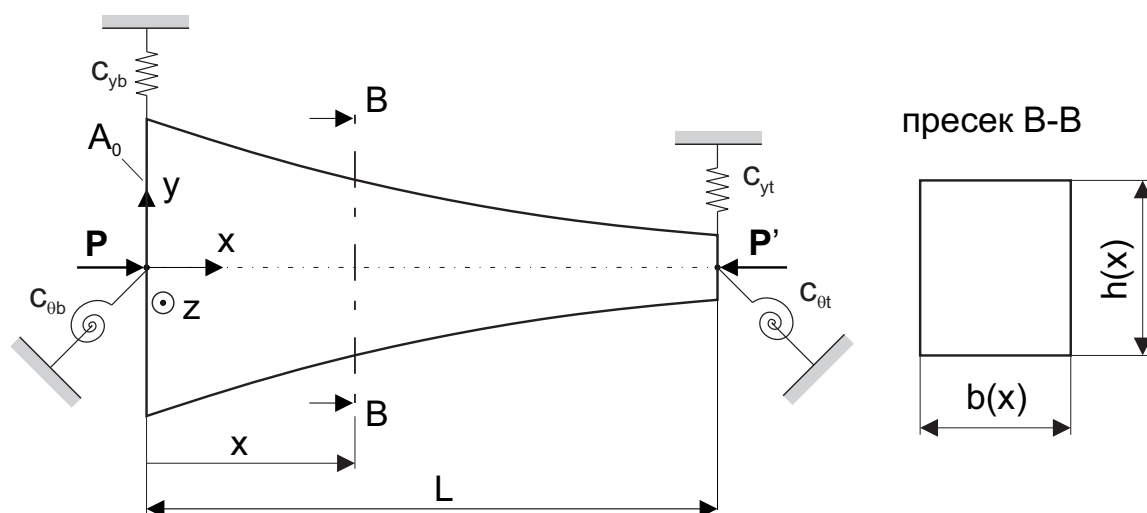
$$|\mathbf{K}^* + \mathbf{K}_C^* - P\mathbf{S}^*|_{P=P_{cr}} = 0. \quad (5.20)$$

Ова једначина представља у општем случају полином реда 6 ( $kn + 1$ ) по непознатој  $P$ . Вредност интензитета критичне силе извијања  $P_{cr}$  је најмањи корен поменуте једначине. Одређивање вредности интензитета ове силе је веома важно у инжењерској пракси. Често се инжењерски објекти (стубови, антене, и сл.) пројектују само према напонском критеријуму. Међутим, неретко се дешава да конструкција постане нестабилна услед појаве извијања иако су присутни напони у границама дозвољених, што је детаљно описано у референци [10]. То се најчешће дешава код елемената код којих су димензије попречног пресека мале у односу на његову дужину. Зато је важно одредити интензитет критичне силе извијања и узети овај податак у обзир при димензионисању.

## 5.4 Нумерички примери

### 5.4.1 Еластични штап правоугаоног попречног пресека који се деформише у равни

На слици 5.2 приказан је еластично ослоњен штап са континуалном променом параметара. Штап је дужине  $L$ , а крутости цилиндричних и спиралних опруга на левом и десном крају крају штапа су  $c_{yb}$ ,  $c_{\theta b}$ ,  $c_{yt}$  и  $c_{\theta t}$ , респективно. Такође, претпоставимо да је попречни пресек штапа правоугаоног облика, при чему се ширина и дебљина попречног пресека мењају сагласно задатим функцијама промене  $b(x)$  и  $h(x)$ , респективно. Параметри материјала штапа, густина и модул еластичности, мењају се дуж штапа сагласно законима  $\rho(x)$  и  $E(x)$ , респективно. Нека је штап оптерећен аксијалним притисним силама  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}'$  на свом левом и десном крају, респективно.



Слика 5.2: Еластично ослоњен нехомогени еластични штап правоугаоног попречног пресека променљивих димензија оптерећен аксијалним притисним силама на крајевима

У овом одељку ћемо разматрати неколико штапова правоугаоног попречног пресека са различитим законима промене параметара штапа, који ће касније бити ближе дефинисани. У општем случају, изложеним приступом може бити анализиран било



који облик попречног пресека, али ће овде бити анализиран само правоугаони због ефикасности приказа. Такође, моделом еластично ослоњеног штапа, представљеног на слици 5.2, могу бити обухваћени различити контурни услови штапа који осцилује у равни, као што је наглашено у табели 2.

У општем случају, функција промене површине правоугаоног попречног пресека дуж штапа је:

$$A(x) = b(x) \cdot h(x), \quad (5.21)$$

а функција промене момента инерције правоугаоног попречног пресека дуж штапа у односу на осу  $z$  је:

$$I_z(x) = \frac{1}{12} b(x) \cdot h(x)^3. \quad (5.22)$$

Претпостављено је да је закон промене ширине и дебљине попречног пресека континуална функција. Из тог разлога је током дискретизације довољно користити примарне еластичне сегменте, као што је већ наглашено у поглављу 3.3 (видети слику 3.4(б)), па се узима да је  $k = 1$ . Број примарних сегмената  $n$  је променљив, и повећава се како би се постигла жељена тачност у одређивању кружних фреквенција. Дужина примарних сегмената је  $L_i = L/n$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Након дискретизације сваког од  $n$  примарних еластичних сегмената на круте сегменте (видети поглавље 3.2) можемо усвојити да су дужине крутих сегмената  $(V_{k,i})$ , ( $k = 2i - 2, 2i - 1, 2i$ ) на које је дискретизован  $i$ -ти примарни еластични сегмент:

$$l_{2i-2,i} = l_{2i,i} = L_i/2, \quad l_{2i-1,i} = 0, \quad (5.23)$$

при чему смо усвојили да је коефицијент поделе  $\delta = 1$ .

Маса крутих сегмената  $(V_{k,i})$  је:

$$m_{k,i} = \rho A_i l_{k,i}, \quad (5.24)$$

а момент инерције у односу на осу  $C_{k,i} \zeta_{k,i}$ :

$$J_{C_{k,i} \zeta_{k,i}} = \frac{1}{12} m_{k,i} l_{k,i}^2. \quad (5.25)$$

У свим будућим разматрањима у овом поглављу претпоставићемо да је дужина штапа  $L = 1$  [m], а димензије попречног пресека на левом крају  $b_0 = 0.05$  [m] и  $h_0 = 0.01$  [m]. Такође, биће претпостављено да је штап је израђен од челика чија су густина

и модул еластичности на левом крају штапа  $\rho_0 = 7850 \text{ [kg/m}^3\text{]}$  и  $E_0 = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}$ , респективно.

Претпоставља се да се штап деформише у равни  $xy$ . Као што је то уобичајено у литератури при малим осцилацијама штапова утицај силе Земљине теже се не узима у разматрањима. Пошто ће у наредним примерима бити разматрано само кретање у поменутој равни, потребно је детаљније објаснити начин преласка са просторног дискретизованог на равански дискретизовани модел еластичног штапа. У равни  $xy$  може доћи до савијања и аксијалних деформација еластичног штапа. Из тог разлога је потребно извршити редукцију приближног модела еластичног штапа приказаног на слици 4.1. Уведена релативна померања  $q_{6s-4}$ ,  $q_{6s}$  и  $q_{6s-5}$ , ( $s = 1, \dots, k \cdot n$ ) одговарају савијању и аксијалним деформацијама еластичног штапа у равни  $xy$ , респективно. Ова релативна померања треба задржати. Са друге стране, релативна померања  $q_{6s-3}$ ,  $q_{6s-1}$  и  $q_{6s-2}$ , ( $s = 1, \dots, k \cdot n$ ) која описују савијање еластичног штапа у равни  $xz$  и увијање штапа око  $x$  осе, респективно, је потребно искључити из разматрања јер у раванском моделу нема поменутих деформација. Важно је напоменути да није потребно изнова спроводити процес формирања диференцијалних једначина кретања приближног модела еластичног штапа у равни. Пошто је модел еластичног штапа у равни само специјалан случај просторног модела еластичног штапа, довољно је приметити да се вектор независних координата (видети израз 4.154) овог модела сада редукује на:

$$\mathbf{v}^{(nz)} = \left[ \mathbf{v}_0^T \quad \mathbf{v}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{v}_{2s-2}^T \quad \mathbf{v}_{2s}^T \quad \dots \quad \mathbf{v}_{2kn-2}^T \quad \mathbf{v}_{2kn}^T \right]^T, \quad (5.26)$$

где је  $\mathbf{v}_{2s}^T = [x_{2s}, y_{2s}, \theta_{2s}]$ , ( $s = 1, \dots, k \cdot n$ ), па поменути модел сада има  $3n + 1$  степени слободе кретања. Зато је при анализи овог раванског модела еластичног штапа довољно у матрицама  $\mathbf{M}^*$ ,  $\mathbf{K}^*$ ,  $\mathbf{K}_C^*$  и  $\mathbf{S}^*$  (видети изразе (4.149), (4.155), (5.2) и (4.156)) уклонити редове и колоне који одговарају искљученим координатама  $z_{2s}$ ,  $\varphi_{2s}$  и  $\psi_{2s}$ , ( $s = 1, \dots, k \cdot n$ ) да би се добио дискретизовани модел еластичног штапа променљивих параметара који се деформише у равни.

У примерима који следе најпре ће за случај еластичног штапа са константним параметрима бити извршена анализа тачности изложеног приступа кроз поређење добијених резултата са аналитичким решењима парцијалних диференцијалних једначина која су доступна у литератури.

Након провере, биће приказана и могућност употребе изложеног приступа за ана-

лизу штапова са различитим законима промене параметара. У већини изложених примера биће најпре одређена вредност критичне силе извијања штапа коришћењем израза (5.20). Након тога, биће одређиване кружне фреквенције слободних непригушених осцилација штапа решавањем фреквентне једначине (5.9). Притом ће бити разматрана два случаја. Први случај представља ситуацију када штап није оптерећен аксијалном притисном силом  $P$ , па се у фреквентној једначини узима да је  $P = 0$ . У другом случају узима се да на штап делује аксијална притисна сила  $P$ , при чему важи да је  $0 \leq P \leq P_{cr}$ . Поред поређења резултата са резултатима других метода који су доступни у литератури, у нумеричким примерима биће приказан и значајан број нових резултата за неке сложеније законе промене параметара штапа.

#### 5.4.2 Хомогени еластични штап константног попречног пресека

Хомогени еластични штап константног попречног пресека се често користи за проверу тачности разних приближних метода за одређивање кружних фреквенција и критичне силе извијања. Пошто се у овом случају параметри попречног пресека и материјала не мењају дуж штапа, одговарајући коефицијенти у парцијалним диференцијалним једначинама, којима је описано динамичко понашање штапа, су константни (видети [24]). Самим тим је могуће одредити аналитичко решење парцијалних диференцијалних једначина у затвореној форми. Управо зато се овај једноставни модел штапа користи као почетна провера конвергенције приближних решења ка тачном (аналитичком) решењу.

Нека је дат штап правоугаоног попречног пресека, при чему су ширина и дебљина попречног пресека штапа константне дуж штапа, тј.  $b(x) = b_0$ , и  $h(x) = h_0$ . Такође, нека су густина и модул еластичности материјала штапа константни на целој дужини штапа, односно  $\rho(x) = \rho_0$  и  $E(x) = E_0$ , респективно.

Анализирајмо најпре тачност при одређивању критичне силе извијања разматраног штапа. У ту сврху дефинишимо релативну грешку при одређивању приближне вредности критичне силе извијања као:

$$\varepsilon_p = \left| \frac{\lambda_p - \lambda_{p(exact)}}{\lambda_{p(exact)}} \right| \cdot 100 [\%], \quad (5.27)$$

где је  $\lambda_p = P_{cr}L / (E \cdot I_{z_0})$  бездимензиони интензитет критичне силе извијања добијене применом изложеног приступа а  $\lambda_{p(exact)} = P_{cr(exact)}L / (E \cdot I_{z_0})$  представља тачни

бездимензиони интензитет критичне силе извијања одређен у референцама [10, 24].

У табели 3 приказане су упоредне вредности бездимензионих интензитета критичне силе извијања еластичног штапа константних параметара при различитим контурним условима.

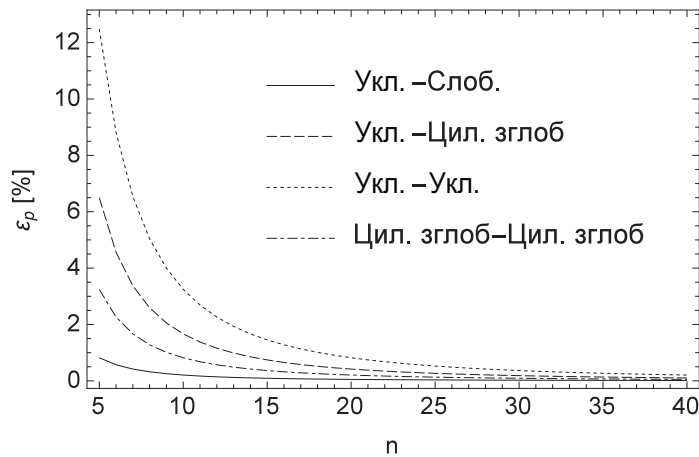
Контурни услови			Предложени приступ			Тачне вредности [10]
лево	десно		$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	
Укљештење	Слободан	$\lambda_p$	2.4661	2.4671	2.4673	2.467
		$\varepsilon_p$ [%]	0.04	0.01	0.01	
Укљештење	Цил. зглоб	$\lambda_p$	20.1060	20.1695	20.1813	20.190
		$\varepsilon_p$ [%]	0.42	0.10	0.04	
Укљештење	Укљештење	$\lambda_p$	39.1548	39.3973	39.4424	39.478
		$\varepsilon_p$ [%]	0.82	0.21	0.09	
Цил. зглоб	Цил. зглоб	$\lambda_p$	9.8493	9.8645	9.8673	9.870
		$\varepsilon_p$ [%]	0.21	0.06	0.03	

Табела 3: Бездимензиони интензитет критичне силе извијања  $\lambda_p$  еластичног штапа константних параметара при различитим контурним условима

Анализирана је промена релативне грешке између бездимензионог интензитета критичне силе извијања добијене применом изложеног приступа и тачних вредности из референце [10]. Може се јасно уочити да са повећањем броја примарних еластичних сегмената  $n$  долази до значајног смањења релативне грешке. Тако је већ за  $n = 20$  вредност релативне грешке мања од 1 [%] за сваки од четири приказана случаја контурних услова. Даљим повећавањем броја примарних сегмената  $n$ , долази до значајног смањења релативне грешке, па тако за  $n = 60$  највећа вредност релативне грешке износи 0.09 [%] за случај обострано укљештеног штапа.

Бољи увид у брзину конвергенције резултата изложеног приступа ка аналитичким решењима може се стећи посматрањем слике 5.3 на којој је приказана промена вредности релативне грешке са повећањем броја примарних еластичних сегмената  $n$  за све анализиране контурне услове штапа. Може се приметити да вредност релативне грешке при одређивању критичне силе извијања најбрже конвергира ка нули у случају конзоле, тј. када је један крај штапа укљештен а други слободан. Најспорија конвергенција се постиже при анализи штапа који је укљештен на оба краја. Дакле, при довољно великом броју примарних сегмената, вредности релативних грешака су

готово једнаке, па поређење ефикасности изложеног приступа при различитим контурним условима губи на значају. Осим тога, треба нагласити да је предложена варијанта методе крутих сегмената нумерички ефикасна због коришћења апсолутних координата крутих тела у анализи. Због тога повећање броја крутих сегмената  $n$  неће довести до смањења ефикасности.



Слика 5.3: Релативна грешка при одређивању интензитета критичне силе извијања хомогеног штапа константног попречног пресека у зависности од броја примарних сегмената  $n$

Поред анализе ефикасности изложеног приступа при анализи интензитета критичне силе извијања штапа, потребно је спровести и анализу ефикасности изложеног приступа при одређивању кружних фреквенција попречних осцилација овог штапа.

Претпоставићемо најпре да је  $P = 0$ . Дефинишимо сада релативну грешку при одређивању кружне фреквенције слободних попречних осцилација штапа као:

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{i(exact)}}{\bar{\omega}_{i(exact)}} \right| \cdot 100 [\%], \quad (5.28)$$

где је  $\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{\rho AL^4 / (EI_{z_0})}$  вредност бездимензионе кружне фреквенције добијене применом изложеног приступа и  $\bar{\omega}_{i(exact)} = \omega_{i(exact)} \sqrt{\rho AL^4 / (EI_{z_0})}$  представља тачну вредност бездимензионе кружне фреквенције одређене у референци [24].

Имајући у виду да је за пројектовање инжењерских објеката најважније одредити прве три кружне фреквенције осциловања, проверу изложеног приступа ћемо спровести кроз поређење добијених резултата са тачним вредностима управо за прве три кружне фреквенције. У табели 4 приказане су вредности прве три бездимензионе кружне фреквенције слободних попречних осцилација  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), као и

одговарајуће релативне грешке  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) добијених резултата у односу на тачне вредности дате у референци [24] при различитим контурним условима.

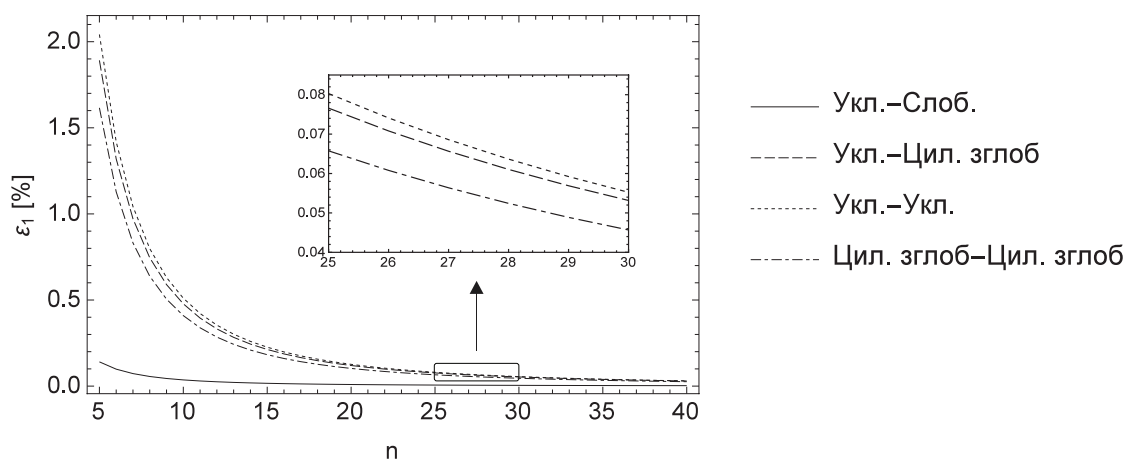
Контурни услови		Предложени приступ			Тачне вредности [24]	
лево	десно	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$		
Укљештење	Слободан	$\bar{\omega}_1$	3.51633	3.51609	3.51605	3.5160
		$\varepsilon_1$ [%]	0.01	0.003	0.001	
		$\bar{\omega}_2$	22.0040	22.0269	22.0311	22.0346
		$\varepsilon_2$ [%]	0.14	0.04	0.02	
		$\bar{\omega}_3$	61.4033	61.6235	61.6644	61.6979
		$\varepsilon_3$ [%]	0.48	0.12	0.05	
Укљештење	Цил. зглоб	$\bar{\omega}_1$	15.3997	15.4136	15.4162	15.4182
		$\varepsilon_1$ [%]	0.12	0.03	0.01	
		$\bar{\omega}_2$	49.7425	49.9091	49.9401	49.9651
		$\varepsilon_2$ [%]	0.45	0.11	0.05	
		$\bar{\omega}_3$	103.236	103.993	104.134	104.248
		$\varepsilon_3$ [%]	0.97	0.25	0.11	
Укљештење	Укљештење	$\bar{\omega}_1$	22.3446	22.3661	22.3701	22.3729
		$\varepsilon_1$ [%]	0.13	0.03	0.01	
		$\bar{\omega}_2$	61.3779	61.5989	61.64	61.6728
		$\varepsilon_2$ [%]	0.48	0.12	0.05	
		$\bar{\omega}_3$	119.668	120.593	120.765	120.903
		$\varepsilon_3$ [%]	1.02	0.26	0.11	
Цил. зглоб	Цил. зглоб	$\bar{\omega}_1$	9.85947	9.8671	9.8685	9.8696
		$\varepsilon_1$ [%]	0.10	0.03	0.01	
		$\bar{\omega}_2$	39.3168	39.4379	39.4604	39.4786
		$\varepsilon_2$ [%]	0.41	0.10	0.05	
		$\bar{\omega}_3$	88.0128	88.6215	88.7352	88.8269
		$\varepsilon_3$ [%]	0.92	0.23	0.10	

Табела 4: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) слободних попречних осцилација хомогеног еластичног штапа константног попречног пресека при различитим контурним условима и при  $P = 0$

Уопштено говорећи, анализом резултата приказаних у овој табели, може се доћи до сличног закључка као и код одређивања критичне силе извијања. Наиме, најмање релативне грешке се постижу у случају штапа који је на једном крају укљештен, а

на другом слободан, док се најмања тачност изложене методе јавља у случају обострано уклештеног штапа. Притом, при свим контурним условима постоји разлика у тачности одређивања сваке од три анализираних бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тако је најмања релативна грешка  $\varepsilon_1$  код одређивања прве кружне фреквенције, док је највећа релативна грешка  $\varepsilon_3$  код треће кружне фреквенције. На пример, за  $n = 20$ , код штапа који је на једном крају уклештен а на другом слободан, имамо да је  $\varepsilon_1 = 0.01$  [%],  $\varepsilon_2 = 0.14$  [%] и  $\varepsilon_3 = 0.48$  [%]. Када се број примарних сегмената повећа на  $n = 60$ , вредност релативних грешака се значајно смањи и износи  $\varepsilon_1 = 0.001$  [%],  $\varepsilon_2 = 0.02$  [%] и  $\varepsilon_3 = 0.05$  [%]. Са друге стране, код обострано уклештеног штапа, за  $n = 20$ , вредност релативних грешака износи  $\varepsilon_1 = 0.13$  [%],  $\varepsilon_2 = 0.48$  [%] и  $\varepsilon_3 = 1.02$  [%]. Повећањем броја примарних сегмената на  $n = 60$ , добија се да је  $\varepsilon_1 = 0.01$  [%],  $\varepsilon_2 = 0.05$  [%] и  $\varepsilon_3 = 0.11$  [%].

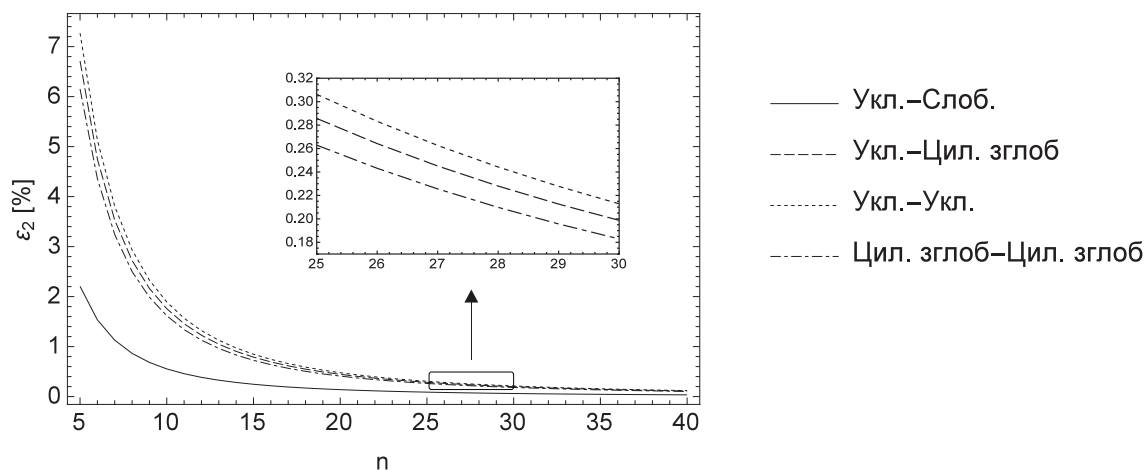
Комплетнији приказ брзине конвергенције резултата добијених применом изложеног приступа ка тачним резултатима може се видети на сликама 5.4-5.6 где је приказана зависност релативних грешака  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) од броја коришћених примарних сегмената ( $n$ ), респективно, при различитим контурним условима.



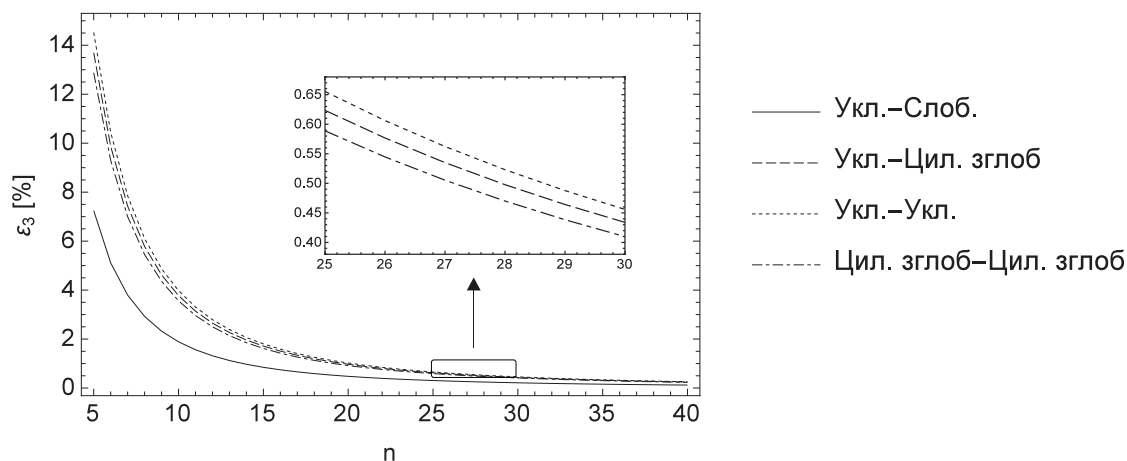
Слика 5.4: Релативна грешка при одређивању прве кружне фреквенције слободних попречних осцилација штапа у зависности од броја примарних сегмената  $n$

На сваком од три приказана дијаграма конвергенције је очигледно да се по брзини конвергенције издваја случај штапа који је на једном крају уклештен а на другом слободан. Такође, може се уочити да је разлика у брзини конвергенције између остала три случаја контурних услова минимална. На крају, иако разлика у брзини конвергенције постоји, при довољно великом броју примарних сегмената  $n$ , рецимо

за  $n = 40$ , на дијаграмима конвергенције се може видети да је за сваки од разматраних контурних услова разлика између релативних грешака занемарљиво мала. Пошто је извршена провера тачности добијених кружних фреквенција попречних осцилација, следећи логичан корак у верификацији изложеног приступа је провера тачности одговарајућих главних облика осциловања штапа.



Слика 5.5: Релативна грешка при одређивању друге кружне фреквенције слободних попречних осцилација штапа у зависности од броја примарних сегмената  $n$

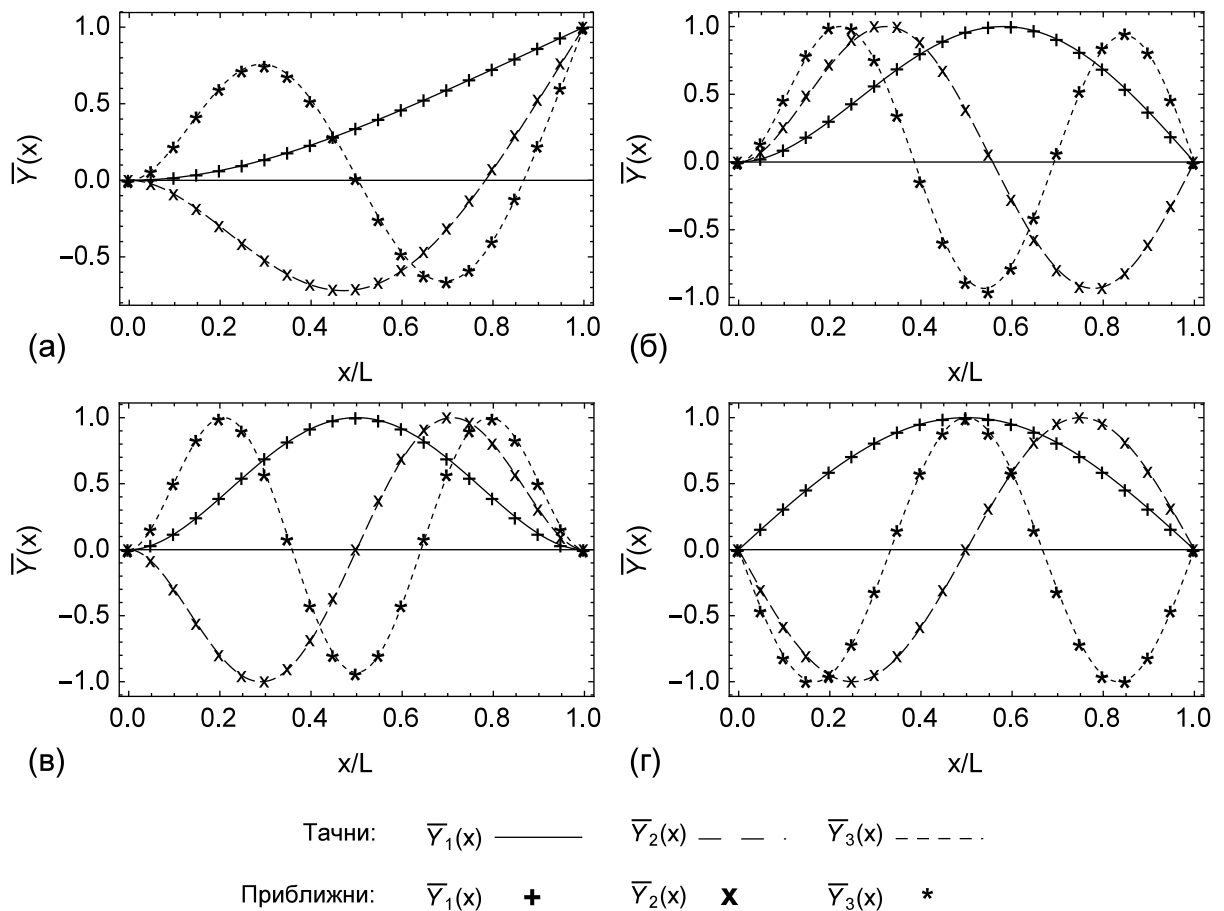


Слика 5.6: Релативна грешка при одређивању треће кружне фреквенције слободних попречних осцилација штапа у зависности од броја примарних сегмената  $n$

На слици 5.7(а)-(г) приказани су упоредни дијаграми прва три нормализована главна облика осциловања штапа добијених применом изложеног приступа и на основу аналитичких решења добијених у референци [24] за сваки од разматраних контурних услова. Главни облици осциловања добијени коришћењем аналитичких



решења су означени пуним линијама, док су дискретне вредности, добијене применом изложеног приступа при  $n = 20$ , означене одговарајућим маркерима (видети слику 5.7(а)-(г)). Може се приметити да постоји одлично слагање иако је коришћено само  $n = 20$  примарних сегмената, што је и било очекивано јер је раније показано добро слагање резултата при одређивању кружних фреквенција слободних попречних осцилација. Спајањем добијених дискретних вредности може се обезбедити приближна форма нормализованих главних облика осциловања за сваки од коришћених контурних услова.



Слика 5.7: Прва три главна облика осциловања еластичне конзоле за различите контурне услове: (а) уклештен-слободан, (б) уклештен-цил. зглоб, (в) цил. зглоб - цил. зглоб, (г) уклештен-уклештен

Како би се додатно повећала тачност при цртању ових главних нормализованих облика осциловања разматраних штапова, убудуће ће бити коришћено  $n = 40$  примарних сегмената .

Пошто је на почетку овог поглавља претпостављено да у равни  $xu$  долази до савијања и аксијалних деформација еластичног штапа остаје да се провери тачност

одређивања кружних фреквенција слободних аксијалних осцилација штапа. У табели 5 дат је упоредни приказ бездимензионих кружних фреквенција аксијалних осцилација  $\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{\rho L^2 / E}$  штапа добијених применом изложеног приступа и аналитичког решења парцијалних диференцијалних једначина у референци [24] за случај штапа који је на једном крају уклештен а на другом слободан, и за случај обострано уклештеног штапа. Остали контурни услови (уклештен-цилиндричан зглоб и цилиндрични зглоб-цилиндрични зглоб) нису разматрани јер се при разматрању аксијалних осцилација обострано уклештеног штапа оба поменућа контурна услова своде на случај обострано уклештеног штапа.

Контурни услови		Предложени приступ			Тачне вредности [24]		
лево	десно	$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$			
Уклештење	Слободан	$\bar{\omega}_1$	1.5704	1.5707	1.5708	1.5708	
		$\varepsilon_1$ [%]	0.026	0.007	0.003		
		$\bar{\omega}_2$	4.7015	4.7097	4.7112		4.7124
		$\varepsilon_2$ [%]	0.234	0.058	0.026		
		$\bar{\omega}_3$	7.8036	7.8414	7.8484		
		$\varepsilon_3$ [%]	0.642	0.161	0.072		
Уклештење	Уклештење	$\bar{\omega}_1$	3.1384	3.1408	3.1412	3.1416	
		$\varepsilon_1$ [%]	0.103	0.026	0.012		
		$\bar{\omega}_2$	6.2574	6.2767	6.2803		6.2832
		$\varepsilon_2$ [%]	0.411	0.103	0.046		
		$\bar{\omega}_3$	9.3378	9.4030	9.4151		
		$\varepsilon_3$ [%]	0.923	0.231	0.103		

Табела 5: Бездимензионе кружне фреквенције аксијалних слободних осцилација хомогеног штапа константног попречног пресека при различитим контурним условима

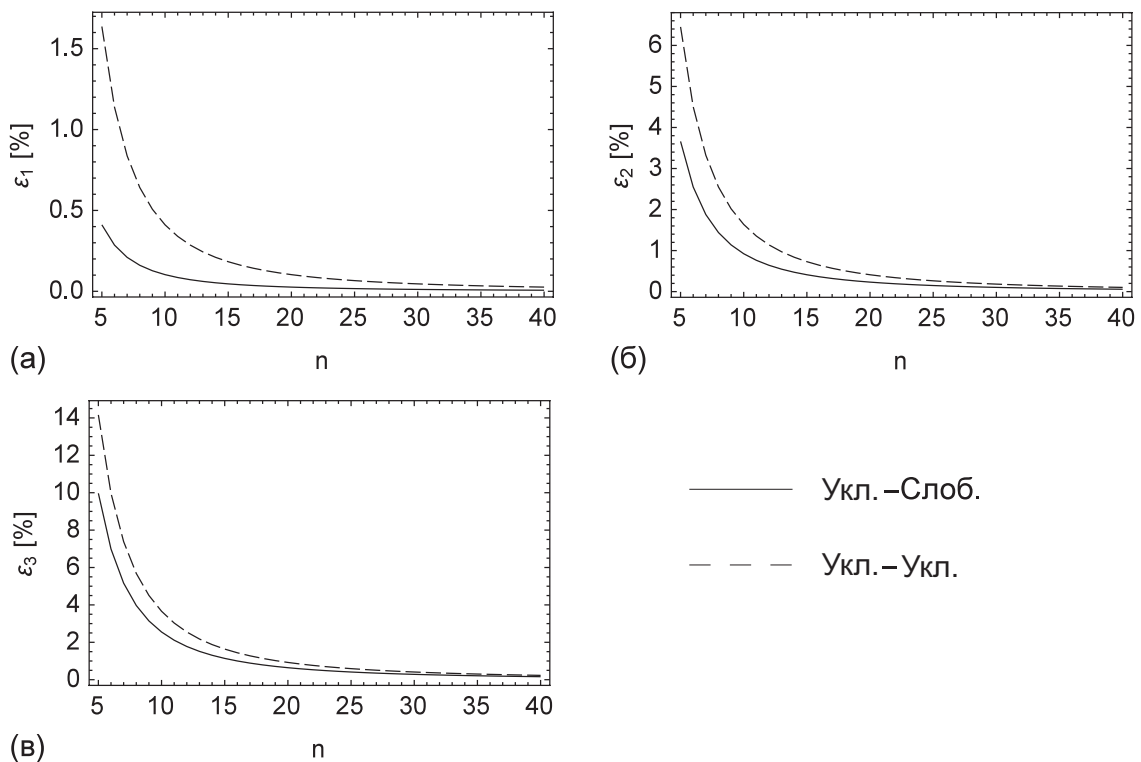
Анализом резултата приказаних у овој табели може се закључити да се применом изложеног приступа при анализи слободних аксијалних осцилација хомогеног штапа такође постижу довољно тачни резултати. Тако је највећа релативна грешка  $\varepsilon_3 = 0.923$  [%] за случај обострано уклештеног штапа при  $n = 20$ , док се повећањем броја примарних сегмената на  $n = 60$  ова грешка смањује на  $\varepsilon_3 = 0.103$  [%].

На слици 5.8 су приказани дијаграми промене релативних грешака  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) у зависности од броја коришћених примарних сегмената  $n$ . На основу ових дијаграма може се закључити да су поменуте релативне грешке нешто мање за случај штапа

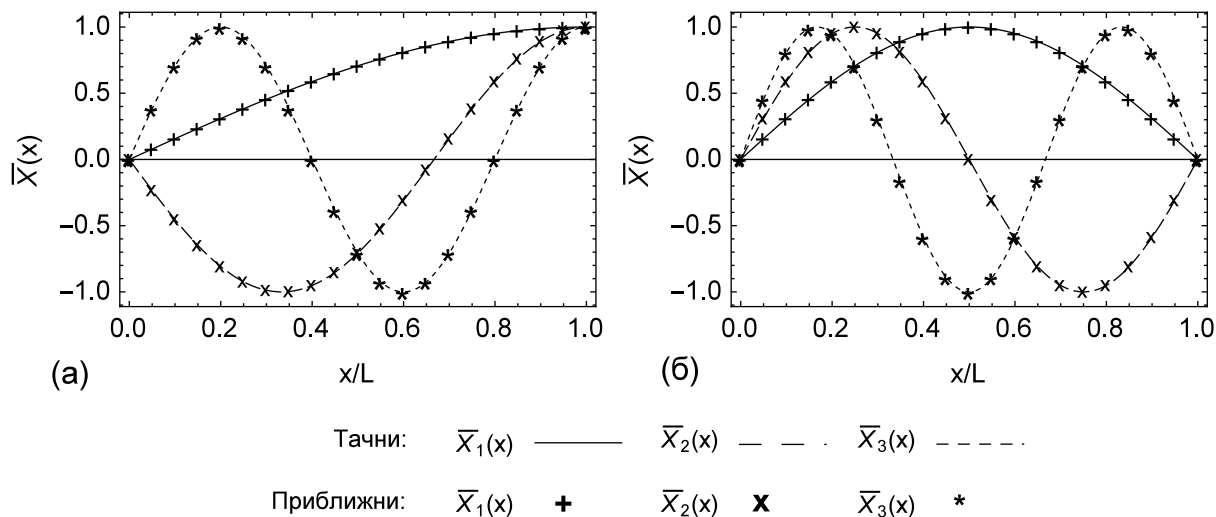
који је на једном крају уклештен а на другом слободан, у поређењу са обострано уклештеним штапом. Слично као и при анализи слободних попречних осцилација, и овде поменута разлика у брзини конвергенције губи на значају са повећањем броја коришћених примарних сегмената  $n$ .

На слици 5.9 приказано је поређење прва три приближна главна облика осциловања аксијалних осцилација штапа добијених коришћењем предложеног приступа и тачних главних облика осциловања који су дати у референци [24]. Тачни облици осциловања обележени су пуним линијама, док су дискретне вредности добијене предложеним приступом означене одговарајућим маркерима.

Пошто и овде постоји одлично слагање резултата, закључак је да је приближне главне облике осциловања при аксијалним осцилацијама могуће добити спајањем тачака које представљају дискретне вредности. Како би се додатно повећала тачност главних облика осциловања, убудуће ће при њиховом представљању бити коришћено  $n = 40$  примарних сегмената.



Слика 5.8: Релативна грешка при одређивању прве три кружне фреквенције слободних аксијалних осцилација штапа у зависности од броја примарних сегмената  $n$  при различитим контурним условима



Слика 5.9: Прва три главна облика осциловања при слободним аксијалним осцилацијама штапа за различите контурне услове: (а) уклештење-слободан, (б) уклештење-уклештење

Коначно, потребно је разматрати и штап са аксијалним притисним силама константног интензитета  $P$  на својим крајевима при различитим контурним условима. У табели 6 приказане су упоредне вредности квадратних коренова бездимензионих кружних фреквенција добијених применом изложеног приступа и на основу аналитичких решења из референце [24] за различите вредности интензитета аксијалне притисне силе  $P$  и при различитим контурним условима. Очигледно је да постоји одлично слагање резултата предложеног приступа са аналитичким решењима за прве три бездимензионе кружне фреквенције при  $n = 40$ . Такође, анализом резултата може се приметити да при свим контурним условима вредности бездимензионих кружних фреквенција опадају са порастом интензитета аксијалне притисне силе  $P$ . Посебно је приметна велика стопа опадања прве бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_1$ . Када интензитет аксијалне притисне силе  $P$  достигне вредност интензитета критичне силе извијања  $P_{cr}$ , вредност прве бездимензионе кружне фреквенције је једнака нули.

На крају ове секције може се закључити да је извршена провера резултата предложеног приступа за случај хомогеног штапа константног попречног пресека. Добијени су резултати задовољавајуће тачности, који, иако приближни, могу адекватно заменити друге знатно сложеније методе при статичкој и динамичкој анализи ове врсте штапова. У наставку ће бити приказане могућности примене изложеног приступа за различите случајеве промене параметара еластичног штапа.

Контурни услови		$P/P_{cr}$	$\bar{\omega}_1^{1/2}$		$\bar{\omega}_2^{1/2}$		$\bar{\omega}_3^{1/2}$	
лево	десно		Предл. приступ	Реф. [24]	Предл. приступ	Реф. [24]	Предл. приступ	Реф. [24]
Укљештење	Слободан	0	1.87513	1.87510	4.69328	4.69409	7.85007	7.85476
		0.2	1.77999	1.77995	4.65409	4.65490	7.83033	7.83500
		0.4	1.66295	1.66290	4.61381	4.61461	7.81044	7.81510
		0.6	1.50883	1.50878	4.57238	4.57317	7.79039	7.79504
		0.8	1.27428	1.27423	4.52973	4.53052	7.77019	7.77483
		1	0.00861	0.03370	4.48580	4.48659	7.74983	7.75446
Укљештење	Цил. зглоб	0	3.92601	3.92660	7.06464	7.06858	10.1977	10.21018
		0.2	3.71749	3.71786	6.93885	6.94261	10.1075	10.11979
		0.4	3.46409	3.46426	6.80571	6.80934	10.0148	10.02690
		0.6	3.13471	3.13471	6.66419	6.66773	9.91934	9.93136
		0.8	2.64021	2.64008	6.51298	6.51649	9.82103	9.83297
		1	0.00270	0.04277	6.35045	6.35400	9.71964	9.73154
Укљештење	Укљештење	0	4.72928	4.73004	7.84850	7.85320	10.98150	10.99561
		0.2	4.48004	4.48032	7.65377	7.65804	10.83200	10.84567
		0.4	4.17658	4.17642	7.44194	7.44589	10.67580	10.68915
		0.6	3.78127	3.78075	7.20917	7.21293	10.51220	10.52537
		0.8	3.18638	3.18562	6.95001	6.95378	10.34050	10.35351
		1	0.00544	0.04224	6.65646	6.66053	10.15950	10.17263
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0	3.14119	3.14159	6.27996	6.28319	9.41390	9.42478
		0.2	2.97083	2.97113	6.19998	6.20313	9.36118	9.37198
		0.4	2.76474	2.76495	6.11675	6.11985	9.30754	9.31827
		0.6	2.49829	2.49842	6.02997	6.03302	9.25295	9.26361
		0.8	2.10086	2.10091	5.93926	5.94227	9.19736	9.20797
		1	0.00917	0.00036	5.84416	5.84716	9.14074	9.15130

Табела 6: Бездимензионе кружне фреквенције осциловања штапа константних параметара оптерећеног аксијалним притисним силама интензитета  $P$  на својим крајевима при различитим контурним условима

### 5.4.3 Хомогени еластични штап линеарно променљиве ширине и константне дебљине попречног пресека

Нека је дат хомогени еластични штап линеарно променљиве ширине и константне дебљине попречног пресека дуж своје подужне осе симетрије. Ширина попречног пресека штапа се мења сагласно закону  $b(x) = b_0(1 - c_b x/L)$ , где је  $b_0$  ширина попречног пресека штапа на левом крају а  $c_b$  представља параметар линеарног закошења штапа. Претпоставља се да је висина попречног пресека константна, односно  $h(x) = h_0$ , при чему због хомогености материјала штапа важи да је  $\rho(x) = \rho_0$  и  $E(x) = E_0$ , где су  $h_0$ ,  $\rho_0$  и  $E_0$  дебљина попречног пресека штапа, густина материјала штапа и модул еластичности материјала на левом крају штапа, респективно.

Најпре ће бити одређена критична сила извијања овог штапа. Као што је већ раније речено, ако се штап посматра као материјални континуум онда се његово понашање описује парцијалним диференцијалним једначинама. Када је било који параметар штапа променљив, коефицијенти ових парцијалних диференцијалних једначина више нису константни, па се јављају проблеми при решавању ових једначина. Једна од метода за приближно решавање ових парцијалних диференцијалних једначина, у којој је приближно решење представљено у полиномијалном облику је приказана у референци [67]. У табели 7 приказане су упоредне вредности бездимензионог интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p$  за различите контурне услове добијене применом предложеног приступа, методе коначних елемената [24] и приступа из референце [67].

Код методе коначних елемената и предложеног приступа (методе крутих сегмената) за приближно приказивање облика штапа коришћено је  $n = 40$  еластичних сегмената. Анализом добијених резултата може се приметити да постоји одлично слагање резултата при коришћењу сваке од три наведене методе. Такође, приметно је да су резултати методе коначних елемената нешто ближи резултатима из референце [67] у односу на резултате добијене предложеним приступом, али су разлике занемарљиво мале. На пример, за случај обострано уклештеног штапа при  $c_b = 0.8$  највећа релативна грешка која се јавља између резултата предложеног приступа и резултата из референце [67] је  $\varepsilon_p = 0.222$  [%], док за исти случај релативна грешка код примене методе коначних елемената износи  $\varepsilon_p = 0.038$  [%]. Уопштено говорећи,

код ове врсте штапова, интензитет критичне силе извијања се смањује са повећањем вредности параметра линеарног закошења  $c_b$  за сваки од наведених контурних услова.

Контурни услови		$c_b$	$n = 40$				Реф. [67]
			Предл. приступ		Коначни елементи [24]		
			$\lambda_p$	$\varepsilon_p$ [%]	$\lambda_p$	$\varepsilon_p$ [%]	
лево	десно						
Укљештење	Слободан	0	2.4671	0.003	2.4674	0.016	2.467
		0.2	2.3152	0.035	2.3155	0.023	2.316
		0.4	2.1506	0.021	2.1508	0.011	2.151
		0.6	1.9672	0.040	1.9674	0.032	1.968
		0.8	1.7518	0.009	1.7519	0.006	1.752
		1	1.4453	-	1.4443	-	-
Укљештење	Цил. зглоб	0	20.1695	0.106	20.1907	0.001	20.191
		0.2	18.099	0.110	18.1181	0.005	18.119
		0.4	15.8946	0.110	15.9114	0.004	15.912
		0.6	13.4865	0.115	13.5010	0.008	13.502
		0.8	10.7063	0.127	10.7179	0.020	10.720
		1	6.5650	-	6.5514	-	-
Укљештење	Укљештење	0	39.3973	0.204	39.4785	0.001	39.478
		0.2	35.3393	0.205	35.4124	0.001	35.412
		0.4	30.9785	0.208	31.0438	0.003	31.043
		0.6	26.1425	0.212	26.2007	0.010	26.198
		0.8	20.3816	0.222	20.4347	0.038	20.427
		1	9.9376	-	10.0677	-	-
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0	9.8645	0.055	9.8696	0.004	9.870
		0.2	8.8589	0.057	8.8635	0.006	8.864
		0.4	7.8046	0.056	7.8086	0.006	7.809
		0.6	6.6752	0.057	6.6785	0.008	6.679
		0.8	5.4078	0.060	5.4101	0.017	5.411
		1	3.6647	-	3.6588	-	-

Табела 7: Бездимензиони интензитет критичне силе извијања  $\lambda_p$  хомогеног еластичног штапа линеарно променљиве ширине и константне висине попречног пресека при различитим контурним условима

Слични проблеми при решавању парцијалних диференцијалних једначина код континуалних модела јављају се и при одређивању кружних фреквенција осциловања. У референци [9] приближно решење ових парцијалних диференцијалних јед-

начина је претпостављено у облику Bessel-ових функција, па је на тај начин добијена приближна карактеристична једначина описаног штапа. У табели 8 је приказано поређење прве три бездимензионе кружне фреквенције попречних осцилација штапа добијених применом предложеног приступа, методе коначних елемената и приступа из референце [9] за случај штапа који је на левом крају уклештен, а на десном слободан. Може се приметити да постоји веома добро слагање резултата добијених применом све три методе. Такође, резултати добијени предложеним приступом су нешто бољи у односу на резултате коначних елемената при одређивању прве бездимензионе кружне фреквенције, док код одређивања друге и треће бездимензионе кружне фреквенције метод коначних елемената даје за нијансу боље резултате у односу на предложени метод крутих сегмената. Тако на пример, за случај када је  $c_b = 1$ , релативне грешке, које настају код примене предложеног приступа при одређивању прве три бездимензионе кружне фреквенције, износе  $\varepsilon_1 = 0.066$  [%],  $\varepsilon_2 = 0.180$  [%] и  $\varepsilon_3 = 0.349$  [%], док код примене методе коначних елемената ове грешке износе  $\varepsilon_1 = 0.072$  [%],  $\varepsilon_2 = 0.145$  [%] и  $\varepsilon_3 = 0.227$  [%].

У табели 9 су приказане прве три бездимензионе кружне фреквенције слободних попречних осцилација разматраног штапа добијене применом изложеног приступа и методе коначних елемената за остале контурне услове (уклештење - цилиндрични зглоб, уклештење - уклештење, и цилиндричан зглоб - цилиндричан зглоб) при  $n = 40$ . Као и до сада, постоји веома добро слагање резултата између ова два приступа.

На основу резултата из табела 8 и 9 може се закључити да промена линеарног степена закошења  $c_b$  значајно утиче на прве три кружне фреквенције. Притом се код прва два разматрана контурна услова (уклештење - слободан и уклештење - цилиндричан зглоб) уочава повећање вредности фреквенција са повећањем  $c_b$ , док се код друга два контурна услова примећује смањење вредности фреквенција са повећањем  $c_b$ . Такође, очигледно је да промена степена линеарног закошења  $c_b$  највише утиче на промену фреквенције код првог случаја контурних услова (уклештење - слободан). На пример, за  $c_b = 0$  вредности прве три бездимензионе кружне фреквенције су  $\bar{\omega}_1 = 3.51609$ ,  $\bar{\omega}_2 = 22.0269$  и  $\bar{\omega}_3 = 61.6235$ , док за  $c_b = 1$  ове вредности износе  $\bar{\omega}_1 = 7.15186$ ,  $\bar{\omega}_2 = 30.9852$  и  $\bar{\omega}_3 = 75.2235$ .



Контурни услови		Бездимензионе кружне фреквенције								
		$\bar{\omega}_1$		$\bar{\omega}_2$		$\bar{\omega}_3$				
лево	десно	Предл. приступ $n = 40$	Кон. елем. [24] $n = 40$	Реф. [9]	Предл. приступ $n = 40$	Кон. елем. [24] $n = 40$	Реф. [9]			
Укљештење слободан	0	3.51609 (0.003 %)	3.51602 (0.0004 %)	3.5160	22.0269 (0.037 %)	22.0345 (0.0023 %)	22.035	61.6235 (0.119 %)	61.6973 (0.0005 %)	61.697
	0.1	3.63103 (0.001 %)	3.63095 (0.0014 %)	3.6310	22.2459 (0.037 %)	22.2535 (0.021 %)	22.254	61.8343 (0.122 %)	61.9083 (0.003 %)	61.910
	0.3	3.91585 (0.004 %)	3.91574 (0.007 %)	3.9160	22.7764 (0.042 %)	22.7842 (0.008 %)	22.786	62.3567 (0.127 %)	62.4313 (0.008 %)	62.436
	0.5	4.31467 (0.012 %)	4.31454 (0.015 %)	4.3152	23.5075 (0.049 %)	23.5155 (0.015 %)	23.519	63.1134 (0.135 %)	63.1888 (0.016 %)	63.199
	0.7	4.93055 (0.023 %)	4.93036 (0.027 %)	4.9317	24.6712 (0.064 %)	24.6795 (0.03 %)	24.687	64.4283 (0.153 %)	64.5049 (0.034 %)	64.527
	0.9	6.06776 (0.043 %)	6.06744 (0.049 %)	6.0704	27.2695 (0.108 %)	27.2784 (0.075 %)	27.299	67.9719 (0.21 %)	68.052 (0.092 %)	68.115
	1	7.15186 (0.066 %)	7.15134 (0.072 %)	7.1565	30.9852 (0.180 %)	30.9959 (0.145 %)	31.041	75.2235 (0.349 %)	75.3159 (0.227 %)	75.487

Табела 8: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при слободним попречним осцилацијама хомогеног штапа линеарно променљиве ширине и константне дебљине попречног пресека за случај када је штап на левом крају укљештен а на десном слободан

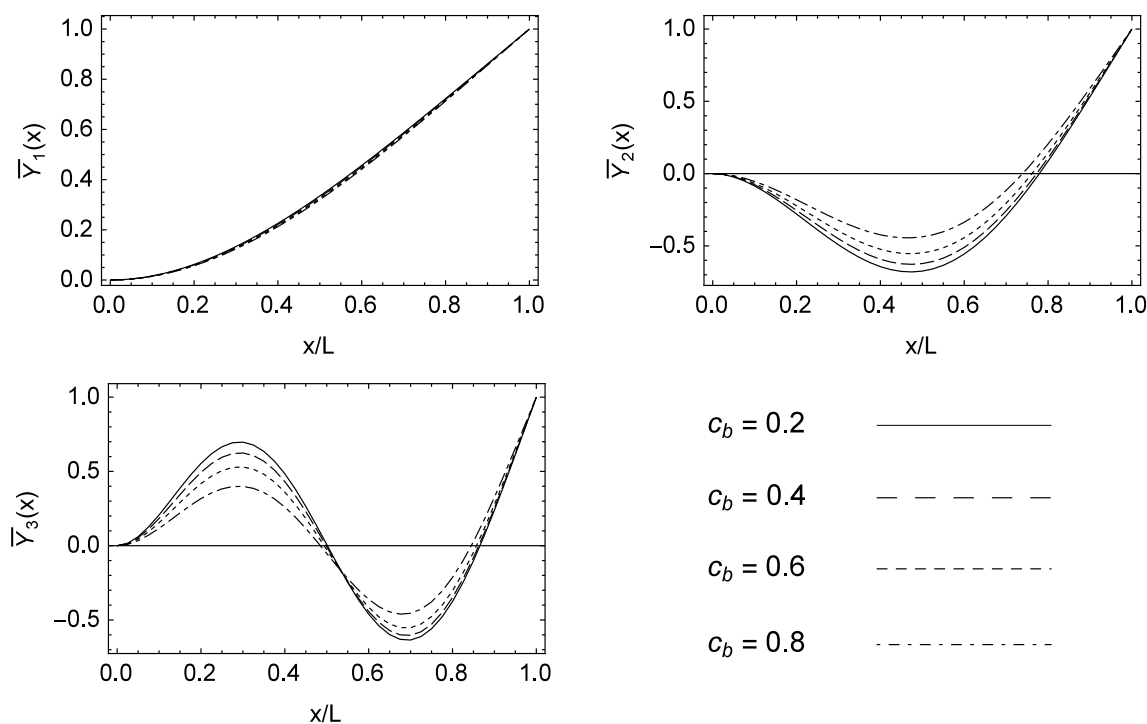
Контурни услови		$c_b$	Бездимензионе кружне фреквенције					
			$\bar{\omega}_1$		$\bar{\omega}_2$		$\bar{\omega}_3$	
			Предл. приступ	Кон. ел. [24]	Предл. приступ	Кон. ел. [24]	Предл. приступ	Кон. ел. [24]
лево	десно	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	
Укљештење	Цил. зглоб	0	15.4136	15.4182	49.9091	49.9649	103.993	104.248
		0.1	15.5226	15.5273	50.0111	50.067	104.095	104.35
		0.3	15.7634	15.7681	50.2355	50.2916	104.319	104.575
		0.5	16.0384	16.0431	50.4952	50.5515	104.585	104.841
		0.7	16.3453	16.3500	50.7996	50.8559	104.923	105.179
		0.9	16.6292	16.6336	51.0796	51.1352	105.323	105.577
		1	16.5893	16.5934	50.6937	50.7465	104.678	104.922
Укљештење	Укљештење	0	22.3661	22.3733	61.5989	61.6729	120.593	120.904
		0.1	22.3616	22.3687	61.5928	61.6667	120.586	120.897
		0.3	22.3144	22.3215	61.5287	61.6025	120.516	120.827
		0.5	22.1755	22.1826	61.3362	61.4097	120.304	120.614
		0.7	21.8272	21.8341	60.8293	60.9018	119.726	120.034
		0.9	20.7927	20.799	59.1386	59.2077	117.621	117.92
		1	18.5373	18.5423	54.8076	54.8681	111.373	111.645
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0	9.86707	9.8696	39.4379	39.4784	88.6215	88.8266
		0.1	9.86599	9.86853	39.4389	39.4794	88.6231	88.8282
		0.3	9.85485	9.85738	39.449	39.4895	88.6392	88.8443
		0.5	9.82252	9.82503	39.4755	39.516	88.6848	88.8898
		0.7	9.74449	9.74694	39.5222	39.5625	88.7844	88.989
		0.9	9.54056	9.54288	39.5129	39.5524	88.9105	89.1131
		1	9.25978	9.26192	39.0642	39.1016	88.2067	88.401

Табела 9: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при слободним попречним осцилацијама хомогеног штапа линеарно променљиве ширине и константне дебљине попречног пресека при различитим контурним условима

До највеће промене долази код прве кружне фреквенције која се више него удвостручује, док се друга кружна фреквенција повећава за скоро 30 [%] а трећа за нешто више од 20 [%].

Прва три нормализована главна облика осциловања који одговарају фреквенцијама осциловања при  $c_b = 0.2, 0.4, 0.6$  и  $0.8$  за први случај контурних услова штапа (укљештење - слободан) приказана су на слици 5.10. Може се уочити да се први главни облици осциловања за све четири наведене вредности параметра  $c_b$  готово поклапају. Овде треба имати на уму да се ради о нормализованим главним облицима осциловања, тако да промена параметра  $c_b$  свакако утиче на промену првог

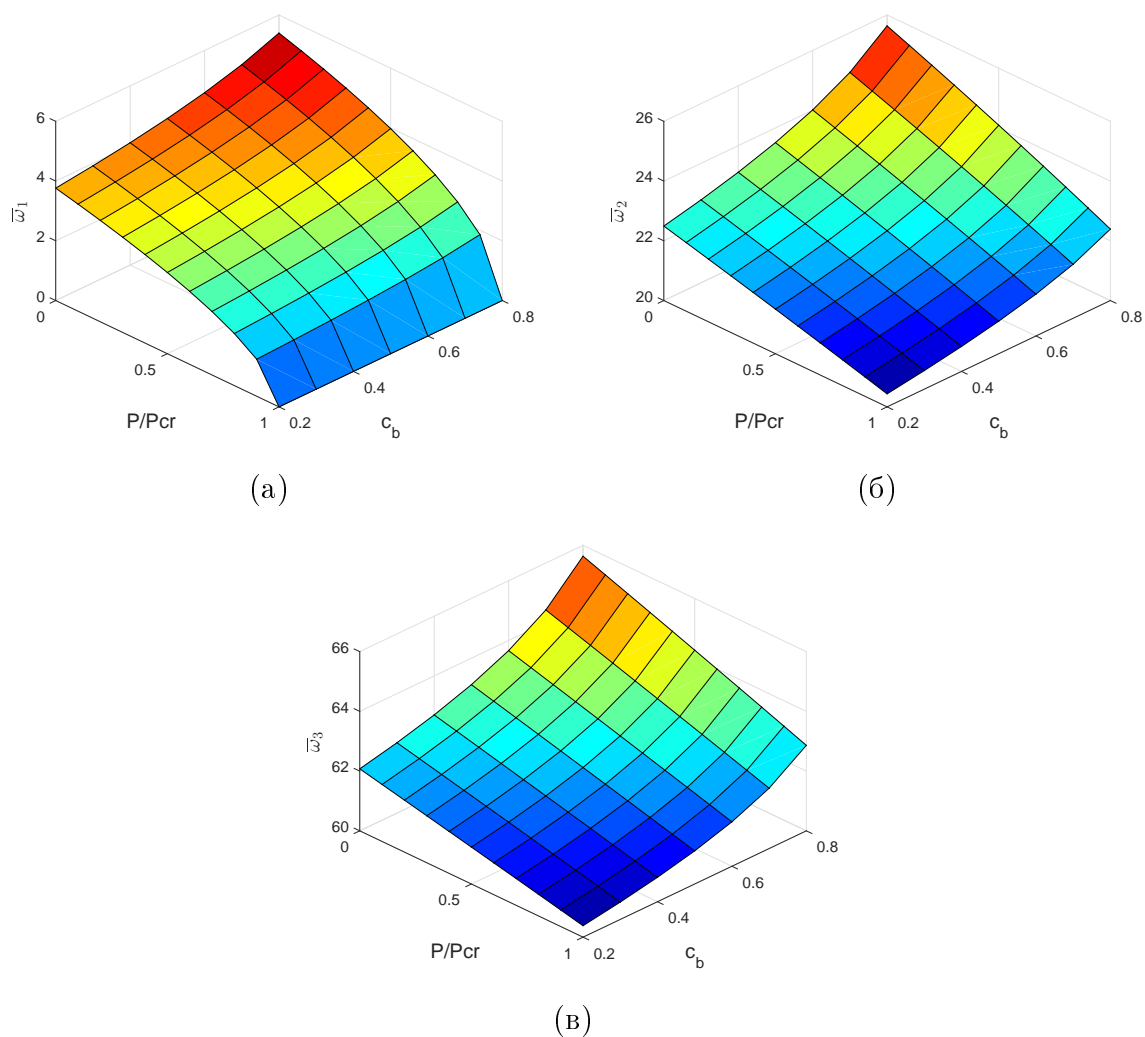
главног облика осциловања, али тако да се за сваку вредност координате  $x/L$  вредност облика осциловања  $Y_1(x)$  пропорционално повећава са повећањем параметра  $c_b$ , па се након нормализације ови облици осциловања готово поклапају. Код другог и трећег главног облика осциловања то није случај, па се може јасно видети промена облика осциловања са повећањем параметра  $c_b$ .



Слика 5.10: Прва три главна облика осциловања при слободним попречним осцилацијама хомогеног штапа који је на левом крају уклештен а на десном слободан у зависности од степена линеарног закошења  $c_b$

До сада су у овом примеру разматране кружне фреквенције слободних попречних осцилација хомогеног штапа, при чему је претпостављено да на штап не делују аксијалне притисне силе. За случај конзоле, утицај аксијалне притисне силе  $P$  на вредност кружних фреквенција попречних осцилација штапа при различитим степенима линеарног закошења  $c_b$  приказан је на слици 5.11 (а) - (в) у облику површинског графикана. Овде се, као и у прошлом примеру, разматрају интензитети аксијалне притисне силе који се налазе између нуле и критичног интензитета силе извијања  $P_{cr}$ , чије су бездимензионе вредности приказане у табели 7 за сваки од задатих параметара линеарног закошења  $c_b$ . Анализом поменутог графикана најпре се могу

визуелно потврдити претходно изнесени закључци о утицају параметра  $c_b$  на вредности кружних фреквенција. Са друге стране, када на штап делују аксијалне притисне силе, са повећањем интензитета ових сила вредности кружних фреквенција се смањују, при чему је смањење највише изражено код прве фреквенције. Када интензитет аксијалне притисне силе  $P$  достигне вредност интензитета критичне силе извијања  $P_{cr}$ , вредност прве кружне фреквенције је једнака нули при свакој вредности параметра линеарног закошења  $c_b$ .



Слика 5.11: Утицај вредности интензитета аксијалне притисне силе  $P$  и степена линеарног закошења  $c_b$  ширине попречног пресека штапа на прве три бездимензионе кружне фреквенције осциловања штапа за случај конзоле

#### 5.4.4 Двоструко линеарно закошени хомогени штап квадратног попречног пресека

У овом примеру ће бити разматран двоструко закошени хомогени еластични штап квадратног пресека чија се дужина странице мења сагласно закону промене  $b(x) = h(x) = b_0(1 - c_b x/L)$ . Сви остали параметри штапа су исти као у претходном примеру. Најпре су у табели 10 упоређене вредности интензитета бездимензионе критичне силе извијања добијене применом изложеног приступа, методе коначних елемената [24] и приступа из референце [67], у којој су парцијалне диференцијалне једначине приближно решене употребом Bessel-ових функција. Иако је геометрија штапа који је овде разматран сложенија у односу на претходни пример, може се видети да је предложени приступ и у овом случају ефикасан. Штавише, највећа вредност релативне грешке при одређивању критичне силе извијања се јавља у случају када је  $c_b = 0.8$  код обострано уклештеног штапа, и она за предложени приступ износи  $0.475$  [%], док применом методе коначних елемената ова грешка износи  $1.246$  [%]. Дакле, за овај случај контурних услова резултати предложеног приступа су нешто бољи у односу на метод коначних елемената.

Затим је извршено поређење вредности прве три бездимензионе кружне фреквенције при попречним осцилацијама разматраног штапа добијених применом изложеног приступа, методе коначних елемената [24] и методе динамичке дискретизације [68] при  $c_b = 0.3, 0.6$  и  $0.9$ . Резултати поређења приказани су у табели 11. Притом је претпостављено да су резултати који су добијени у референци [68] најтачнији, јер је у поменутој референци извршено поређење са неколико релевантних извора, па су релативне грешке изражене у односу на ове резултате. Добијени резултати при коришћењу методе крутих сегмената предложене у овом раду су готово једнаке тачности као и у претходном примеру. Релативна грешка код предложеног приступа при одређивању прве бездимензионе кружне фреквенције је и даље мања у односу на исту грешку код примене методе коначних елемената. Код друге и треће бездимензионе кружне фреквенције метод коначних елемената даје нешто боље резултате у односу на предложени метод. Треба нагласити да при  $n = 40$  за случај конзоле ни једна од приказаних релативних грешака не прелази  $1$  [%].

Контурни услови		$c_b = c_h$	$n = 40$				Реф. [67]
			Предл. приступ		Коначни елементи [24]		
			$\lambda_p$	$\varepsilon_p$ [%]	$\lambda_p$	$\varepsilon_p$ [%]	
Укљештење Слободан	Слободан	0.2	1.8832	0.04	1.8834	0.032	1.884
		0.4	1.3093	0.019	1.3093	0.019	1.309
		0.6	0.7568	0.023	0.7567	0.044	0.757
		0.8	0.2648	0.082	0.2644	0.223	0.265
Укљештење Цил. зглоб	Цил. зглоб	0.2	12.9072	0.115	12.9213	0.006	12.922
		0.4	7.2591	0.137	7.2682	0.012	7.269
		0.6	3.225	0.153	3.2306	0.018	3.230
		0.8	0.8051	0.239	0.8081	0.132	0.807
Укљештење Укљештење	Укљештење	0.2	25.2125	0.212	25.2680	0.008	25.266
		0.4	14.1776	0.242	14.2179	0.041	14.212
		0.6	6.2949	0.335	6.3266	0.169	6.316
		0.8	1.5665	0.475	1.5936	1.246	1.574
Цил. зглоб Цил. зглоб	Цил. зглоб	0.2	6.3134	0.057	6.3166	0.007	6.317
		0.4	3.5515	0.042	3.5532	0.005	3.553
		0.6	1.5788	0.01	1.5793	0.02	1.579
		0.8	0.3953	0.087	0.3951	0.005	0.395

Табела 10: Бездимензионе вредности интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p$  двоструко линеарно закошеног хомогеног еластичног штапа при различитим контурним условима

У табели 12 су упоређене вредности прве три бездимензионе кружне фреквенције добијене применом предложеног приступа и методом коначних елемената при попречним осцилацијама штапа за преостала три контурна услова. У референци [68] нису доступни резултати за наведене контурне услове. Анализом резултата из ове табеле може се видети добро слагање резултата добијених применом поменуто два приступа.

На слици 5.12 су приказана прва три нормализована главна облика осциловања двоструко линеарно закошеног штапа при различитим вредностима параметра двоструког линеарног закошења  $c_b$  за случај конзоле (укљештење-слободан). Јасно је да промена параметра закошења  $c_b$  и код ове врсте штапова значајно утиче на облике осциловања.

Контурни услови		Бездимензионе кружне фреквенције											
		$\bar{\omega}_1$				$\bar{\omega}_2$				$\bar{\omega}_3$			
лево	десно	Предл. приступ $n = 40$	Кон. елем. [24] $n = 40$	Реф. [68]	Предл. приступ $n = 40$	Кон. елем. [24] $n = 40$	Реф. [68]	Предл. приступ $n = 40$	Кон. елем. [24] $n = 40$	Реф. [68]	Предл. приступ $n = 40$	Кон. елем. [24] $n = 40$	Реф. [68]
	0.3	4.0663 (0.015 %)	4.0662 (0.018 %)	4.0669	20.5444 (0.054 %)	20.5513 (0.021 %)	20.5555	53.9394 (0.144 %)	54.0038 (0.025 %)	54.0172			
Уклетштење	0.6	5.0071 (0.038 %)	5.0067 (0.045 %)	5.0090	19.0487 (0.089 %)	19.0541 (0.061 %)	19.0657	45.6578 (0.292 %)	45.7110 (0.176 %)	45.7917			
	Слободан	0.9	7.1959 (0.125 %)	7.1943 (0.147 %)	7.2049	18.6297 (0.29 %)	18.6279 (0.299 %)	18.6838	36.9665 (0.68 %)	36.9919 (0.612 %)	37.2195		

Табела 11: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при попречним осцилацијама двоструко линеарно закошеног хомогеног еластичног штала квадратног попречног пресека за случај штала чији је леви крај уклетштен а десни слободан

Контурни услови		$c_b$	Бездимензионе кружне фреквенције					
			$\bar{\omega}_1$		$\bar{\omega}_2$		$\bar{\omega}_3$	
			Предл. приступ	Кон. ел. [24]	Предл. приступ	Кон. ел. [24]	Предл. приступ	Кон. ел. [24]
лево	десно	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	$n = 40$	
Уклептење	Цил. зглоб	0.3	13.9558	13.9601	43.0734	43.1228	88.7054	88.9276
		0.6	12.2264	12.2301	35.5084	35.5509	71.6893	71.8778
		0.9	9.9049	9.8870	26.0632	26.0954	50.2043	50.3554
Уклептење	Уклептење	0.3	18.9187	18.9247	52.0271	52.0896	101.7880	102.052
		0.6	15.1937	15.1984	41.4499	41.5002	80.8098	81.0239
		0.9	10.8244	10.8268	28.3762	28.4108	54.2848	54.4430
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0.3	8.2481	8.2502	33.3669	33.4012	74.8943	75.0685
		0.6	6.2071	6.2085	26.8236	26.8511	59.8476	59.9899
		0.9	3.0520	3.0525	19.0716	19.0893	41.3749	41.4804

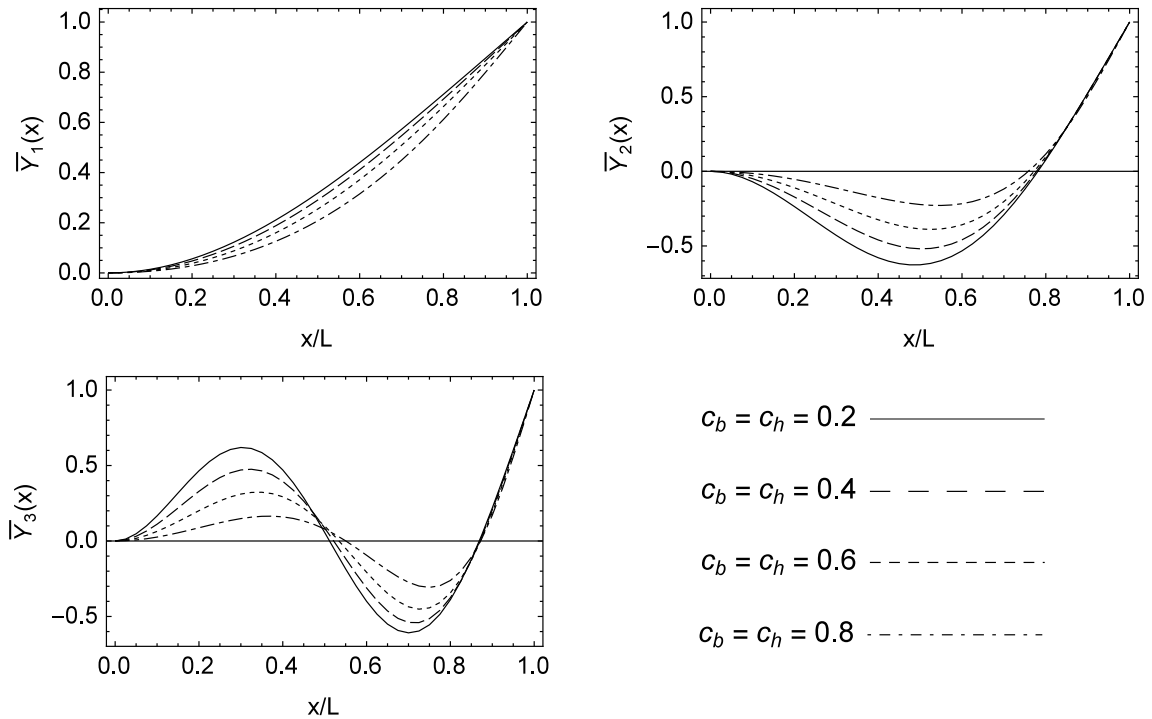
Табела 12: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при слободним попречним осцилацијама двоструко линеарно закошеног хомогеног еластичног штапа квадратног попречног пресека при различитим контурним условима

Притом, ако се добијени главни облици осциловања упореде са облицима осциловања код штапа из претходног примера (линеарно закошена ширина и константна висина попречног пресека), очигледно је да додатно линеарно закошење висине попречног пресека доводи до још веће разлике код облика осциловања за различите вредности параметара закошења  $c_b$ . Такође, за разлику од претходног примера, овде не долази до преклапања нормализованих првих главних облика осциловања који одговарају различитим вредностима параметара закошења, већ се јасно виде разлике.

Утицај интензитета аксијалних притисних сила  $P$  и параметра двоструког линеарног закошења  $c_b$  на промену прве три бездимензионе кружне фреквенције разматраног штапа за случај конзоле приказан је на слици 5.13(а) - (в) у виду површинског графикана. Претпостављено је да се вредности интензитета аксијалне притисне силе налазе у интервалу од нуле до интензитета критичне силе извијања  $P_{cr}$ , док се параметар двоструког линеарног закошења  $c_b$  мења од 0.2 до 0.8. Притом су вредности бездимензионог интензитета критичне силе извијања за сваки од разматраних вредности параметара  $c_b$  већ одређене у табели 10. Ако се сада упореде графикони

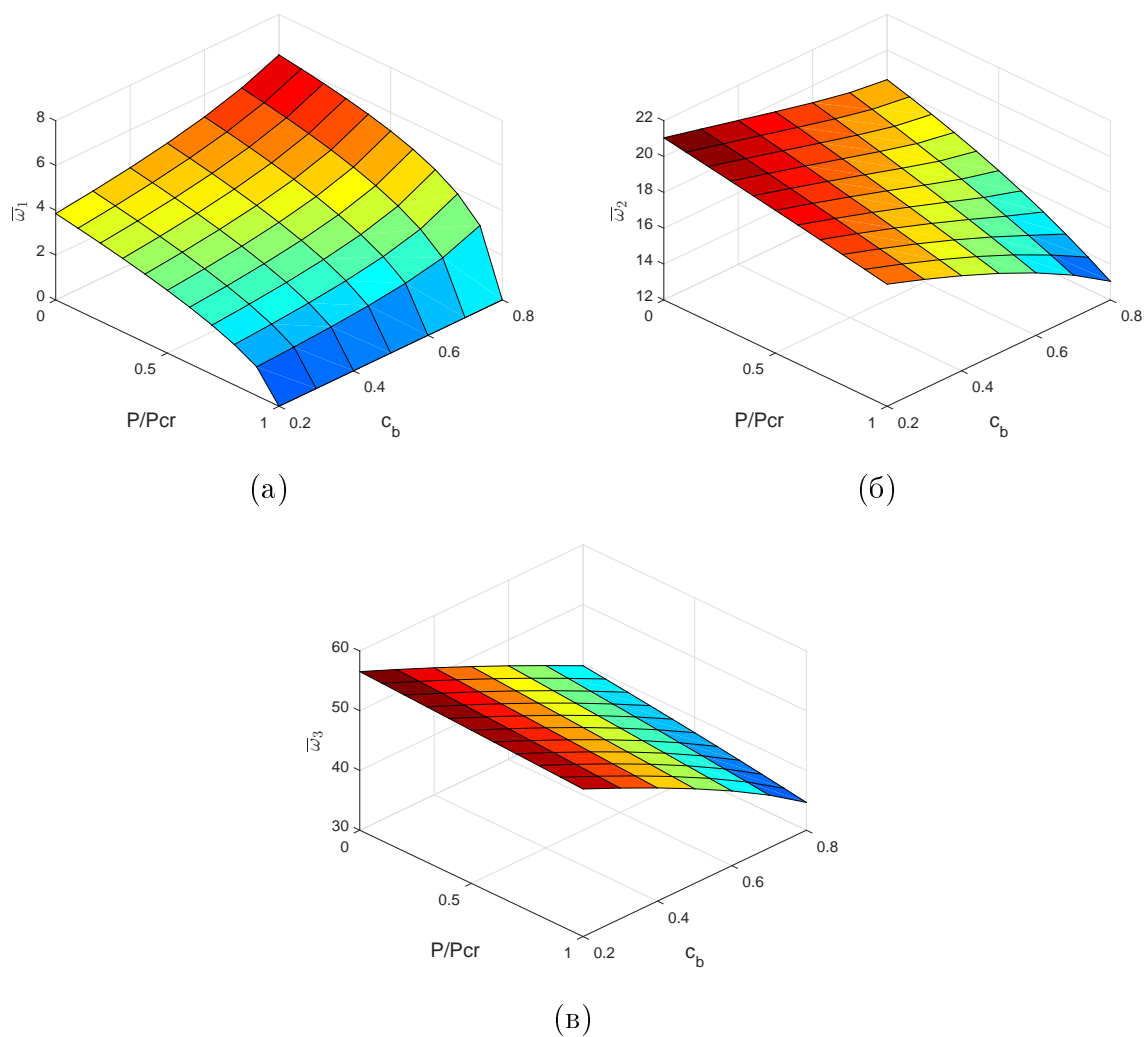


приказани на сликама 5.11 и 5.13 може се приметити да увођење двоструког линеарног закошења дебљине и ширине попречног пресека дуж штапа, у односу на штап са константном дебљином и линеарно променљивом ширином, значајно мења начин промене бездимензионих кружних фреквенција слободних попречних осцилација.



Слика 5.12: Прва три нормализована главна облика осциловања при попречним осцилацијама двоструко линеарно закошене еластичне конзоле у зависности од степена закошења  $c_b$  и  $c_h$

Прва бездимензиона кружна фреквенција и даље расте са порастом параметра двоструког линеарног закошења, слично као у претходном примеру. Међутим, друга и трећа бездимензиона кружна фреквенција се смањују са порастом параметра двоструког линеарног закошења  $c_b$ , што није био случај у претходном примеру. Са друге стране, утицај интензитета аксијалних притисних сила  $P$  на вредност бездимензионих фреквенција се није променио у односу на претходни пример. Уопштено говорећи, вредности сваке од три приказане бездимензионе кружне фреквенције се смањују са повећањем интензитета аксијалне притисне силе  $P$ . Када вредност ове силе достигне вредност интензитета критичне силе извијања прва бездимензиона кружна фреквенција постаје једнака нули за сваки од параметара  $c_b$ .



Слика 5.13: Утицај вредности интензитета аксијалне притисне силе  $P$  и степена двоструког линеарног закошења  $c_b$  на прве три бездимензионе кружне фреквенције осциловања конзоле

### 5.4.5 Функционално градијентни штап променљивог попречног пресека

Овде ће бити разматран штап квадратног попречног пресека са линеарном променом дужине страница, који је већ детаљно описан у претходном примеру. Разлика у односу на поменути пример је што се овде и параметри материјала штапа (модул еластичности и густина) мењају сагласно задатим степеним функцијама

$$E(x) = E_0 \sum_{i=0}^{\alpha} \left(\frac{x}{L}\right)^i \quad (5.29)$$

и

$$\rho(x) = \rho_0 \sum_{i=0}^{\beta} \left(\frac{x}{L}\right)^i, \quad (5.30)$$

респективно, где су  $E_0$  и  $\rho_0$  вредности модула еластичности и густине материјала на левом крају штапа, а  $\alpha$  и  $\beta$  дефинишу највећи степен поменутих функција. Параметри материјала  $E_0$  и  $\rho_0$ , као и димензија страница попречног пресека  $b_0$  и  $h_0$  на левој страни штапа су исти као у претходним примерима.

У табели 13 приказане су бездимензионе вредности интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p$  при различитим вредностима параметара линеарног закошења штапа  $c_b$ , и за  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2\alpha$  при различитим контурним условима. Бездимензионе вредности интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p$  добијене предложеним приступом при  $n = 40$  упоређене су са резултатима из референце [69] где је за решавање диференцијалних једначина коришћен тзв. DTEM метод помоћу којег се добија приближно решење у облику Тејлоровог реда. Поређењем резултата приказаних у табели 13 може се видети да постоји веома добро слагање резултата поменута два приступа. Чак и у случају обострано уклештеног штапа, највећа вредност апсолутне грешке предложеног приступа је 0.58% при  $c_b = c_h = 0.8$ . Ако се сада упореде вредности из табела 10 и 13, може се видети да се увођењем функционално градијентног материјала чији су параметри описани изразима (5.29) и (5.30) постиже значајно повећање интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p$  двоструко линеарно закошеног штапа.

Поређење вредности прве две бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2$ ) попречних осцилација добијене предложеним приступом при  $n = 40$  и резултатима из референце [69] приказане су у табели 14. И овде постоји веома добро слагање

результата ова два приступа. Највећа вредност апсолутне грешке је и овде у случају обострано уклештеног штапа при  $c_b = c_h = 0.8$  и износи  $0.23\%$ .

Контурни услови		$c_b = c_h$	Предл. приступ		Реф. [69]
лево	десно		$\lambda_p$	$\varepsilon_p$ [%]	
Уклештење	Слободан	0	3.1175	0.01	3.1177
		0.2	2.4636	0.01	2.4638
		0.4	1.7988	-	1.7988
		0.6	1.1211	0.03	1.1208
		0.8	0.4449	0.22	0.4439
Уклештење	Цил. зглоб	0	29.4201	-	-
		0.2	19.3157	-	-
		0.4	11.2061	-	-
		0.6	5.1797	-	-
		0.8	1.3686	-	-
Уклештење	Уклештење	0	57.2738	0.21	57.3940
		0.2	37.5274	0.20	37.6023
		0.4	21.7363	0.21	21.7813
		0.6	10.0377	0.26	10.0638
		0.8	2.6503	0.58	2.6656
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0	14.5036	0.05	14.5112
		0.2	9.5925	0.05	9.5971
		0.4	5.6206	0.04	5.6228
		0.6	2.6335	0.01	2.6338
		0.8	0.7086	0.11	0.7078

Табела 13: Бездимензиона вредност интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p$  дво-струко линеарно закошеног функцијално градијентног еластичног штапа при различитим контурним условима и за  $n = 40$

При  $c_b = 0$  могу се упоредити вредности прве две кружне фреквенције штапа константног попречног пресека пре и након увођења функционално градијентних материјала у анализу, поређењем резултата из табела 4 и 14. Јасно је да се коришћењем разматраног функционално градијентног материјала долази до знатног смањења вредности прве кружне фреквенције, док се вредност друге кружне фреквенције повећава. Разлог за овакво понашање кружних фреквенција је што је функ-

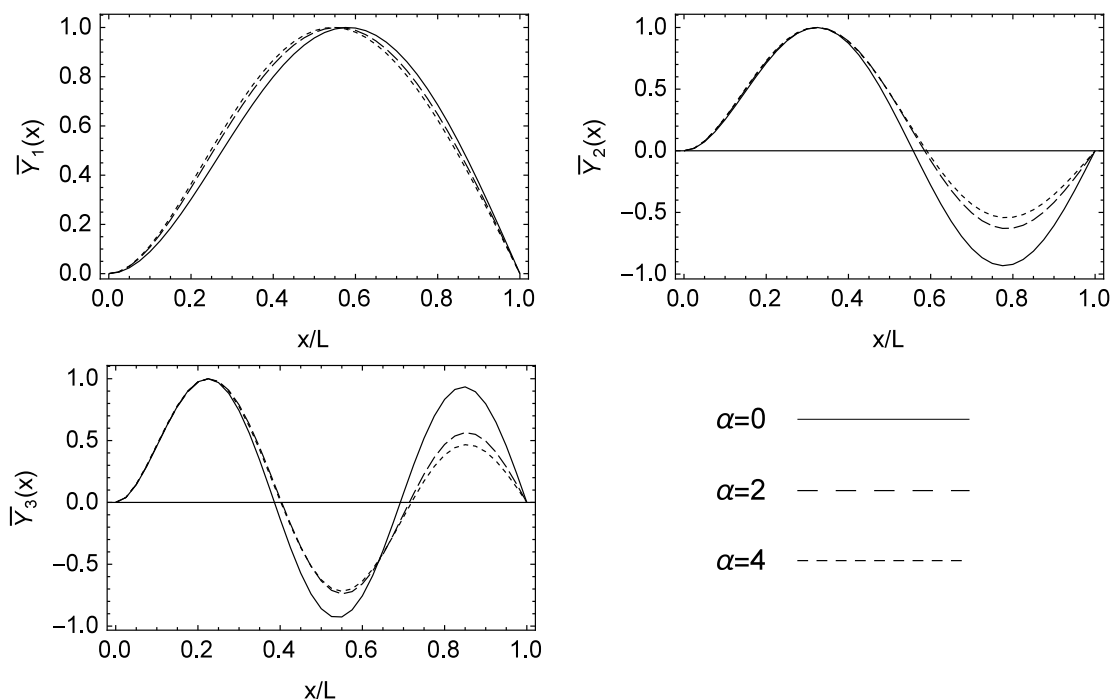
ција (5.30) која дефинише густину материјала штапа двоструко вишег реда од реда функције (5.29) којом је описана промена модула еластичности материјала штапа.

Контурни услови		$c_b = c_h$	Бездимензионе кружне фреквенције			
			$\bar{\omega}_1$		$\bar{\omega}_2$	
лево	десно		Предл. приступ	Реф. [69]	Предл. приступ	Реф. [69]
Укљештење	Слободан	0	2.4261 (0.02 %)	2.4256	18.6007 (0.02 %)	18.6041
		0.4	3.0484 (0.01 %)	3.0486	16.8498 (0.04 %)	16.8571
		0.8	4.5665 (0.07 %)	4.5695	15.2756 (0.13 %)	15.2954
Укљештење	Цил. зглоб	0	13.2466 -	-	45.0308 -	-
		0.4	11.4541 -	-	36.2212 -	-
		0.8	8.9601 -	-	25.7772 -	-
Укљештење	Укљештење	0	20.4654 (0.03 %)	20.4721	56.4801 (0.12 %)	56.5482
		0.4	15.8333 (0.01 %)	15.8349	43.9917 (0.10 %)	44.0359
		0.8	10.5543 (0.23 %)	10.5301	29.2610 (0.13 %)	29.2239
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0	9.0258 (0.03 %)	9.0285	36.3321 (0.108 %)	36.3715
		0.4	7.1236 (0.03 %)	7.1254	28.4700 (0.106 %)	28.5001
		0.8	4.2278 (0.01 %)	4.2281	19.5077 (0.10 %)	19.5281

Табела 14: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2$ ) двоструко линеарно за-кошеног функцијално градијентног еластичног штапа при различитим контурним условима и за  $n = 40$

На слици 5.14 је приказан утицај параметра  $\alpha$  на прва три нормализована главна облика осциловања функционално градијентног штапа константног пресека при чему

је леви крај штапа уклештен а десни зглобно ослоњен. Очигледно је да је утицај параметра  $\alpha$  постаје значајан на другој половини штапа, тј. када је  $0.5 \leq x/L \leq 1$ , што је такође последица двоструко већег степена функције промене густине материјала у односу на модул еластичности материјала. Ова појава посебно долази до изражаја при већим вредностима параметра  $\alpha$  и подужне координате  $x$ .

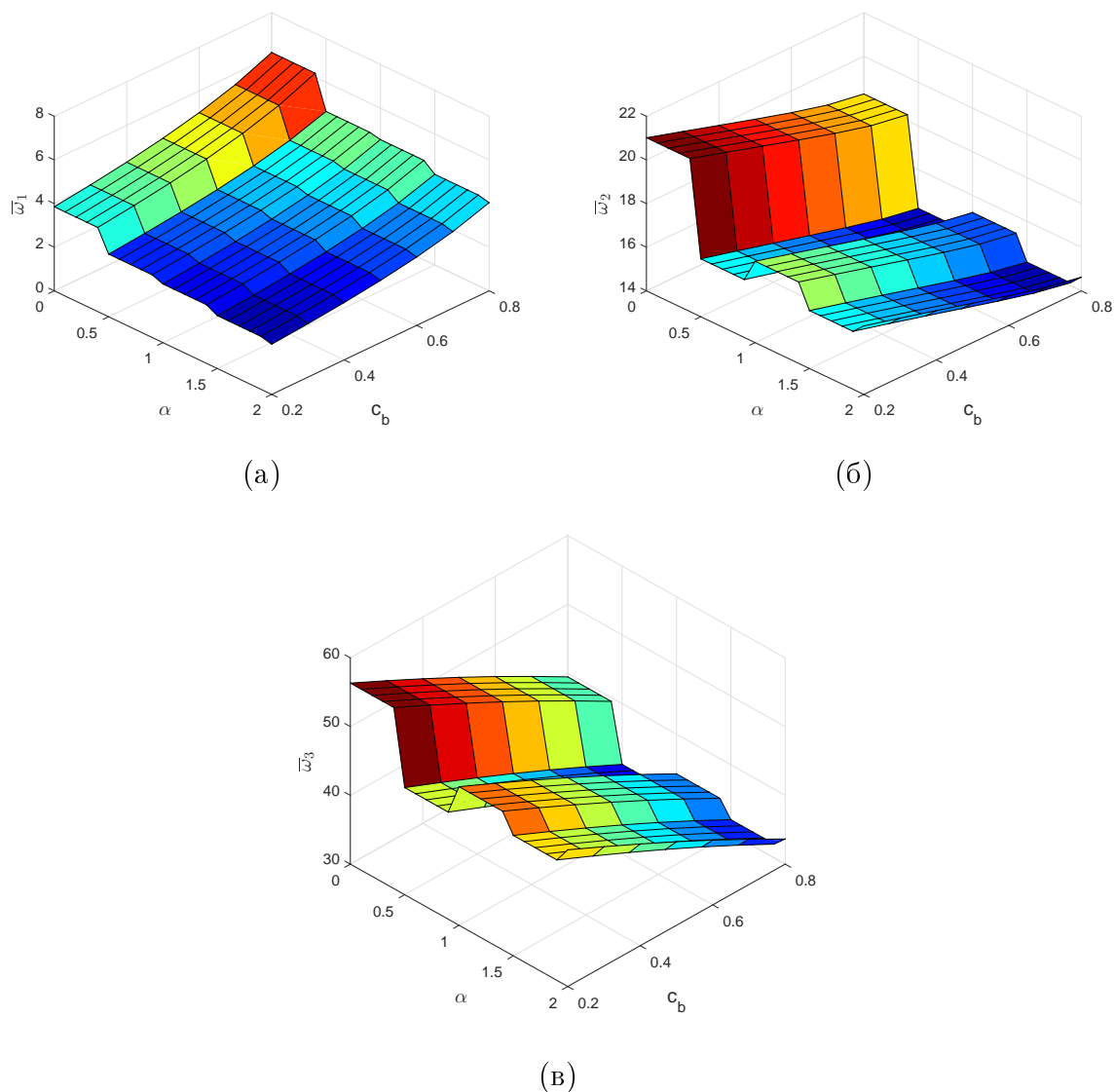


Слика 5.14: Прва три нормализована главна облика осциловања при попречним осцилацијама функционално градијентног штапа константног попречног пресека ( $c_b = 0$ ), који је на левој страни уклештен а на десној зглобно ослоњен, у зависности од параметра  $\alpha$

Коначно, на слици 5.15 (а)-(в) је приказан утицај параметра  $\alpha$  и степена линеарног закошења  $c_b$  на прве три бездимензионе кружне фреквенције конзоле. Код анализе двоструко закошеног штапа показано је да се са повећањем параметра  $c_b$ , вредност прве бездимензионе кружне фреквенције повећава, док се вредност друге две бездимензионе кружне фреквенције смањује. Такав тренд промене вредности кружних фреквенција са порастом параметра  $c_b$  се и овде уочава. Међутим, утицај параметра  $\alpha$  на вредности прве три бездимензионе кружне фреквенције је нешто сложенији. Код прве кружне фреквенције са повећањем параметра  $\alpha$  долази до монотоног опадања вредности. Супротно томе, код друге и треће кружне фреквенције

долази до наизменичне промене тренда раста и опадања вредности приближно на сваких  $\alpha = 0.5$ .

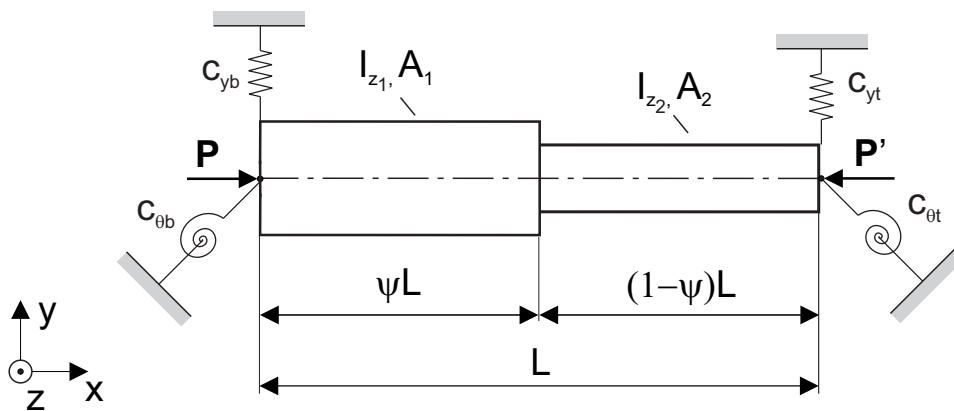
На крају овог примера се може доћи до закључка да се увођењем функционално градијентних материјала код штапова променљивог попречног пресека оставља простор за вишепараметарску синтезу при добијању жељених динамичких карактеристика.



Слика 5.15: Утицај вредности параметра  $\alpha$  и степена линеарног закошења  $c_b$  попречног пресека штапа на прве три бездимензионе кружне фреквенције попречних осцилација конзоле

### 5.4.6 Хомогени еластични штап са степенастом променом попречног пресека

Нека је дат хомогени еластични штап са степенастом променом попречног пресека приказан на слици 5.16. Штап се састоји из два различита сегмената чије су дужине  $L_1 = \psi L$  и  $L_2 = (1 - \psi)L$ , где је  $\psi$  коефицијент расподеле дужине а  $L$  укупна дужина штапа. Попречни пресек штапа је правоугаони и константан на целој дужини сваког од сегмената, при чему је ширина попречних пресека оба сегмента једнака, тј.  $b_1 = b_2$ , а за висине попречних пресека сегмената важи да је  $h_2/h_1 = \sigma$ , где је  $\sigma$  коефицијент односа висина попречних пресека сегмената. Параметри материјала штапа су једнаки за оба сегмента и важи да је  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  и  $E_1 = E_2 = E$ . Штап је на својим крајевима оптерећен аксијалним притисним силама интензитета  $P$  и еластично ослоњен помоћу цилиндричних и спиралних опруга. Крутости цилиндричних и спиралних опруга на левом и десном крају штапа су  $c_{yb}$ ,  $c_{\theta b}$  и  $c_{yt}$ ,  $c_{\theta t}$ , респективно.



Слика 5.16: Еластично ослоњен хомогени штап са степенастом променом попречног пресека

У овом примеру ће бити разматран еластични штап укупне дужине  $L = 1$  [m], ширине и висине попречног пресека првог сегмента  $b_1 = 0.01$  [m] и  $h_1 = 0.01$  [m], респективно. Параметри материјала штапа, густина  $\rho$  и модул еластичности  $E$ , су исти као и у поглављу 5.4.1. Овде је број примарних еластичних сегмената задат и износи  $n = 2$ , док се повећањем броја секундарних сегмената  $k$  постиже жељена тачност, као што је већ наглашено у поглављу 3.4.



У табели 15 приказане су бездимензионе вредности интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p = P_{cr}L / (E \cdot I_{z1})$  разматраног штапа при различитим вредностима параметра  $\psi$  и за различите контурне услове. Поред резултата добијених коришћењем предложеног приступа, приказани су и резултати из референце [39] добијени применом Ненску-јевог метода крутих сегмената (НВМ), као и резултати из референце [21] где је за решавање парцијалних диференцијалних једначина коришћен варијациони итерациони метод. Ови резултати су посматрани као референтни у односу на које су поређени резултати добијени предложеним приступом и НВМ методом. Приказане су апсолутне грешке предложеног приступа и НВМ метода у односу на резултате из референце [39] при истом броју коришћених крутих сегмената ( $k \cdot n = \{40, 100\}$ ). Може се уочити да постоји веома добро слагање резултата добијених применом ова два метода као и да су они блиски резултатима из референце [39]. Такође, са повећањем броја коришћених крутих сегмената са  $k \cdot n = 40$  на  $k \cdot n = 100$ , вредност апсолутних грешака значајно опада код оба метода крутих сегмената и постаје занемарљиво мала. Тако максимална апсолутна грешка код предложеног приступа износи 0.58% у случају обострано уклештеног штапа при  $\psi = 0.1$  и  $k \cdot n = 40$ . Повећањем укупног броја крутих сегмената на  $k \cdot n = 100$ , вредност апсолутне грешке се смањује на 0.09%.

Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{\rho A_1 L^4 / (EI_{z1})}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) разматраног штапа при различитим контурним условима и за различите вредности параметра  $\psi$  приказане су у табелама 16 и 17. Поред резултата добијених применом изложеног приступа, приказани су и резултати из референце [70] где су вредности фреквенција добијене решавањем трансцедентних карактеристичних једначина коришћењем итеративног поступка који се заснива на линеарној интерполацији. Резултати из референце [70] су изабрани за референтне. Применом изложеног приступа за  $k = 20$  добијају се резултати који су веома блиски резултатима из референце [70]. Тако је вредност максималне апсолутне грешке за сваку од прве три бездимензионе кружне фреквенције 0.043%, 0.14% и 0.29%, респективно, за случај обострано уклештеног штапа при  $\psi = 0.25$ . Очекивано, најмања апсолутна грешка се постиже код прве кружне фреквенције а највећа код треће.

Контурни услови		$\psi$	$\lambda_p$				Реф. [21]
лево	десно		Предложени приступ		НВМ [39]		
			$k \cdot n = 40$	$k \cdot n = 100$	$k \cdot n = 40$	$k \cdot n = 100$	
Укљештење	Слободан	0.1	2.7323 (0.04 %)	2.7332 (0.004 %)	2.7329 (0.02 %)	2.7332 (0.004 %)	2.7333
		0.5	4.1341 (0.01 %)	4.1344 (0.002 %)	4.1334 (0.03 %)	4.1343 (0.01 %)	4.1345
		0.9	4.9242 (0.05 %)	4.9263 (0.01 %)	4.9258 (0.02 %)	4.9265 (0.004 %)	4.9267
Укљештење	Цил. зглоб	0.1	22.1364 (0.30 %)	22.1927 (0.05 %)	22.1710 (0.14 %)	22.1980 (0.02 %)	22.203
		0.5	25.1502 (0.13 %)	25.1778 (0.02 %)	25.1580 (0.10 %)	25.1790 (0.02 %)	25.183
		0.9	39.6520 (0.38 %)	39.7802 (0.06 %)	39.8050 (0.17 %)	39.7940 (0.03 %)	39.805
Укљештење	Укљештење	0.1	43.3124 (0.58 %)	43.5259 (0.09 %)	43.4630 (0.24 %)	43.5500 (0.04 %)	43.567
		0.5	51.4909 (0.25 %)	51.5979 (0.04 %)	51.520 (0.19 %)	51.602 (0.03 %)	51.618
		0.9	68.5918 (0.37 %)	68.8057 (0.06 %)	68.737 (0.16 %)	68.829 (0.03 %)	68.847
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0.1	9.8815 (0.20 %)	9.8979 (0.03 %)	9.8969 (0.04 %)	9.9004 (0.01 %)	9.9010
		0.5	12.8073 (0.06 %)	12.8141 (0.01 %)	12.809 (0.05 %)	12.814 (0.01 %)	12.815
		0.9	19.5704 (0.19 %)	19.6023 (0.03 %)	19.594 (0.07 %)	19.606 (0.01 %)	19.608

Табела 15: Бездимензионе вредности интензитета критичне силе извијања  $\lambda_p$  хомогеног еластичног штапа са степенастом променом попречног пресека при различитим вредностима параметра  $\psi$  и за различите контурне услове

Контурни услови		$\psi$	Бездимензионе кружне фреквенције					
			$\bar{\omega}_1^{1/2}$		$\bar{\omega}_2^{1/2}$		$\bar{\omega}_3^{1/2}$	
лево	десно		Предл.	Реф.	Предл.	Реф.	Предл.	Реф.
			приступ	[70]	приступ	[70]	приступ	[70]
Уклетштење	Слободан	0.25	1.66879 (0.01 %)	1.6687	3.95094 (0.05 %)	3.9528	6.15507 (0.14 %)	6.1635
		0.375	1.86969 (0.005 %)	1.8696	3.93757 (0.03 %)	3.9387	6.13437 (0.09 %)	6.1399
		0.625	2.11933 (0.001 %)	2.1193	4.09711 (0.01 %)	4.0976	6.84367 (0.06 %)	6.8479
		0.75	2.08138 (0.004 %)	2.0813	4.67463 (0.03 %)	4.6760	6.93313 (0.07 %)	6.9380
Уклетштење	Цил. зглоб	0.25	3.35883 (0.04 %)	3.3603	5.63821 (0.13 %)	5.6457	7.71940 (0.27 %)	7.7404
		0.375	3.44406 (0.027 %)	3.4450	5.52336 (0.09 %)	5.5281	8.16632 (0.20 %)	8.1829
		0.625	3.30484 (0.008 %)	3.3051	6.30693 (0.06 %)	6.3105	8.64139 (0.11 %)	8.6510
		0.75	3.48861 (0.014 %)	3.4891	6.24397 (0.06 %)	6.2480	9.4504 (0.17 %)	9.4669

Табела 16: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) еластичног штапа са степенастом променом попречног пресека при различитим контурним условим (уклетштење-слободан, клетштење-цилиндричан зглоб) за  $k = 20$

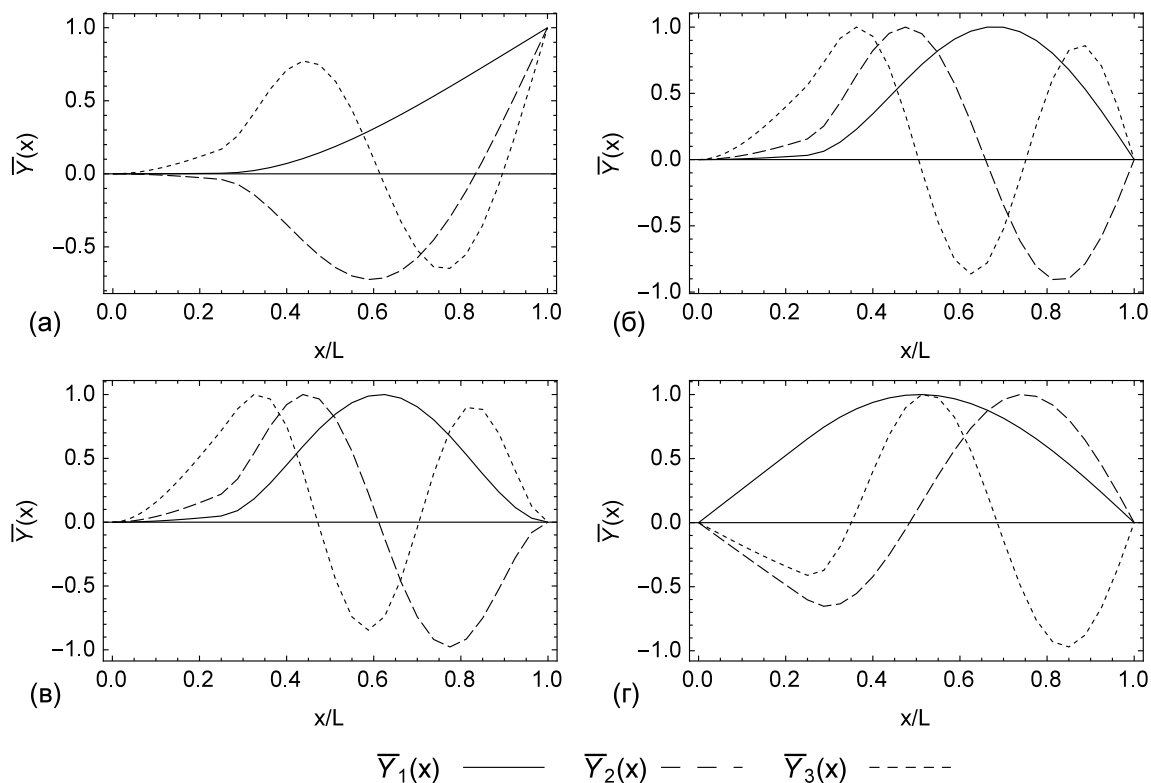
На слици 5.17 приказана су прва три нормализована главна облика осциловања при различитим контурним условима и при  $\psi = 0.25$  и  $\sigma = 0.25$ . Анализом добијених облика осциловања јасно се може уочити промена нагиба кривих којима је описан сваки од облика на месту преласка са сегмента дужине  $L_1 = 0.25L$  на суседни сегмент дужине  $L_2 = 0.75L$ . Ова промена нагиба настаје због разлике попречних пресека ова два сегмента.

Контурни услови		Бездимензионе кружне фреквенције						
		$\psi$	$\bar{\omega}_1^{1/2}$		$\bar{\omega}_2^{1/2}$		$\bar{\omega}_3^{1/2}$	
лево	десно	Предл.	Реф.	Предл.	Реф.	Предл.	Реф.	
		приступ	[70]	приступ	[70]	приступ	[70]	
Уклетштење	Уклетштење	0.25	3.98889 (0.043 %)	3.9906	6.15329 (0.14 %)	6.1618	8.28172 (0.29 %)	8.3054
		0.375	3.97782 (0.025 %)	3.9788	6.13886 (0.09 %)	6.1444	8.85430 (0.20 %)	8.8724
		0.625	3.90771 (0.013 %)	3.9082	6.86846 (0.06 %)	6.8726	9.48826 (0.12 %)	9.4997
		0.75	4.13593 (0.026 %)	4.1370	6.82609 (0.07 %)	6.8312	9.99888 (0.19 %)	10.0182
Цил. зглоб	Цил. зглоб	0.25	2.22644 (0.025 %)	2.2270	4.56587 (0.10 %)	4.5706	7.08098 (0.25 %)	7.0984
		0.375	2.26331 (0.017 %)	2.2637	4.91236 (0.07 %)	4.9160	7.67230 (0.17 %)	7.6854
		0.625	2.54408 (0.009 %)	2.5443	5.53745 (0.05 %)	5.5403	8.0962 (0.11 %)	8.1049
		0.75	2.82329 (0.018 %)	2.8238	5.47720 (0.06 %)	5.4805	8.67483 (0.17 %)	8.6897

Табела 17: Бездимензионе кружне фреквенције  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) еластичног штапа са степенастом променом попречног пресека при различитим контурним условима (уклетштење-уклетштење, цил. зглоб-цил. зглоб) за  $k = 20$

На крају овог примера треба нагласити да је предложени метод крутих сегмената посебно ефикасан код ове врсте штапова, што је потврђено кроз добијене веома мале вредности апсолутних грешака. Разлог томе је што код штапова са степенастом променом попречног пресека нема потребе за приближним описом облика штапа увођењем примарних сегмената, као што је то случај код штапова са континуалном

променом параметара. Повећањем броја секундарних еластичних сегмената смањује се грешка која је настала дискретизацијом на круте сегменте.



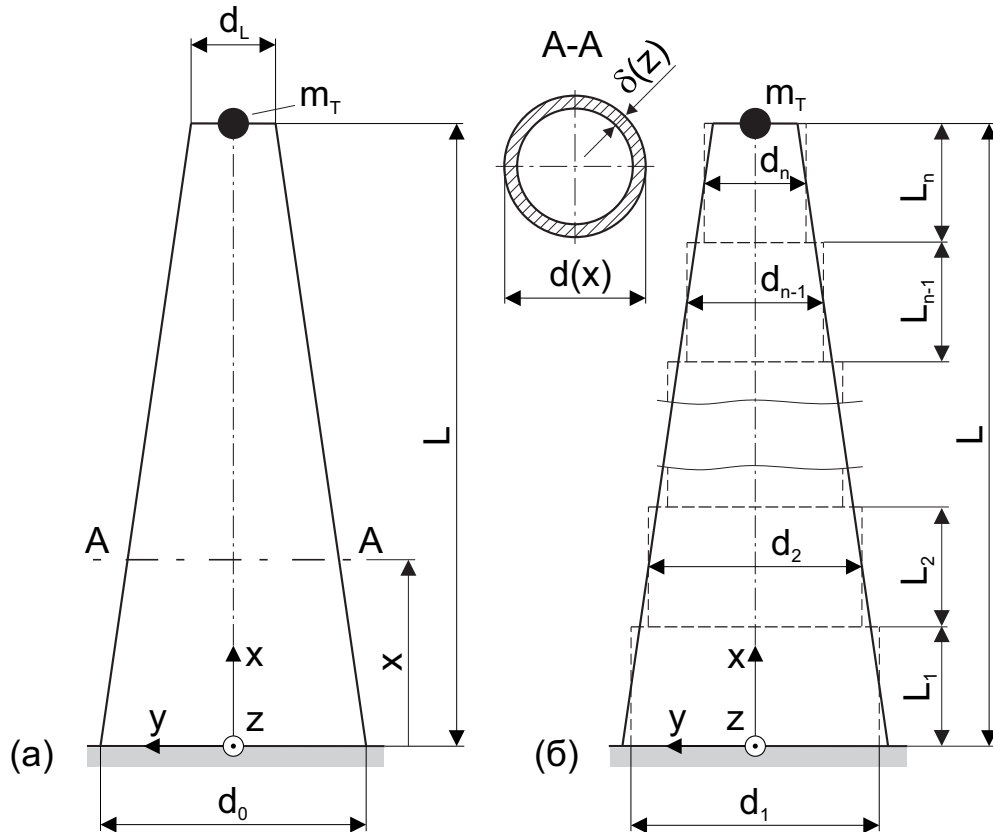
Слика 5.17: Прва три нормализована облика осциловања при  $\psi = 0.25$ ,  $\sigma = 0.25$ , и за различите контурне услове: (а) уклештен-слободан, (б) уклештен-цил. зглоб, (в) цил. зглоб - цил. зглоб, (г) уклештен-уклештен.

#### 5.4.7 Просторно деформабилни еластични штап променљивог попречног пресека

На слици 5.18(а) приказан је вертикално постављен еластични штап који је на доњем крају уклештен, а на горњем крају слободан. Оваквим штапом се у литератури моделирају стубови ветрогенератора (видети [71]). Штап је дужине  $L$  прстенастог попречног пресека. Спољашњи пречник и дебљина зида штапа мењају се дуж уздужне осе штапа сагласно законима:

$$d(x) = (d_L - d_0)x/L + d_0, \delta(x) = (\delta_L - \delta_0)x/L + \delta_0, 0 \leq x \leq L, \quad (5.31)$$

респективно. Спољашњи пречник штапа у уклештењу и на слободном крају је  $d_0$  и  $d_L$ , а дебљина зида штапа у уклештењу и на слободном крају је  $\delta_0$  и  $\delta_L$ , респективно. На врху штапа постављена је концентрисана маса  $m_T = \nu \rho_0 A_0 L$ , где је  $\nu$  променљиви бездимензиони параметар.



Слика 5.18: Стуб ветрогенератора: (а) тачан облик, (б) приближан облик

На основу закона промене спољашњег пречника  $d(x)$  и дебљине зида штапа  $\delta(x)$  (приказаних у изразу (5.31)) може се дефинисати закон промене површине попречног пресека штапа

$$A(x) = (d(x) - \delta(x)) \pi \delta(x), \quad (5.32)$$

као и закон промене момента инерције попречног пресека у односу на главне централне осе  $y$  и  $z$  пресека:

$$I_y(x) = I_z(x) = \frac{\pi}{64} (d(x)^4 - (d(x) - 2\delta(x))^4). \quad (5.33)$$

Може се приметити да су моменти инерције попречног пресека у односу на главне централне осе  $y$  и  $z$  једнаки јер је попречни пресек штапа прстенаст, дакле симетричан у односу на обе поменуте осе.

На слици 5.18(б) приказан је приближни облик еластичног штапа (стуба ветрогенератора) који се састоји од  $n$  примарних цилиндричних сегмената (усваја се да је број секундарних сегмената  $k = 1$ ).

Маса крутих сегмената ( $V_{2i-t,i}$ ) ( $t = 0, 1, 2$ ), ( $i = 1, \dots, n$ ) је:

$$m_{2i-t,i} = \rho A_i l_{2i-t,i}, \quad (5.34)$$

а моменти инерције крутих сегмената ( $V_{2i-t,i}$ ) у односу на осе координатног система  $C_{2i-t,i}\xi_{2i-t,i}\eta_{2i-t,i}\zeta_{2i-t,i}$  су:

$$J_{C_{2i-t,i}\xi_{2i-t,i}} = m_{2i-t,i} \left( \frac{d_i - \delta_i}{2} \right)^2,$$

$$J_{C_{2i-t,i}\eta_{2i-t,i}} = J_{C_{2i-t,i}\zeta_{2i-t,i}} = \frac{1}{12} m_{2i-t,i} \left( l_{2i-t,i}^2 + 3 \left( \frac{d_i - 2\delta_i}{2} \right)^2 + 3 \left( \frac{d_i}{2} \right)^2 \right), \quad (5.35)$$

при чему су  $d_i$  и  $\delta_i$  спољашњи пречник и дебљина зида крутог сегмента ( $V_{2i-t,i}$ ), и могу се одредити на сличан начин као и  $A_i$ ,  $I_{y_i}$  и  $I_{z_i}$  (видети изразе (3.13-3.18)) коришћењем израза:

$$d_i = (d(x_i - L_i/2) + d(x_i) + d(x_i + L_i/2)) / 3. \quad (5.36)$$

Нумеричке вредности параметара стуба приказане су у табели 18. У овом примеру биће извршено поређење вредности фреквенција  $f_i = \omega_i / (2\pi)$  стуба ветрогенератора, добијене применом предложеног приступа и методе коначних елемената ('Bmodes') изложене у референци [71]. 'Bmodes' (скраћеница од 'Beam Modal Analysis Code') се у основи састоји од коначног елемента са 15 степени слободе кретања, па се његовом употребом добијају резултати високе тачности. Стога су резултати из референце [71] коришћени за тестирање конвергенције резултата изложених у овом раду. Фреквенције означене са  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  представљају прве три фреквенције осциловања стуба ветрогенератора при попречним осцилацијама, док  $f_4$  и  $f_5$  представљају прве фреквенције осциловања при увојним и аксијалним осцилацијама, респективно.

Параметар	Ознака	Вредност
Дужина	$L$	87.6 [m]
Спољашњи пречник стуба у уклештењу	$d_0$	6 [m]
Спољашњи пречник стуба на слободном крају	$d_h$	3.87 [m]
Дебљина зида стуба у уклештењу	$\delta_0$	0.027 [m]
Дебљина зида стуба на слободном крају	$\delta_h$	0.019 [m]
Густина материјала стуба	$\rho$	8500 [kg/m <sup>3</sup> ]
Модул еластичности материјала стуба	$E$	$2.1 \cdot 10^{11}$ [N/m <sup>2</sup> ]
Модул смицања материјала стуба	$G$	$8.08 \cdot 10^{10}$ [N/m <sup>2</sup> ]

Табела 18: Физички параметри штапа [71]

Анализом упоредних резултата, представљених у табели 19, може се уочити добро слагање резултата изложеног приступа са резултатима из референце [71]. Важно је приметити да се највећа тачност постиже код прве (основне) фреквенције при попречним осцилацијама. Овај податак је од великог значаја ако се има у виду да је при пројектовању различитих техничких објеката најважније одредити прву (основну) фреквенцију осциловања. Конкретно, у случају ветрогенератора, важно је одредити основну фреквенцију осциловања при попречним осцилацијама јер је савијање доминантно оптерећење код овог типа конструкција.

Најмања тачност (мада и даље значајна) постиже се код фреквенција при увојним осцилацијама стуба ветрогенератора. Тако за  $n = 20$  уведених примарних сегмената релативна грешка износи  $\varepsilon_4 = 2.03$  [%], док се повећањем броја уведених примарних сегмената на  $n = 60$ , релативна грешка смањује на  $\varepsilon_4 = 0.69$  [%]. Графички приказ зависности релативне грешке  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) од броја уведених примарних сегмената ( $n$ ) дат је на слици 5.19. Јасно је да код одређивања сваке од пет поменутих фреквенција, вредност релативне грешке конвергира ка нули са повећањем  $n$ . Утицај концентрисане масе  $m_T$  на вредности фреквенција слободних осцилација стуба ветрогенератора приказан је у табели 20. Са повећањем вредности бездимензионог параметра  $\nu$  долази до смањења фреквенција осциловања при попречним и аксијалним осцилацијама.

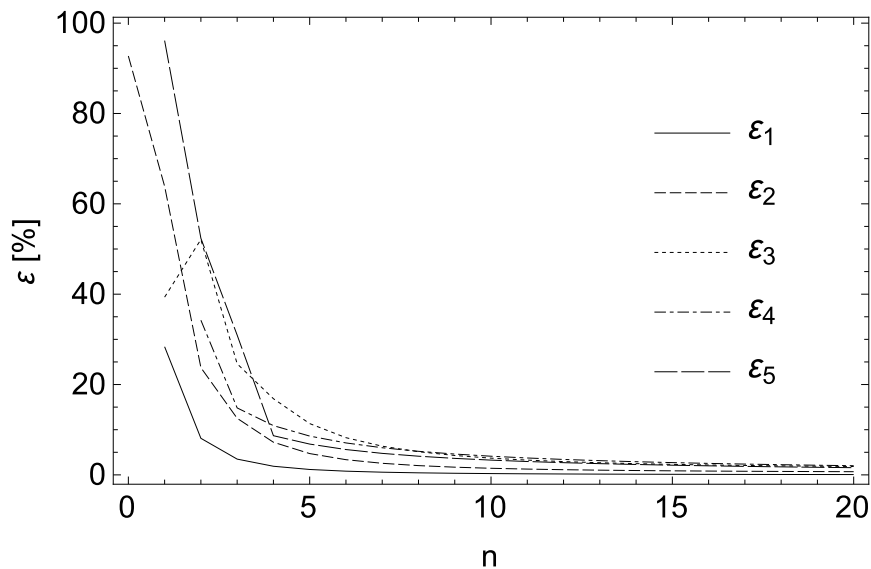
Очекивано, повећање вредности параметра  $\nu$  не утиче на вредности фреквенција слободних увојних осцилација, јер се концентрисана маса  $m_T$  налази на уздужној оси симетрије стуба ветрогенератора. Поред тога, на слици 5.20 приказан је утицај



параметра  $\nu$  на прва три главна облика осциловања стуба при попречним осцилацијама.

Врста деформације		Предложени приступ			'Vmodes' [71]
		$n = 20$	$n = 40$	$n = 60$	
Савијање	$f_1$	0.8906	0.8911	0.8912	0.8913
	$\varepsilon_1$	0.07 [%]	0.02 [%]	0.01 [%]	
	$f_2$	4.3434	4.3512	4.3526	4.3743
	$\varepsilon_2$	0.71 [%]	0.53 [%]	0.50 [%]	
	$f_3$	11.1796	11.2300	11.2391	11.3911
	$\varepsilon_3$	1.86 [%]	1.41 [%]	1.33 [%]	
Увијање	$f_4$	11.7230	11.8440	11.8836	11.9656
	$\varepsilon_4$	2.03 [%]	1.02 [%]	0.69 [%]	
Аксијалне деформације	$f_5$	16.2586	16.3924	16.4363	16.5217
	$\varepsilon_5$	1.59 [%]	0.78 [%]	0.52 [%]	

Табела 19: Фреквенције  $f_i = \omega_i / (2\pi)$  [Hz] стуба ветрогенератора



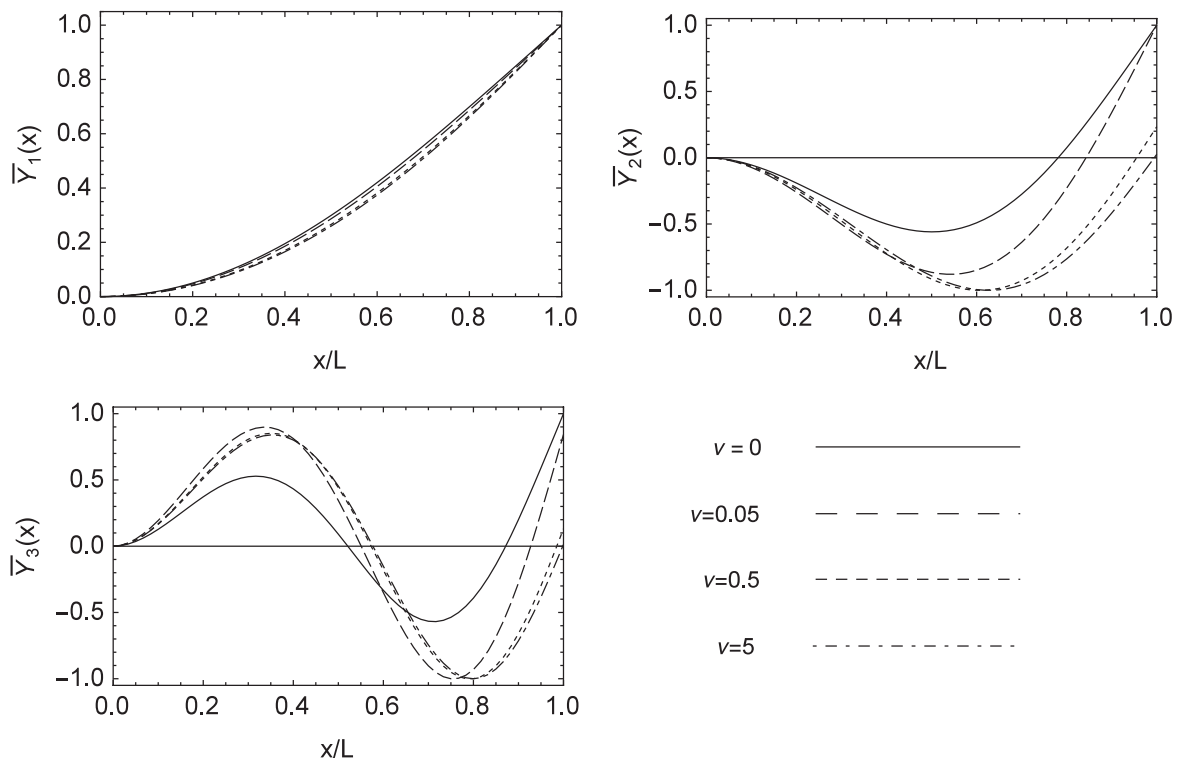
Слика 5.19: Релативна грешка при одређивању фреквенција у зависности од броја примарних сегмената  $n$

Овде је на релативно једноставном примеру показано да је могуће са довољном тачношћу анализирати динамичке карактеристике при просторним деформацијама штапа. Предложеним приступом могуће је анализирати и знатно сложеније моделе

стубова ветрогенератора. Ови модели узимају у обзир и утицај еластичности по-  
длоге, сеизмичке принудне силе током земљотреса, инерцијална својства кућишта  
генератора који се налази на врху стуба, и сл., као што је приказано у референ-  
цама [72–76]. Оваква анализа је обимна и самим тим неће бити спроведена у овој  
дисертацији.

Врста деформације		$\nu$			
		0	0.05	0.5	5
	$f_1$	0.8912	0.7513	0.3911	0.1354
Савијање	$f_2$	4.3526	3.7584	3.1145	2.9712
	$f_3$	11.2391	9.9916	9.1614	9.0218
Увијање	$f_4$	11.8836	11.8836	11.8836	11.8836
Аксијалне деформације	$f_5$	16.4363	15.0557	9.0890	3.2648

Табела 20: Утицај концентрисане масе  $m_T$  на врху на фреквенције  $f_i = \omega_i / (2\pi)$  [Hz]  
стуба ветрогенератора

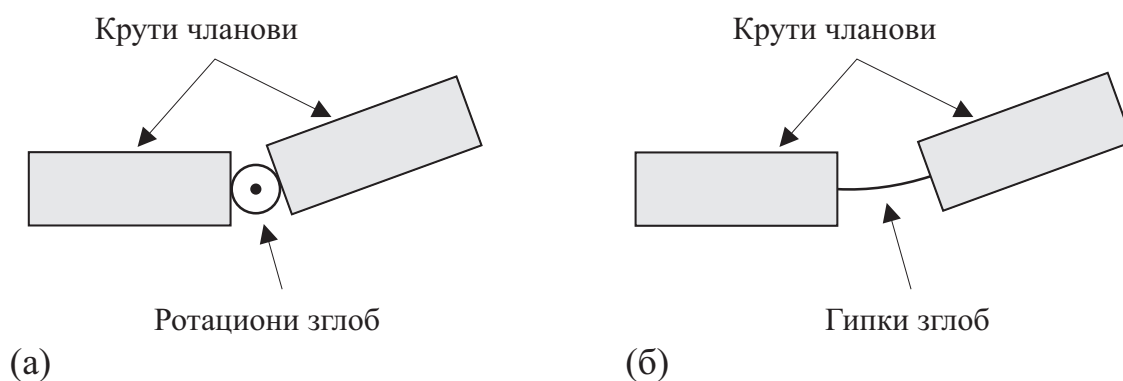


Слика 5.20: Утицај концентрисане масе  $m_T$  на врху на прва три главна облика осци-  
ловања стуба ветрогенератора при попречним осцилацијама

## 6 ГИПКИ МЕХАНИЗМИ

### 6.1 Концепт гипких механизма

Под појмом гипког механизма подразумева се механизам који се састоји од више крутих чланова који су међусобно повезани гипким зглобовима. Ова врста механизма се разликује од конвенционалних механизма по елементима који омогућавају релативно померање једног члана механизма у односу на други. Код конвенционалних механизма, крути чланови су међусобно повезани конвенционалним зглобовима [77] (ротациони, призматични, цилиндрични, сферни и др.). На пример, на слици 6.1 (а) и (б) је приказан пример остваривања ротационог кретања једног крутог члана у односу на други помоћу конвенционалног ротационог зглоба и гипког зглоба, респективно.

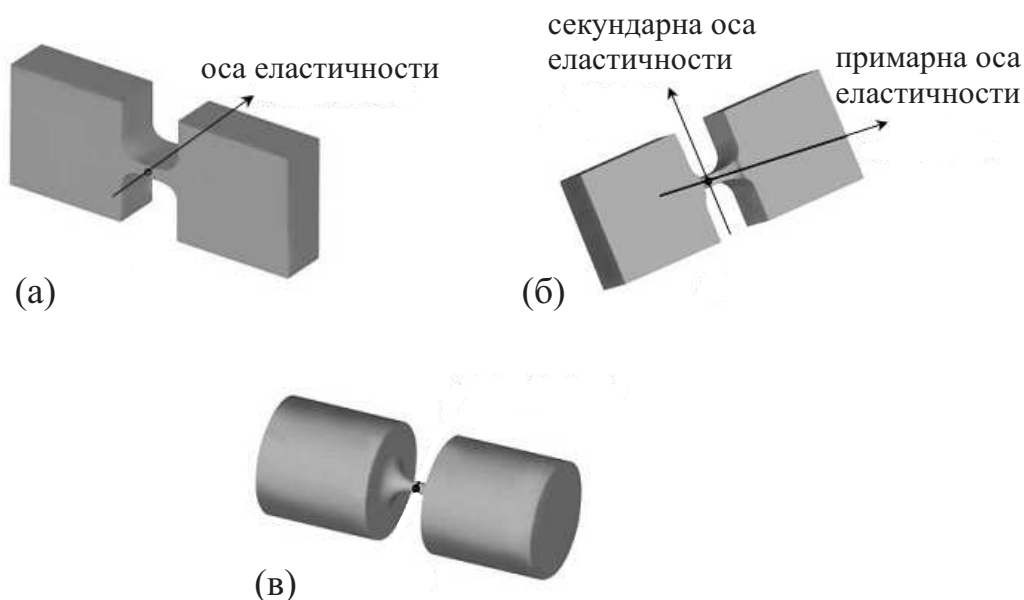


Слика 6.1: Ротациони зглоб [78]: (а) конвенционални, (б) гипки

Гипки зглоб се може дефинисати као еластични сегмент мале дебљине у односу на дужину који повезује два крута члана неког механизма и омогућава релативно кретање једног крутог члана у односу на други захваљујући својој деформацији.

На пример, да би се остварило ротационо релативно кретање једног крутог члана механизма у односу на други потребно је да дође до савијања гипког зглоба.

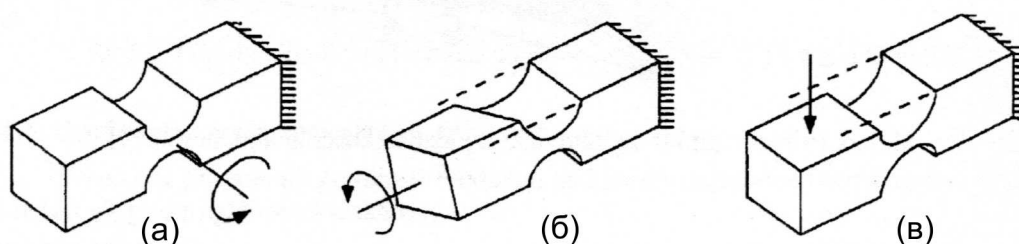
Иако постоје различити облици ових зглобова, најчешће су коришћени гипки зглобови у облику зареза, као што је приказано на слици 6.2. Такође, према намени, на истој слици се могу разликовати две групе ових зглобова. У прву групу, приказану на слици 6.2 (а), спадају гипки зглобови са једном осом деформације који се примењују код раванских гипких механизма. Другу групу чине гипки зглобови са две односно више оса ротације, приказаних на сликама 6.2 (б) и (в), који се примењују код просторних гипких механизма. Гипки зглобови са две осе ротације могу у општем случају имати различиту еластичност у односу на једну и другу осу ротације, па се оне често називају и примарна и секундарна оса еластичности.



Слика 6.2: Гипки зглоб [78]: (а) са једном, (б) две, и (в) више оса еластичности

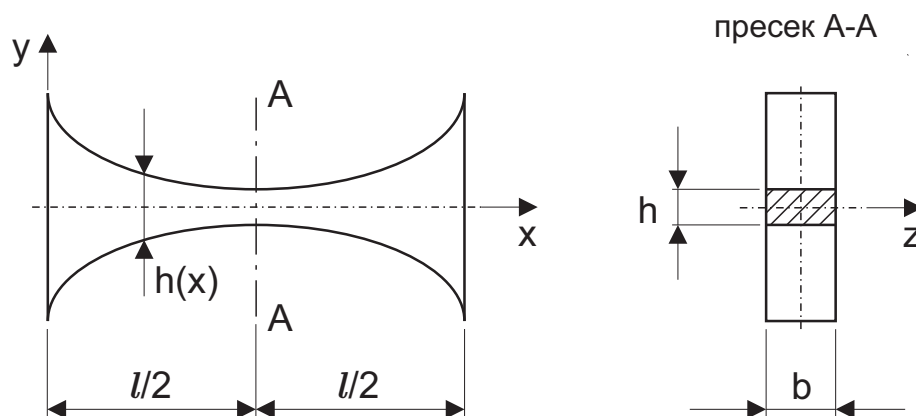
Предмет анализе у овом поглављу ће бити равански гипки механизми, па ће на даље бити разматране карактеристике гипких зглобова са једном осом деформације. Код раванских механизма је потребно да гипки зглобови имају што већу еластичност у односу на осу ротације, приказану на слици 6.3 (а), како би одређени механизам могао да постигне што већи опсег померања. Са друге стране, да би поменути гипки механизам имао одговарајућу прецизност потребно је да крутост гипког зглоба у односу на све остале осе померања буде што је могуће већа. Када то није случај,

долази до додатних нежељених померања у гипком зглобу, па се анализа деформација таквог зглоба значајно компликује. У случају раванског гипког зглоба, додатно померање може бити увијање око уздужне осе зглоба или смицање у правцу вертикалне осе попречног пресека штапа, као што је приказано на сликама 6.3 (б) и (в), респективно.



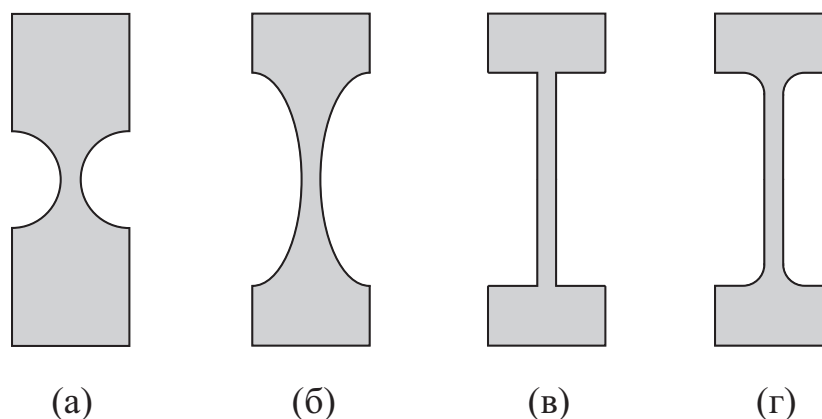
Слика 6.3: Гипки зглоб у облику зареза [78, 79] изложен : (а) савијању, (б) увијању, (в) смицању

Такође, у овом раду анализа ће бити ограничена на гипке зглобове у облику зареза са једном осом деформације, који су симетрични у односу на аксијалну и попречну осу зглоба. У општем случају, ови зглобови су правоугаоног попречног пресека константне ширине  $b$  и променљиве висине  $h$  дуж пресека, као што је приказано на слици 6.4. Оса еластичности око које долази до савијања лежи у пресеку најмање висине попречног пресека. У општем случају, закон промене висине  $h$  попречног пресека гипког зглоба може бити нека произвољна функција, зависно од потребе. Често је ова функција добијена као резултат оптимизације при чему су ограничења изведена из техничких захтева који треба одређени механизам да испуни.



Слика 6.4: Општи облик гипког механизма у облику зареза

Осим тога, постоје и неки стандардни облици ове врсте гипких зглобова приказаних на слици 6.4 (а)-(г) који се често користе. То су гипки зглобови са зарезом у облику кружнице, елипсе, правоугли и правоугли са заобљењима, респективно. Од приказана четири облика највише су у примени прва два, због повољније расподеле напона током деформације у односу на друга два облика код којих је могућа појава концентрације напона (посебно код трећег облика).

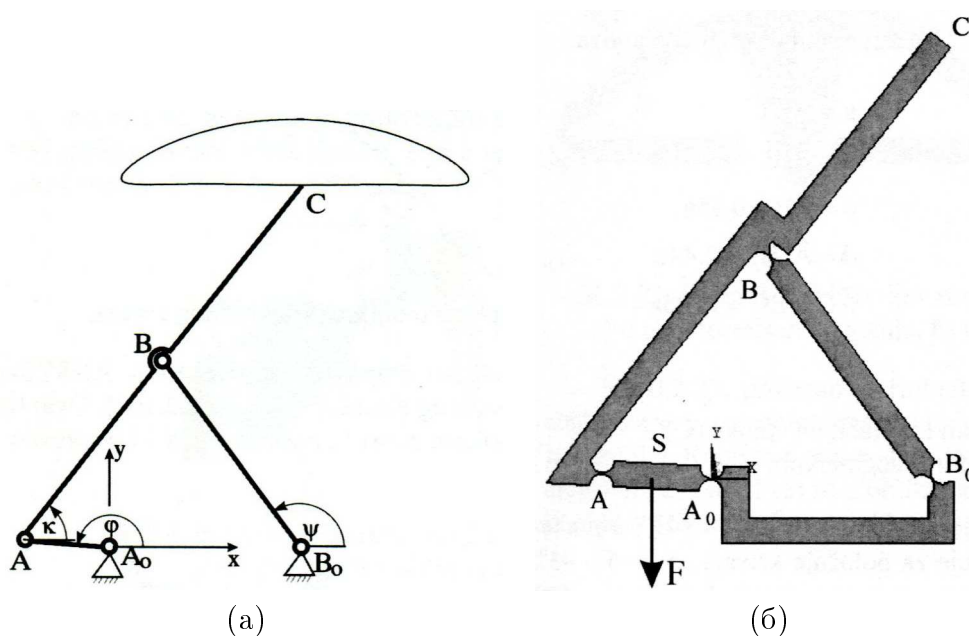


Слика 6.5: Гипки зглоб у облику зареза [80] : (а) кружни, (б) елиптични, (в) правоугли, (г) правоугли са заобљеним ивицама

Гипки зглобови имају одређене предности али и недостатке у односу на конвенционалне зглобове. Предности се огледају у њиховој компактности, ниској цени израде, могућностима минимизације, током рада нема трења па зато нема ни потребе за подмазивањем, погодни су за употребу у лако запаљивим и чистим срединама, постижу високу тачност при померању, и сл. Међутим, постоје и одређени недостаци, који ограничавају употребу ове врсте механизма. Главни недостаци ове врсте зглобова су: ограниченост опсега релативне ротације коју је могуће остварити, веома често тачност ротације је условљена односом крутости гипког зглоба у правцу равни ротације и крутости у осталим равнима, центар ротације гипког зглоба није фиксиран током остваривања жељене ротације већ се помера током ротације, због малих димензија њихова крутост зависи од температуре околине, могуће оштећење након одређеног броја деформација услед замора материјала, и сл.

Гипки механизми се све више користе. Веома често се уводе као гипка копија класичних механизма. Разлози за то могу бити различити, од захтева са повећаном тачношћу, до потребе за механизмом веома малих димензија које је потребно

остварити. На слици 6.6 (а) је приказан класични Ноекен-ов механизам који служи за остваривање праволинијског вођења тачке спојке  $C$ . На слици 6.6 (б) приказана је гипка копија ове врсте механизма која се добија заменом класичних ротационих зглобова гипким зглобовима у облику полукружног зареза. Уведена гипка копија овог механизма може да оствари прецизније праволинијско кретање спојке  $C$  али је опсег оствареног кретања знатно мањи. Разлог за то је ограничен опсег ротације гипких зглобова, који је условљен дозвољеним напонима и деформацијама сваког од уведених гипких зглобова појединачно.

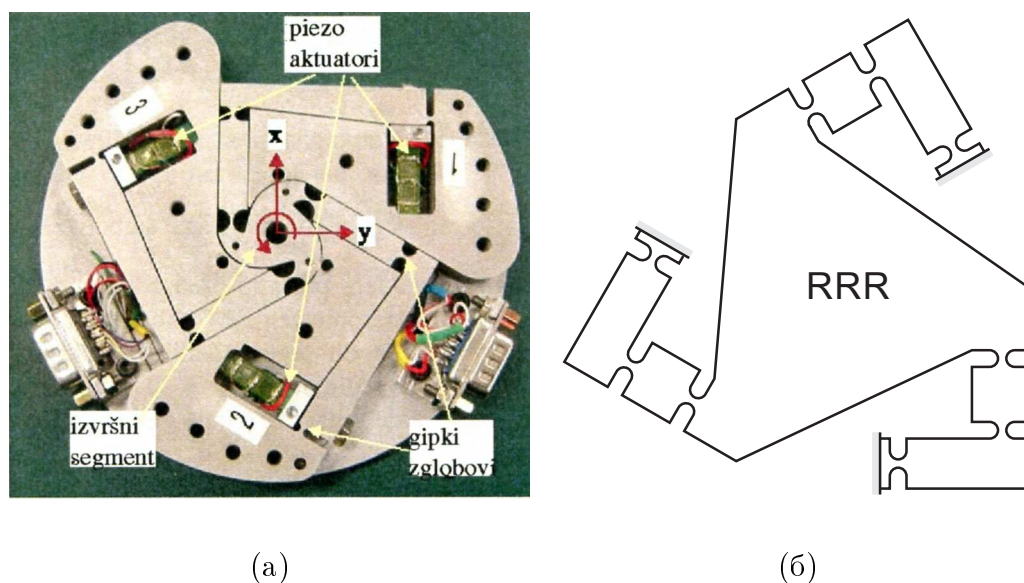


Слика 6.6: Ноекен-ов механизам [79] који тачком  $C$  спојке генерише праволинијско кретање: (а) конвенционални механизам, (б) гипки механизам

Ова врста зглобова је веома заступљена и код гипких платформи за микро и нанопозиционирање због свих претходно набројаних предности у односу на класичне зглобове. Овакве платформе се користе за позиционирање у многим савременим уређајима, као што су позиционирање узорака код електронског микроскопа, код микропозиционих механизма камера високе прецизности, микропозиционирање при заваривању ласером, манипулација при монтажи компонената у микросклоповима, код медицинских уређаја који се користе у савременој микрохирургији и биомедицини, и слично.

Као пример употребе, на слици 6.7 (а) приказана је тзв. RRR гипка платформа која омогућава три степена слободе позиционирања платформе, translације у правцу

$x$  и  $y$  осе, као и ротацију око  $z$  осе. У основи, ова платформа се састоји од три идентична погонска сегмента који се састоје од крутих сегмената међусобно спојених са по три гипка зглоба у облику полукружног зареза које погони по један пиезоактуатор. На слици 6.7 (б) дат је упрошћен приказ ове платформе. Више детаља о овој платформи може се наћи у референци [79].



Слика 6.7: Гипки механизам платформе за позиционирање са 3 степена слободe кретања [79]: (а) детаљан приказ извођења, (б) упрошћен приказ

Иако већина конвенционалних зглобова има своју адекватну замену у виду гипког зглоба, у овом поглављу ће бити анализирани равански гипки механизми, па ће зато ротациони гипки зглоб бити предмет детаљније анализе и основа даљих разматрања. Више детаља о осталим гипким зглобовима, њиховој анализи и примени може се наћи у референцама [78, 79, 81, 82].

Из свих набројаних примена се може закључити да се ова врста зглобова користи на местима где је потребно обезбедити мала померања, али где су захтеви за прецизношћу остварених померања високи. Због тога је пре саме употребе потребно развити довољно ефикасне и тачне методе анализе ове врсте зглобова, како би се извршила синтеза гипких механизма са задовољавајућом тачношћу. У овом поглављу ће бити искоришћен концепт дискретизације еластичног штапа на круте сегменте, који је детаљно разрађен у претходним поглављима, за формирање квази-крутог модела гипког зглоба.



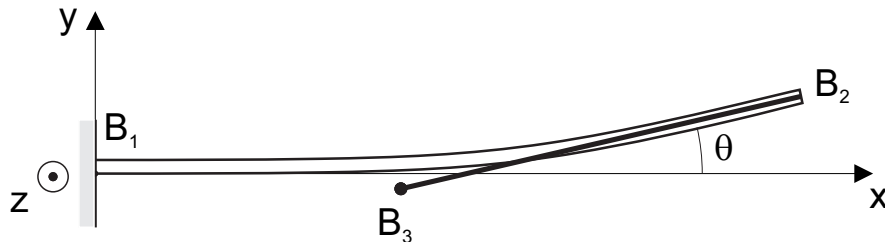
## 6.2 Потенцијална енергија гипког зглоба

Овде ће бити разматран гипки зглоб у облику зареза који је приказан на слици 6.4. Претпостављено је да је гипки зглоб уклештен на свом левом крају  $B_1$  а слободан на десном крају  $B_2$ , као што је приказано на слици 6.8, где су занемарене димензије попречног пресека штапа ради лакше илустрације.

Потенцијална енергија гипког зглоба приказаног на слици 6.4 може бити одређена на основу израза:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{B_2}^T \mathbf{K}_{B_2} \mathbf{w}_{B_2}, \quad (6.1)$$

где је  $\mathbf{w}_{B_2}^T = \left[ u_{B_2x} \quad u_{B_2y} \quad \theta \right]$  вектор деформација слободног краја штапа  $B_2$ , док  $\mathbf{K}_{B_2}$  представља матрицу крутости која одговара крају  $B_2$ .



Слика 6.8: Упростићен модел гипког зглоба током деформације

Матрица крутости  $\mathbf{K}_{B_2}$  може се одредити као инверзна матрица матрице еластичности гипког зглоба  $\mathbf{C}_{B_2}$ :

$$\mathbf{K}_{B_2} = \mathbf{C}_{B_2}^{-1}, \quad (6.2)$$

при чему је матрица еластичности за гипки зглоб константне ширине и произвољно променљиве висине попречног пресека у референци [83] дефинисана на следећи начин:

$$\mathbf{C}_{B_2} = \begin{bmatrix} C_a & 0 & 0 \\ 0 & C_{b,t} + 2\alpha_f(1 + \mu)C_a & \frac{l}{2}C_{b,r} \\ 0 & \frac{l}{2}C_{b,r} & C_{b,r} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

где су  $C_a$ ,  $C_{b,t}$  и  $C_{b,r}$  коефицијенти еластичности гипког зглоба при транслаторном померању у правцу  $x$  и  $y$  осе, као и при ротацији око  $z$  осе, респективно, и могу се одредити помоћу друге Кастиљанове теореме [78, 83] на следећи начин:

$$C_a = \frac{1}{E \cdot b} \int_0^l \frac{dx}{h(x)}, \quad (6.4)$$

$$C_{b,t} = \frac{12}{E \cdot b} \int_0^l \frac{x^2 dx}{h(x)^3}, \quad (6.5)$$

$$C_{b,r} = \frac{12}{E \cdot b} \int_0^l \frac{dx}{h(x)^3}, \quad (6.6)$$

$\alpha_f = 1.2$  за правоугаони попречни пресек (видети референцу [84]) и представља фактор корекције облика,  $\mu$  је Поасонов коефицијент и зависи од врсте материјала гипког зглоба,  $E$  је модул еластичности материјала гипког зглоба,  $b$  је ширина попречног пресека гипког зглоба и константна је дуж зглоба, а  $h(x)$  представља закон промене висине попречног пресека гипког зглоба. Овде је важно нагласити да матрица еластичности  $\mathbf{C}_{B_2}$  која је овде приказана одговара моделу еластичног штапа код којег је узето у обзир и смицање. У референци [83] је дата препорука да се за гипке зглобове за које важи да је  $\max(b, h(x)) > L/5$  (тзв. кратки гипки зглобови) смицање мора узети у обзир коришћењем фактора корекције облика  $\alpha_f$ . У супротном, код гипких зглобова за које важи да је  $\max(b, h(x)) \leq L/5$  тј. код гипких зглобова код којих је дужина значајно већа у односу на максималне димензије попречног пресека (тзв. дугачки гипки зглобови), узима се да је  $\alpha_f = 0$ .

На основу израза (6.2) и (6.3), матрица крутости гипког зглоба, која одговара померању слободног краја зглоба  $B_2$  је:

$$\mathbf{K}_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{4C_{b,t} - C_{b,r}l^2 + 8C_a(1+\mu)\alpha_f} & \frac{-2l}{4C_{b,t} - C_{b,r}l^2 + 8C_a(1+\mu)\alpha_f} \\ 0 & \frac{-2l}{4C_{b,t} - C_{b,r}l^2 + 8C_a(1+\mu)\alpha_f} & \frac{4(C_{b,t} + 2C_a(1+\mu)\alpha_f)}{C_{b,r}(4C_{b,t} - C_{b,r}l^2 + 8C_a(1+\mu)\alpha_f)} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Као што се може видети, матрица  $\mathbf{K}_{B_2}$  је симетрична. Као и у случају просторног штапа који је разматран у поглављу 3.2, циљ је да матрица крутости разматраног гипког зглоба буде дијагонална како би се приближни модел могао ефикасније формирати. Зато ће и овде бити разматрано померање еластичног центра  $B_3$ , као што је приказано на слици 6.8.

Сада се вектор деформације слободног краја  $B_2$  гипког зглоба може изразити преко вектора деформације еластичног центра  $B_3$  коришћењем израза:

$$\mathbf{w}_{B_2} = \mathbf{R}_{B_2, B_3} \mathbf{w}_{B_3}, \quad (6.8)$$

где је

$$\mathbf{R}_{B_2, B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

матрица трансформације координата, а  $\mathbf{w}_{B_3}^T = [u_{B_3x} \quad u_{B_3y} \quad \theta]$  је вектор деформација еластичног центра  $B_2$  гипког зглоба. Ако се сада потенцијална енергија гипког зглоба изрази у функцији вектора деформације еластичног центра  $B_3$ , уврштавањем израза (6.9) у израз (6.1), добија се да је:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{B_3}^T \mathbf{K}_{B_3} \mathbf{w}_{B_3}, \quad (6.10)$$

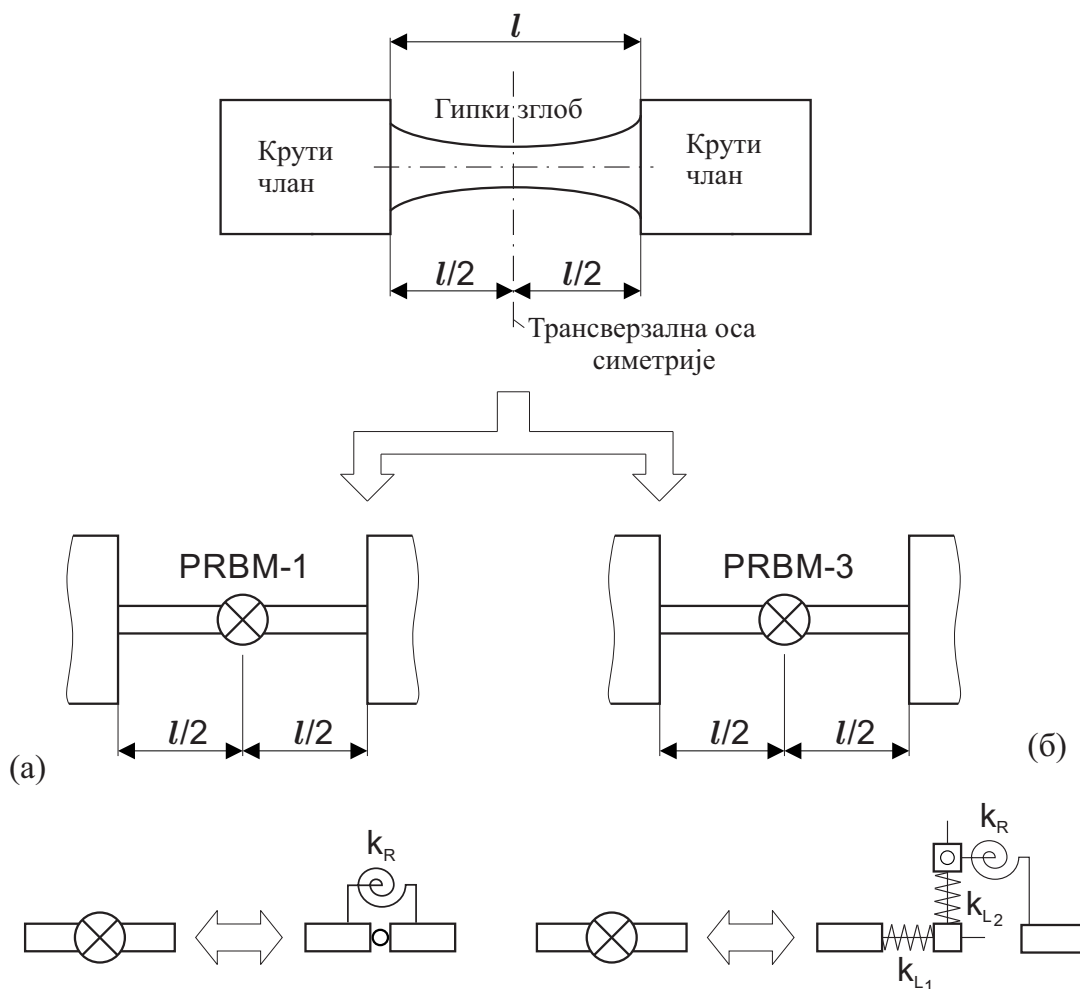
при чему важи да је:

$$\mathbf{K}_{B_3} = \mathbf{R}_{B_2, B_3}^T \mathbf{K}_{B_2} \mathbf{R}_{B_2, B_3} = \text{diag} \left( \frac{1}{C_a}, \frac{C_{b,r}}{[C_{b,t} + 2\alpha_f (1 + \mu) C_a] C_{b,r} - \left(\frac{l \cdot C_{b,r}}{2}\right)^2}, \frac{1}{C_{b,r}} \right), \quad (6.11)$$

матрица крутости гипког зглоба која одговара вектору деформације  $\mathbf{w}_{B_3}$  еластичног центра  $B_3$ .

### 6.3 Дискретизација гипког зглоба на круте сегменте

На слици 6.9 приказан је начин дискретизације гипког зглоба у облику зареза дужине  $l$  на два крута сегмента који су међусобно повезани зглобним елементом. Притом је зглоб константне ширине  $b$  попречног пресека, док је закон промене висине попречног пресека ближе дефинисан функцијом  $h(x)$ . За више детаља о овом гипком зглобу видети слику 6.4.



Слика 6.9: Дискретизација гипког зглоба на круте сегменте: (а) PRBM-1, (б) PRBM-3

На слици 6.9 (а) приказан је квази-крути модел овог гипког зглоба (енг. „Pseudo-Rigid-Body-Model (PRBM)“), предложен у референци [82], који се састоји од два крута штапа занемарљиве масе међусобно повезана ротационим зглобом. Како би се описала еластична својства разматраног гипког зглоба у ротационом зглобу је постављена спирална опруга крутости  $k_R$ . Предложени приближни модел се често назива и квази-крути модел гипког зглоба.

Имајући у виду да предложени модел има само један степен слободе кретања (ротацију око осе управне на раван деформације), надаље ће бити означен као PRBM-1. Овај модел је доста заступљен при анализи померања различитих гипких механизма. Међутим, његов главни недостатак је што даје недовољно тачне резултате при анализи кратких гипких зглобова јер није могуће узети у обзир утицај смицања пошто предложени модел описује само релативну ротацију у гипком зглобу.

Како би се добио тачнији модел гипког зглоба, овде је предложена корекција зглобног елемента који повезује штапове занемарљивих димензија у смислу додавања још два призматична зглоба у правцу аксијалних и попречних деформација зглоба. Сада предложени модел гипког зглоба садржи зглобни елемент са три степена слободе кретања (једна ротација и две транслације), па ће надаље бити краће означаван са PRBM-3. У зглобном елементу су постављене опруге крутости  $k_R$ ,  $k_{L_1}$  и  $k_{L_2}$  које одговарају ротационом зглобу и цилиндричним зглобовима у аксијалном и попречном правцу, респективно. За више детаља видети слику 6.9 (б).

Потенцијална енергија гипког зглоба представљеног моделом PRBM-3 се може одредити коришћењем израза:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & k_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{Bmatrix}, \quad (6.12)$$

где су  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  и  $\Delta\varphi$  релативна зглобна померања која одговарају аксијалним и трансверзалним померањима, као и ротацији, респективно.

Ако се сада упореде израз (6.10) за потенцијалну енергију недискретизованог гипког зглоба и израз (6.12), и ако се уочи да важи да је  $\mathbf{w}_{B_3}^T \equiv \begin{bmatrix} \Delta\xi & \Delta\eta & \Delta\varphi \end{bmatrix}$ , на основу еквивалентности потенцијалних енергија важи да је:

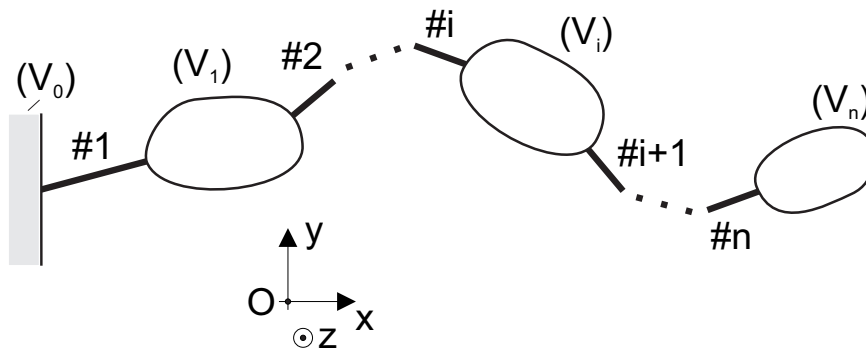
$$\text{diag}(k_{L_1}, k_{L_2}, k_R) = \text{diag} \left( \frac{1}{C_a}, \frac{C_{b,r}}{[C_{b,t} + 2\alpha_f(1 + \mu)C_a]C_{b,r} - \left(\frac{l \cdot C_{b,r}}{2}\right)^2}, \frac{1}{C_{b,r}} \right), \quad (6.13)$$

па су сада крутости опруга предложеног PRBM-3 модела:

$$k_{L1} = \frac{1}{C_a}, \quad k_{L2} = \frac{C_{b,r}}{[C_{b,t} + 2\alpha_f(1 + \mu)C_a]C_{b,r} - \left(\frac{l \cdot C_{b,r}}{2}\right)^2}, \quad k_R = \frac{1}{C_{b,r}}. \quad (6.14)$$

## 6.4 Квази-крути модел раванског гипког механизма

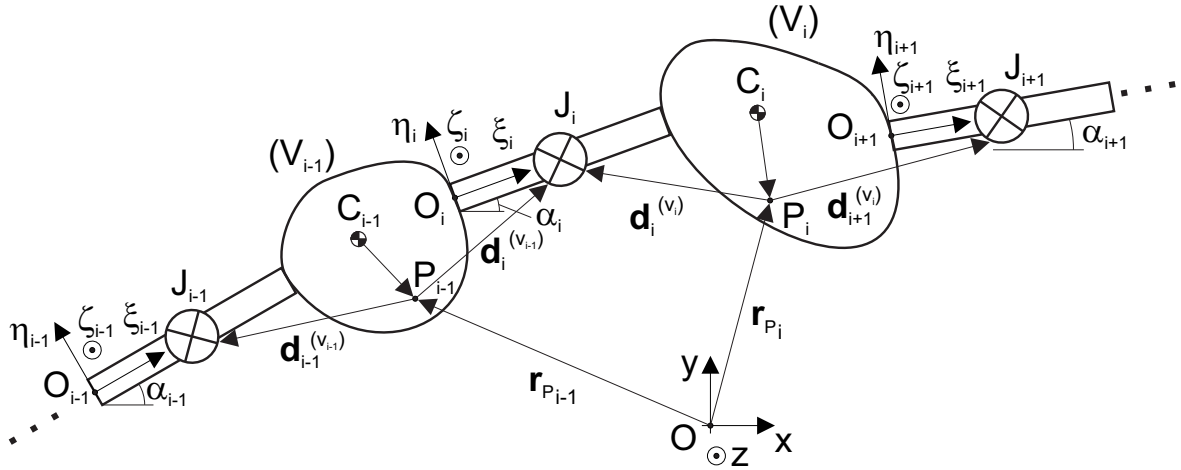
На слици 6.10 приказан је равански гипки механизам у облику отвореног кинематичког ланца без гранања који се састоји од крутих чланова ( $V_i$ ) ( $i = 1, \dots, n$ ) који су међусобно повезани гипким зглобовима ( $\#i$ ) ( $i = 1, \dots, n$ ). Непокретна подлога за коју је фиксиран гипки зглоб ( $\#1$ ) означена је као нулти крути члан ( $V_0$ ). Претпоставља се да приказани механизам врши кретање само у хоризонталној равни  $Oxy$ .



Слика 6.10: Равански гипки механизам у облику отвореног кинематичког ланца без гранања

На слици 6.11 детаљно је приказан квази-крути модел разматраног гипког механизма у равнотежном положају. Гипки зглобови ( $\#i$ ) ( $i = 1, \dots, n$ ) замењени су квази-крутим моделом PRBM-3. За почетак  $O_i$  сваког од  $n$  гипких зглобова фиксиран је локални координатни систем  $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ , при чему оса  $\xi_i$  заклапа угао  $\alpha_i$  са осом  $x$  у равнотежном положају механизма. Такође, претпоставља се да се оса  $\xi_i$  поклапа са аксијалном осом симетрије недеформисаног гипког зглоба ( $\#i$ ). Вектор

$\mathbf{r}_{P_i}$  представља вектор положаја произвољно изабране тачке  $P_i$  на крутом телу  $(V_i)$  у односу на инерцијални координатни систем  $Oxyz$ . Вектори  $\mathbf{d}_i^{(V_{i-1})}$  и  $\mathbf{d}_i^{(V_i)}$  представљају векторе положаја зглобног елемента  $J_i$  у односу на произвољно изабране тачке  $P_{i-1}$  и  $P_i$  суседних крутих чланова  $(V_{i-1})$  и  $(V_i)$ , респективно.



Слика 6.11: Квази-крути модел раванског гипког механизма у облику отвореног кинематичког ланца без гранања

#### 6.4.1 Потенцијална енергија гипког механизма представљеног квази-крутим моделом

На основу претходно уведених претпоставки, потенцијална енергија гипког механизма приказаног на слици 6.11 одређена је изразом:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_{R,1}\theta_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n k_{R,2}(\theta_j - \theta_{j-1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{L1,i}\Delta\xi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{L2,i}\Delta\eta_i^2. \quad (6.15)$$

Овде треба приметити да  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) представља угао закретања крутог члана  $(V_i)$  око осе  $C_i z$  у односу на недеформисану конфигурацију механизма, док  $\Delta\xi_i$  и  $\Delta\eta_i$  представљају релативне деформације гипког зглоба у аксијалном и попречном правцу у односу на локални координатни систем  $O_i \xi_i \eta_i z_i$ . Сада је потребно изразити релативна зглобна померања  $\Delta\xi_i$  и  $\Delta\eta_i$  гипког зглоба ( $\#i$ ) у функцији померања тачака  $P_i$  суседних крутих чланова  $(V_{i-1})$  и  $(V_i)$  у односу на инерцијални координатни

систем  $Oxyz$ . Тиме се постиже да потенцијална енергија гипког механизма буде изражена у функцији апсолутних координата тачака крутих чланова механизма, што доприноси повећању нумеричке ефикасности предложеног алгорита.

Сада се вектори померања тачака  $P_i$  као и ротациони вектори крутих чланова ( $V_i$ ) у односу на инерцијални координатни систем  $Oxyz$  могу изразити као:

$$\mathbf{u}_{P_i} = \begin{bmatrix} \Delta x_i & \Delta y_i & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (6.16)$$

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_i \end{bmatrix}^T, \quad (6.17)$$

респективно. Вектор релативних трансляторних померања у гипком зглобу ( $J_i$ ) представљен у односу на локални координатни систем  $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$  се може дефинисати као:

$$\mathbf{u}_{J_i} = \begin{bmatrix} \Delta\xi_i & \Delta\eta_i & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (6.18)$$

док се релативна ротација у зглобу ( $J_i$ ) може дефинисати као разлика углова закретања суседних крутих чланова ( $V_{i-1}$ ) и ( $V_i$ ) на следећи начин:

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}. \quad (6.19)$$

Користећи претпоставку о малим деформацијама гипких зглобова, вектори  $\mathbf{u}_{J_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) се могу добити из следећих релација:

$$\mathbf{u}_{J_1} = \mathbf{R}_{1,0} \left( \mathbf{u}_{P_1} + \tilde{\Theta}_1 \mathbf{d}_1^{(V_1)} \right), \quad (6.20)$$

$$\mathbf{u}_{J_j} = \mathbf{R}_{j,0} \left( \mathbf{u}_{P_j} + \tilde{\Theta}_j \mathbf{d}_j^{(V_j)} - \mathbf{u}_{P_{j-1}} - \tilde{\Theta}_{j-1} \mathbf{d}_{j-1}^{(V_{j-1})} \right), \quad (j = 2, \dots, n) \quad (6.21)$$

где је

$$\tilde{\Theta}_j = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_j & 0 \\ \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

косо-симетрична матрица која одговара вектору  $\Theta_j$ ,

$$\mathbf{d}_j^{(V_j)} = \begin{bmatrix} d_{x_j}^{(V_j)} & d_{y_j}^{(V_j)} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.23)$$

је вектор положаја зглобног елемента  $J_j$  у односу на тачку  $P_j$  тела ( $V_j$ ) представљен у односу на инерцијални координатни систем  $Oxyz$ , и



$$\mathbf{R}_{i,0} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

представља матрицу трансформације координата [59, 60] из инерцијалног координатног система  $Oxyz$  у локални координатни систем  $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$  у недеформисаној конфигурацији механизма.

Ако се у изразе (6.20) и (6.21) уврсте изрази (6.16), (6.18), (6.22), (6.23), и (6.24) добија се:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\eta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_1 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{x_1}^{(V_1)} \\ d_{y_1}^{(V_1)} \\ 0 \end{Bmatrix} \right), \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta\xi_j \\ \Delta\eta_j \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_j & \sin \alpha_j & 0 \\ -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_j & 0 \\ \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{x_j}^{(V_j)} \\ d_{y_j}^{(V_j)} \\ 0 \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{Bmatrix} \Delta x_{j-1} \\ \Delta y_{j-1} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{j-1} & 0 \\ \theta_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{x_j}^{(V_{j-1})} \\ d_{y_j}^{(V_{j-1})} \\ 0 \end{Bmatrix} \right), \quad (j = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (6.26)$$

односно,

$$\Delta\xi_1 = \cos \alpha_1 (\Delta x_1 - \theta_1 d_{y_1}^{(V_1)}) + \sin \alpha_1 (\Delta y_1 + \theta_1 d_{x_1}^{(V_1)}), \quad (6.27)$$

$$\Delta\eta_1 = -\sin \alpha_1 (\Delta x_1 - \theta_1 d_{y_1}^{(V_1)}) + \cos \alpha_1 (\Delta y_1 + \theta_1 d_{x_1}^{(V_1)}), \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \Delta\xi_j &= \cos \alpha_j (\Delta x_j - \Delta x_{j-1} - \theta_j d_{y_j}^{(V_j)} + \theta_{j-1} d_{y_j}^{(V_{j-1})}) \\ &\quad + \sin \alpha_j (\Delta y_j - \Delta y_{j-1} + \theta_j d_{x_j}^{(V_j)} - \theta_{j-1} d_{x_j}^{(V_{j-1})}), \quad (j = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta_j = & -\sin\alpha_j \left( \Delta x_j - \Delta x_{j-1} - \theta_j d_{y_j}^{(V_j)} + \theta_{j-1} d_{y_j}^{(V_{j-1})} \right) \\ & + \cos\alpha_j \left( \Delta y_j - \Delta y_{j-1} + \theta_j d_{x_j}^{(V_j)} - \theta_{j-1} d_{x_j}^{(V_{j-1})} \right), \quad (j = 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Коначно, ако се изрази за релативна померања у гпском зглобу (6.27)-(6.30) уврсте у израз (6.15) потенцијална енергија механизма се може изразити у облику:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}, \quad (6.31)$$

где је

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{3n} \end{bmatrix}^T, \quad (6.32)$$

вектор апсолутних координата, при чему су оне биране тако да важи да је  $v_{3i-2} \equiv \Delta x_i$ ,  $v_{3i-1} \equiv \Delta y_i$ ,  $v_{3i} \equiv \theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $\mathbf{K} \in R^{3n \times 3n}$  представља матрицу крутости чији се елементи могу одредити на следећи начин:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3n. \quad (6.33)$$

#### 6.4.2 Кинетичка енергија гпског механизма представљеног квази-крутим моделом

Кинетичка енергија гпског механизма приказаног на слици 6.11 је одређена следећим изразом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_{C_i}^T \dot{\mathbf{r}}_{C_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_{C_{iz}} \dot{\theta}_i^2, \quad (6.34)$$

где је  $m_i$  маса крутог члана ( $V_i$ ),

$$\dot{\mathbf{r}}_{C_i} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_{C_i} & \Delta \dot{y}_{C_i} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.35)$$

први извод вектора положаја средишта маса крутог члана ( $V_i$ ), и  $J_{C_{iz}}$  представља аксијални момент инерције крутог члана ( $V_i$ ) за осу  $C_{iz}$ .

Овај извод може се изразити и на следећи начин:

$$\dot{\mathbf{r}}_{C_i} = \dot{\mathbf{r}}_{P_i} - \tilde{\omega}_i \overrightarrow{C_i P_i}, \quad (6.36)$$

где је

$$\dot{\mathbf{r}}_{P_i} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_i & \Delta \dot{y}_i & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.37)$$

први извод вектора положаја тачке  $P_i$ ,

$$\tilde{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_i & 0 \\ \dot{\theta}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

косо-симетрична матрица која одговара вектору угаоне брзине крутог члана ( $V_i$ ), и

$$\overline{C_i P_i} = \left[ \overline{C_i P_{i,x}} \quad \overline{C_i P_{i,y}} \quad 0 \right]^T, \quad (6.39)$$

представља вектор положаја произвољно изабране тачке  $P_i$  у односу на средиште маса  $C_i$  крутог члана ( $V_i$ ) који је представљен у односу на инерцијални координатни систем  $Oxyz$ .

Ако се сада изрази (6.35), (6.37)-(6.39) уврсте у релацију (6.36) добија се да је:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \dot{x}_{C_i} \\ \Delta \dot{y}_{C_i} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x}_i \\ \Delta \dot{y}_i \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_i & 0 \\ \dot{\theta}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{C_i P_{i,x}} \\ \overline{C_i P_{i,y}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.40)$$

односно,

$$\Delta \dot{x}_{C_i} = \Delta \dot{x}_i + \dot{\theta}_i \cdot \overline{C_i P_{i,x}}, \quad (6.41)$$

$$\Delta \dot{y}_{C_i} = \Delta \dot{y}_i + \dot{\theta}_i \cdot \overline{C_i P_{i,y}}. \quad (6.42)$$

Након уврштавања претходна два израза у израз (6.34) добија се кинетичка енергија механизма у облику:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}, \quad (6.43)$$

где је  $\dot{\mathbf{v}}$  први извод вектора апсолутних координата који је ближе дефинисан изразом (6.32), и  $\mathbf{M} \in R^{3n \times 3n}$  представља матрицу инерције чији се елементи могу одредити на следећи начин:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{v}_\alpha \partial \dot{v}_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3n. \quad (6.44)$$

### 6.4.3 Слободне непригушене осцилације гипког механизма

Лагранжеве једначине друге врсте (видети [61]) за разматрани гипки механизам представљен квази-крутим моделом гласе:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{v}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{Q}_v, \quad (6.45)$$

при чему је  $\mathbf{Q}_v$  вектор генералисаних сила који потиче од неконзервативних сила. За разматрани механизам узима се да је  $\mathbf{Q}_v = \mathbf{0}_{3n \times 1}$ .

На основу израза (6.31) и (6.43), Лагранжеве једначине друге врсте (6.45) постају:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{0}_{3n \times 1}, \quad (6.46)$$

где су елементи матрица  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  дефинисани изразима (6.33) и (6.44), респективно, и  $\ddot{\mathbf{v}}$  представља други извод вектора независних координата дефинисаног изразом (6.32). Добијене диференцијалне једначине представљају диференцијалне једначине слободних непригушених осцилација разматраног механизма представљеног квази-крутим моделом у околини равнотежног положаја  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}_{3n \times 1}$ .

Користећи процедуру изложену у поглављу 5.3, диференцијалним једначинама кретања (6.46) одговара следећи карактеристични проблем:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{0}_{3n \times 1}. \quad (6.47)$$

односно фреквентна једначина:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0. \quad (6.48)$$

Решавањем фреквентне једначине могу се добити кружне фреквенције слободних непригушених осцилација гипког механизма.

### 6.4.4 Померање произвољно изабране тачке гипког механизма

Нека у произвољно изабраним тачкама  $P_i$  крутих чланова ( $V_i$ ) делује концентрисана сила  $f_{x_i} \mathbf{i} + f_{y_i} \mathbf{j}$  и спрег сила концентрисаног момента  $m_{z_i} \mathbf{k}$ , где су  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  јединични вектори оса  $x$ ,  $y$  и  $z$ , респективно. Дакле, сада се може дефинисати вектор спољашњег оптерећења крутог члана ( $V_i$ ) као:

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} f_{x_i} & f_{y_i} & m_{z_i} \end{bmatrix}^T, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.49)$$

Услед дејства статичког оптерећења, дефинисаног претходно описаним вектором спољашњег оптерећења  $\mathbf{F}_i$ , као резултат малих деформацијама у гипким зглобовима, долази до померања гипког механизма у нови равнотежни положај.

На основу Лагранжевог принципа виртуалних померања [61], услов који мора бити испуњен да би нови положај био равнотежни је:

$$-\mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{F} = \mathbf{0}_{3n \times 1}, \quad (6.50)$$

где је  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T & \mathbf{F}_2^T & \dots & \mathbf{F}_n^T \end{bmatrix}^T \in R^{3n \times 1}$ .

Сада се из услова (6.50) може одредити вектор апсолутних координата којима је нови равнотежни положај гипког механизма дефинисан, односно:

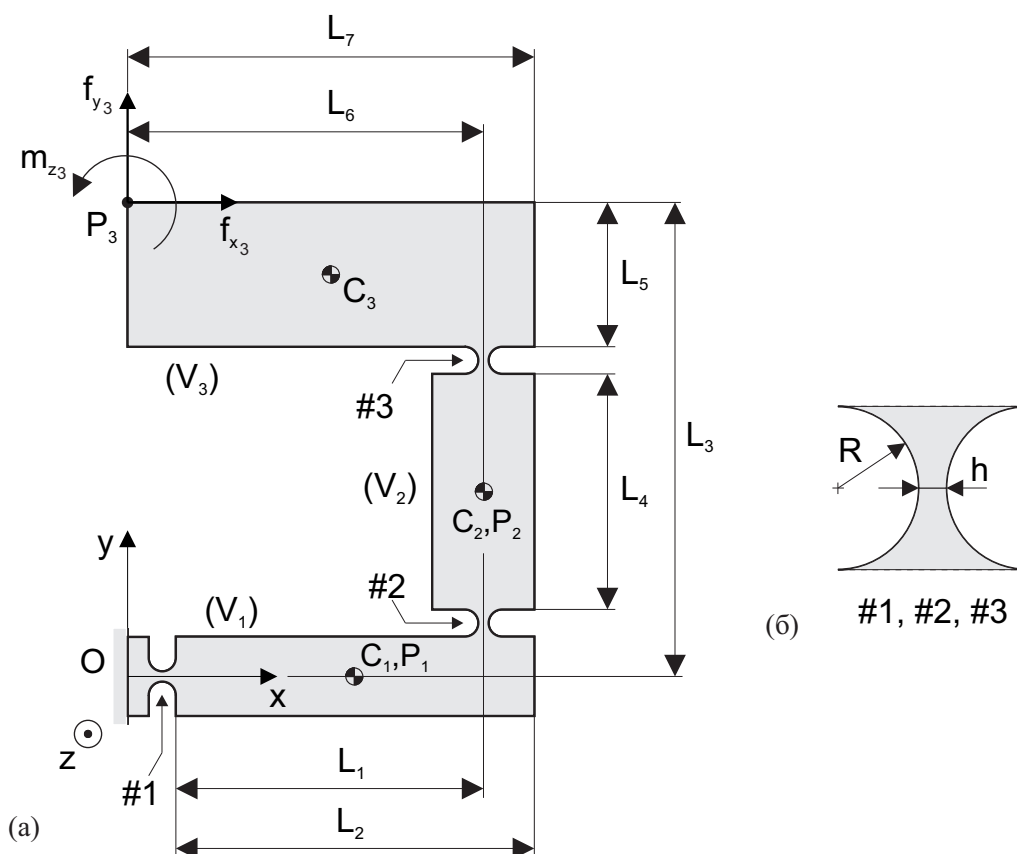
$$\mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}. \quad (6.51)$$

Имајући у виду да вектор апсолутних координата садржи координате произвољно изабраних тачака  $P_i$  крутих чланова ( $V_i$ ) ( $i = 1, \dots, n$ ) дефинисаних у односу на инерцијални координатни систем  $Oxyz$ , јасно је да је могуће у потпуности одредити положај сваке произвољно изабране тачке  $P_i$  при задатом вектору оптерећења  $\mathbf{F}$ . Зато је препорука да се положај сваке од тачака  $P_i$  на крутим члановима ( $V_i$ ) изабере у складу са потребама за одређивањем померања у карактеристичним тачкама гипких механизма.

Неретко је потребно одредити само померање у некој тачки на последњем крутом члану ( $V_n$ ), док за остале круте чланове ( $V_i$ ) ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) у гипком механизму нема захтева за одређивањем померања. У том случају је корисно изабрати да се положај произвољно изабране тачке  $P_i$  поклапа са положајем средишта маса  $C_i$ , код првих  $n - 1$  крутих чланова гипког механизма. Тиме се додатно олакшава рачуница.

## 6.4.5 Нумерички пример

На слици 6.12 (а) је приказан гипки RRR механизам који се састоји од три крута члана,  $(V_1)$ ,  $(V_2)$  и  $(V_3)$ , који су међусобно повезани са три идентична гипка зглоба, #1, #2 и #3, у облику полукружног зареза, који су детаљно приказани на слици 6.12 (б). Претпоставља се да се приказани механизам креће у равни  $Oxy$ , при чему се занемарује утицај силе Земљине теже.



Слика 6.12: (а) Гипки RRR механизам, (б) гипки зглоб # $i$  у облику кружног зареза

Разматрани гипки механизам је израђен од легуре алуминијума која има следеће карактеристике: модул еластичности  $E = 0.717 [N/m^2]$ , Поасонов коефицијент  $\mu = 0.33$  и густину  $\rho = 2810 [kg/m^3]$ . Остале нумеричке вредности геометријских параметара приказаних на слици 6.12 су:  $L_1 = 15.5 [mm]$ ,  $L_2 = 19.5 [mm]$ ,  $L_3 = 28 [mm]$ ,  $L_4 = 8 [mm]$ ,  $L_5 = 10.5 [mm]$ ,  $L_6 = 27 [mm]$ ,  $L_7 = 31 [mm]$ ,  $h_1 = h_2 = h_3 = h = 0.94 [mm]$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R = 1.5 [mm]$ ,  $b = 12.7 [mm]$ .

На основу задатих нумеричких параметара гипког механизма, углови између подужних оса гипких зглобова # $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) у недеформисаном стању и  $x$  осе су

$\alpha_1 = 0$ , и  $\alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$ , респективно. Вектори положаја произвољно изабраних тачака  $P_i$  у односу на средишта маса  $C_i$  крутих чланова ( $V_i$ ), ( $i = 1, 2, 3$ ) су

$$\overrightarrow{C_1P_1} = \overrightarrow{C_2P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.52)$$

и

$$\overrightarrow{C_3P_3} = \begin{bmatrix} -\frac{L_7}{2} & \frac{L_5}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (6.53)$$

респективно. Вектори положаја зглобног елемента  $J_i$  у односу на произвољно изабране тачке  $P_{i-1}$  и  $P_i$  суседних крутих чланова ( $V_{i-1}$ ) и ( $V_i$ ), ( $i = 1, 2, 3$ ) су

$$d_1^{(V_1)} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{L_2}{2} + R_1\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (6.54)$$

$$d_2^{(V_1)} = \begin{bmatrix} L_1 - \frac{L_2}{2} & L_3 - L_4 - L_5 - 2R_3 - R_2 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (6.55)$$

$$d_2^{(V_2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{L_4}{2} + R_2\right) & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (6.56)$$

$$d_3^{(V_2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_4}{2} + R_3 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.57)$$

и

$$d_3^{(V_3)} = \begin{bmatrix} L_6 - \frac{L_7}{2} & -\left(\frac{L_5}{2} + R_3\right) & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (6.58)$$

респективно.

Аксијални моменти инерције крутих чланова ( $V_i$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ) су:

$$J_{C_1\zeta} = \frac{1}{12}m_1 (L_2^2 + (2(L_3 - L_4 - L_5 - 4R))^2), \quad (6.59)$$

$$J_{C_2\zeta} = \frac{1}{12}m_2 (L_4^2 + (2(L_2 - L_1))^2), \quad (6.60)$$

$$J_{C_3\zeta} = \frac{1}{12}m_3 (L_5^2 + L_7^2), \quad (6.61)$$

где су

$$m_1 = 2\rho b (L_3 - L_4 - L_5 - 4R) L_2, \quad (6.62)$$

$$m_2 = 2\rho b (L_7 - L_6) L_4, \quad (6.63)$$

$$m_3 = \rho b L_5 L_7, \quad (6.64)$$

масе крутих чланова ( $V_i$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ).

У анализи која следи биће коришћене четири различите вредности коефицијената еластичности  $C_a$ ,  $C_{b,t}$  и  $C_{b,r}$  разматраног гипког зглоба који су добијени у референцама [78] и [85–87]. Вредности ових коефицијената дате су за сваки од наведених случајева у табели 21.

Случај	Референца	Коефицијенти еластичности		
		$C_a \cdot 10^9 [m/N]$	$C_{b,t} \cdot 10^8 [m/N]$	$C_{b,r} [rad/Nm]$
1	[85]	4.143	1.561	0.0254
2	[86]	1.534	4.994	0.0222
3	[78]	2.402	5.155	0.0204
4	[87]	2.415	7.190	0.0254

Табела 21: Коефицијенти еластичности гипког зглоба у облику кружног зареза доступни у литератури

Нека у тачки  $P_3$  делују силе у правцу  $x$  и  $y$  осе интензитета  $f_{x_3} = f_{y_3} = 1 [N]$ , као и спрег сила момента  $m_{z_3} = 0.02 [Nm]$ , као што је приказано на слици 6.12. Претпоставља се да у осталим тачкама гипког механизма не делују спољашње силе, па важи да је  $f_{x_i} = f_{y_i} = 0$  и  $m_{z_i} = 0$  ( $i = 1, 2$ ).

У табели 22 приказана су померања тачке  $P_3$  гипког механизма у правцу  $x$  и  $y$  осе ( $\Delta x_3$  и  $\Delta y_3$ ), као и закретање ( $\theta_3$ ) крутог члана ( $V_3$ ) у односу на  $x$  осу. Приказани су резултати добијени коришћењем аналитичког приступа изложеног у референци [87], методе коначних елемената, као и приближних модела у облику квази-крутих тела са три односно једним степеном слободе кретања (PRBM-3 и PRBM-1) за сваки од четири дефинисане групе коефицијената еластичности, приказаних у табели 21.

Овде се претпоставља да су вредности померања која су добијена применом методе коначних елемената у референци [87] најтачнија јер је за анализу коришћен софтверски пакет ANSYS уз коришћење великог броја елемената за формирање мреже. За сваку од вредности померања која је добијена применом остала три приступа дата је и вредност апсолутне грешке у односу на вредност добијену применом методе коначних елемената. У референци [87] је кроз поређење резултата добијених применом аналитичког приступа и методе коначних елемената показано да се најбоље



слагање резултата постиже при коришћењу коефицијената еластичности за четврти случај (видети табелу 21). Зато ће овде бити спроведена детаљна анализа тачности предложеног PRBM-3 модела при коришћењу управо ових вредности коефицијената еластичности.

Случај	Метод	Померања у тачки $P_3$		
		$\Delta x_3 \times 10^5 [m]$	$\Delta y_3 \times 10^5 [m]$	$\theta_3 \times 10^3 [rad]$
1	реф. [87]	3.58 (1.92 %)	3.819 (1.37 %)	-1.7042 (1 %)
	PRBM-3	3.6066 (1.19 %)	3.8156 (1.46 %)	-1.7018 (1.14 %)
	PRBM-1	3.6156 (0.94 %)	3.8150 (1.47 %)	-1.7018 (1.14 %)
2	реф. [87]	3.157 (13.51 %)	3.326 (14.1 %)	-1.4872 (13.61 %)
	PRBM-3	3.1580 (13.48 %)	3.3375 (13.8 %)	-1.4874 (13.59 %)
	PRBM-1	3.1597 (13.43 %)	3.3347 (13.88 %)	-1.4874 (13.59 %)
3	реф. [87]	2.907 (20.36 %)	3.061 (20.95 %)	-1.369 (20.47 %)
	PRBM-3	2.904 (20.44 %)	3.0679 (20.77 %)	-1.3668 (20.60 %)
	PRBM-1	2.9033 (20.46 %)	3.0644 (20.86 %)	-1.3668 (20.60 %)
4	реф. [87]	3.622 (0.78 %)	3.827 (1.16 %)	-1.7044 (0.99 %)
	PRBM-3	3.6166 (0.92 %)	3.8204 (1.33 %)	-1.7018 (1.14 %)
	PRBM-1	3.6156 (0.94 %)	3.815 (1.47 %)	-1.7018 (1.14 %)
	FEM [87]	3.65	3.872	-1.7214

Табела 22: Померања у тачки  $P_3$  гипког  $RRR$  механизма

У овом случају вредности апсолутних грешака при одређивању померања  $\Delta x_3$ ,  $\Delta y_3$  и  $\theta_3$  аналитичким приступом у односу на иста померања добијена методом коначних елемената су 0.78 %, 1.16 % и 0.99 %, респективно. Вредности померања добијених применом модела квази-крутог тела (PRBM-3 и PRBM-1) се у великој мери поклапају са померањима добијеним применом аналитичког приступа. Тако су апсолутне грешке у односу на резултате добијене применом коначних елемената при одређивању померања PRBM-3 моделом 0.92 %, 1.33 % и 1.14 %, а коришћењем PRBM-1 модела 0.94 %, 1.47 % и 1.14 %. Овде треба приметити да је апсолутна грешка при одређивању угла  $\theta_3$  једнака при коришћењу оба метода квази-крутог тела (PRBM-3 и PRBM-1). Разлог за идентичан резултат код оба модела је што се за опис еластичности при угаоним померањима код оба модела користи спирална опруга крутости  $k_R$ , која је дефинисана изразом (6.14). Са друге стране, при одређивању померања  $\Delta x_3$  и  $\Delta y_3$ , апсолутне грешке код PRBM-3 модела (0.92 % и 1.33 %) су нешто мање у односу на апсолутне грешке које настају код PRBM-1 модела (0.94 % и 1.47 %).

Иако добијени резултати показују да су резултати предложеног PRBM-3 модела незнатно тачнији у односу на резултате добијене коришћењем PRBM-1 модела, на овом месту треба истаћи неколико предности PRBM-3 модела због којих је знатно олакшана анализа померања раванских гипких механизма. Најпре, PRBM-3 моделом се претпоставља да у гипком зглобу постоје три степена слободе кретања, док се код PRBM-1 модела користи само један степен слободе кретања.

Зато је код PRBM-3 модела гипког зглоба могуће узети у обзир и утицај смицања преко крутости опруге  $k_{L_2}$  која је дефинисана изразом (6.14). Такође, ако се за опис померања крутих чланова ( $V_i$ ) ( $i = 1, \dots, n$ ) искористе апсолутне координате произвољно изабраних тачака  $P_i$  у односу на инерцијални координатни систем  $Oxy$ , као и закретање крутих чланова ( $V_i$ ) у односу на  $x$  осу инерцијалног координатног система, број степени слободе кретања читавог гипког механизма одговара броју употребљених апсолутних координата. Притом је могуће за анализу користити управо апсолутне координате произвољно изабраних тачака  $P_i$  крутих чланова ( $V_i$ ) чије померање је потребно одредити, па се из израза (6.51) директно добијају жељена померања. Са друге стране, PRBM-1 модел садржи само један степен слободе кретања, па би евентуална употреба апсолутних координата произвољно изабраних тачака  $P_i$  крутих чланова ( $V_i$ ) довела до потребе за увођењем тзв. прекобројних координата, што би додатно искомпликовало поступак анализе. Зато се за опис PRBM-1 модела

најчешће користе релативне координате које се поклапају са релативним закретањима у ротационим зглобовима у овом моделу. Примена ових координата захтева додатна израчунавања при одређивању померања у задатим тачкама механизма након одређивања вредности релативних координата. На основу свега наведеног је јасна предност PRBM-3 модела гипког зглоба у односу на PRBM-1 модел.

Поред анализе померања, у табели 23 приказане су и вредности прве три фреквенције осциловања  $f_i = \omega_i / (2\pi)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) разматраног RRR гипког механизма за сва четири случаја вредности коефицијената еластичности.

Случај	Фреквенције $f_i$ [Hz]		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	262.003 (0.12 %)	512.511 (0.42 %)	2283.16 (3.87 %)
2	280.037 (7 %)	546.743 (7.13 %)	2381.48 (8.34 %)
3	292.051 (11.6 %)	569.741 (11.6 %)	2462.97 (12 %)
4	261.698	510.368	2198.18

Табела 23: Прве три фреквенције осциловања  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) гипког RRR механизма добијене за различите вредности коефицијената еластичности

Колико је аутору познато, за разматрани механизам не постоје резултати у доступној литератури са којима би било могуће извршити поређење. Као што је већ показано при анализи померања, четврти случај вредности коефицијената еластичности гипког зглоба се показао као најтачнији. Зато су одређене и апсолутне грешке између вредности фреквенција добијених применом сваког од прва три случаја коефицијената еластичности у односу на вредност фреквенција при коришћењу четвртог случаја коефицијената еластичности. Може се видети да постоји значајно одступање добијених резултата у односу на четврти, референтни случај. Посебно високе вредности апсолутних грешака могу се уочити код трећег случаја, где је највећа вредности апсолутне грешке при одређивању треће фреквенције и износи чак 12 %. На основу овога се може закључити да тачност одређивања коефицијената еластичности гип-

ког зглоба значајно утичу на тачност одређивања модалних карактеристика гипких механизма.

Случај	Метод	Фреквенције $f_i$ [Hz]		
		$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	PRBM-3	262.003	512.511	2283.16
	PRBM-1	261.844 (0.06 %)	511.486 (0.20 %)	2237.25 (2.01 %)
2	PRBM-3	280.037	546.743	2381.48
	PRBM-1	280.081 (0.02 %)	547.109 (0.07 %)	2393.06 (0.5 %)
3	PRBM-3	292.051	569.741	2462.97
	PRBM-1	292.176 (0.04 %)	570.736 (0.17 %)	2496.41 (1.4 %)
4	PRBM-3	261.698	510.368	2198.18
	PRBM-1	261.844 (0.06 %)	511.486 (0.22 %)	2237.25 (1.8 %)

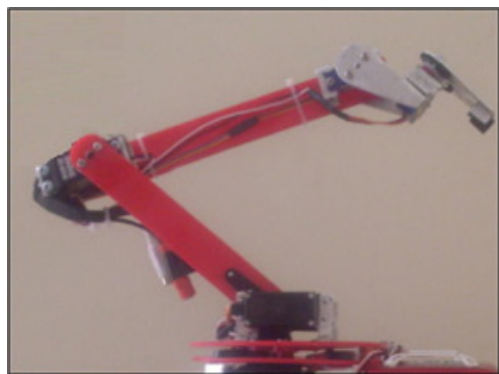
Табела 24: Прве три фреквенције осциловања  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) гипког RRR механизма добијене применом два различита квази-крута модела гипког зглоба (PRBM-1 и PRBM-3)

Такође, у табели 24 је извршено поређење вредности прве три фреквенције  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) добијене коришћењем PRBM-1 и PRBM-3 модела за сваки од четири случаја вредности коефицијената еластичности. Пошто је код анализе померања показано да су резултати добијени коришћењем PRBM-3 модела тачнији у односу на резултате добијене применом PRBM-1 модела, у табели 24 су приказана одступања резултата PRBM-1 модела у односу на PRBM-3. Разлика у резултатима код прве фреквенције су занемарљиво мале, док при одређивању треће фреквенце постоје значајна одступања, која за први случај коефицијената еластичности износе 2.01 %.

## 7 ОБРТАЊЕ ХОМОГЕНОГ ЕЛАСТИЧНОГ ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПРЕСЕКА ОКО НЕПОМИЧНЕ ОСЕ

Модел еластичног штапа који се обрће око непомичне осе је веома заступљен у литератури у последње време. Разлог за то је што се делови многих инжењерских објеката могу описати управо овим моделом. Неки од њих су лаке роботске руке, лопатице ротора хеликоптера, лопатице турбина, делови вештачких сателита, и слично (видети слику 7.1 (а)-(г)). Модерна индустрија има све већу потребу за машинама код којих је брзина покретних елемената велика. Истовремено, тежња је да се смањи утрошак материјала, и да произведени елементи буду што је могуће лакши. Као резултат оваквих захтева добијају се елементи машина који су малих тежина, али повећане еластичности. Зато се при кретању оваквих елемената јављају деформације које могу значајно утицати на динамичко понашање читаве машине и угрозити захтевану прецизност.

Тако је на пример при раду лаке роботске руке која је приказана на слици 7.1 (а) потребно обезбедити велике брзине кретања како би се постигли технолошки захтеви производног процеса у којем учествује, а да притом врх руке на којем се могу наћи различити извршни елементи оствари задату путању. Да би се то постигло, потребно је формирати довољно тачан механички модел манипулатора, како би се евентуална одступања од жељене путање током кретања могла кориговати одговарајућим управљачким алгоритмом. Код лопатица ротора хеликоптера и турбине ветрогенератора, приказаних на слици 7.1 (б) и (в), респективно, потребно је познавати динамичке карактеристике лопатица током кретања како не би дошло до оштећења лопатица при експлоатацији. Елементи вештачких сателита, приказаног на слици 7.1 (г), су међусобно повезани дугим еластичним штаповима. Имајући у виду да током извршавања своје функције овај сателит извршава низ специфичних маневара, од велике је важности формирати довољно прецизан модел како не би дошло до угрожавања његове стабилности током извођења поменутих маневара.



(а)



(б)



(в)



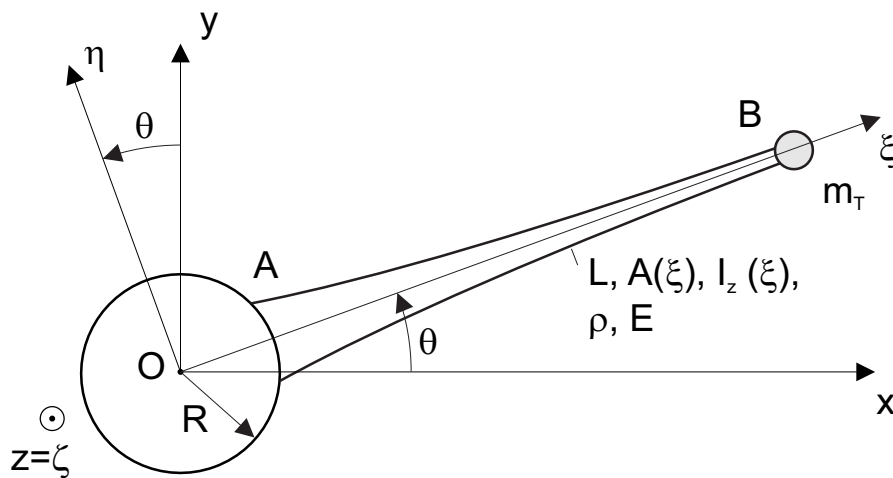
(г)

Слика 7.1: Примери примене модела еластичног штапа који се обрће око непомичне осе: (а) лака роботска рука [88], (б) лопатице ротора хеликоптера [89], (в) лопатице турбине ветрогенератора [90], (г) вештачки сателит [91]

Иако сваки од наведених инжењерских објеката изводи сложено кретање, у литератури се значајно место посвећује анализи упрошћеног модела еластичног штапа који се обрће око непомичне осе у равни, што представља полазну тачку за даље сложеније анализе. У референцама [44, 45] су примењене две варијанте метода крутих сегмената за анализу еластичног штапа који се обрће око непомичне осе. Међутим, иако постоје ограничења у примени ових метода, у наведеној литератури нису анализирани узроци који до њих доводе. Зато ће у овом поглављу бити спроведена детаљна анализа и установљене критичне вредности параметара штапа до којих је могуће примењивати предложену варијанту методе крутих сегмената.

У наставку овог поглавља предмет анализе ће бити еластични штап са континуалном променом параметара, приказан на слици 7.2. Еластични штап је дужине  $L$ , и при кретању је фиксиран за круту главчину полупречника  $R$  у тачки  $A$ . На сло-

бодном крају штапа  $B$  фиксирана је концентрисана маса  $m_T$ . Због потребе анализе која следи уведена су два координатна система. Први је непокретни инерцијални координатни систем  $Oxyz$ , а други је покретни координатни систем  $O\xi\eta\zeta$  фиксиран за главчину. Координатни систем  $O\xi\eta\zeta$  је одабран тако да се оса  $\xi$  поклапа са уздужном осом симетрије недеформисаног штапа, а оса  $\zeta$  се поклапа са осом  $z$ . Углом  $\theta$  описана је ротација покретног координатног система  $O\xi\eta\zeta$  у односу на непокретни инерцијални координатни систем  $Oxyz$ . Претпоставља се да је при анализи познат закон промене угла  $\theta$ .



Слика 7.2: Обртање еластичног штапа променљивог пресека око непомицне осе  $Oz$

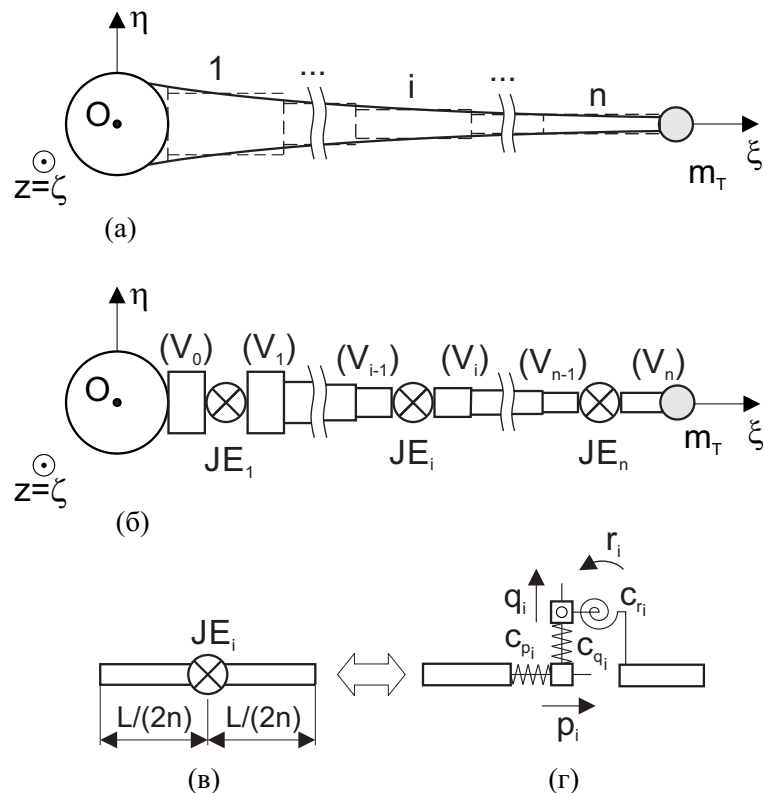
## 7.1 Дискретизација еластичног штапа на круте сегменте

Овде ће бити извршена дискретизација еластичног штапа променљивог пресека на сличан начин као у поглављу 3.4. Најпре је еластични штап приближно представљен у облику  $n$  једнаких еластичних сегмената дужине  $L_i = L/n$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) константног пресека, као што је приказано на слици 7.3(а). Геометријске карактеристике попречног пресека ( $A_i, I_{z_i}$ ) уведених еластичних сегмената могу се одредити на идентичан начин као и у поглављу 3.4 користећи изразе (3.13)-(3.18). Затим је сваки од  $n$  еластичних сегмената замењен са два крута сегмента једнаких дужина  $L/(2n)$  који су међусобно повезани зглобним елементом  $JE_i$ , као што је приказано на слици 7.3(в). Током ротације разматраног еластичног штапа као доминантно оптерећење

јавља се савијање штапа у равни ротације. Поред тога, за анализу која следи су од значаја и аксијалне деформације штапа током ротације. Из тог разлога је претпостављено да сваки зглобни елемент  $JE_i$  има три степена слободе кретања. Један у правцу аксијалних деформација штапа описан релативном translацијом  $p_i$ , други у правцу попречних деформација описан релативном translацијом  $q_i$ , и трећи којим је описана релативна ротација  $r_i$  крутог сегмента ( $V_i$ ) у односу на претходни крути сегмент ( $V_{i-1}$ ). У правцу сваког од поменути три релативна померања постављене су опруге чије се крутости могу одредити коришћењем израза (3.19) на следећи начин:

$$c_{p_i} = n \frac{A_i E}{L}, \quad c_{q_i} = 12n^3 \frac{EI_{z_i}}{L^3}, \quad c_{r_i} = n \frac{EI_{z_i}}{L}. \quad (7.1)$$

Упрошћен и детаљан приказ овог зглобног елемента приказани су на сликама 7.3 (в) и (г), респективно. На крају се добија приближни модел ротационог еластичног штапа са променљивим параметрима у облику система крутих сегмената ( $V_i$ ) ( $i = 0, \dots, n$ ) који су међусобно повезани зглобним елементима  $JE_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) као што је приказано на слици 7.3(б).



Слика 7.3: Дискретизација еластичног штапа на круте сегменте



У наставку ће бити дефинисани параметри уведених крутих сегмената који су неопходни за анализу која следи. Тако се дужина, маса и момент инерције крутог сегмента  $(V_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) у односу на осу  $C_i\zeta$  могу дефинисати као:

$$l_i = \begin{cases} R + L/(2n), & i = 0, \\ L/n, & 0 < i < n, \\ L/(2n), & i = n, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$m_i = \begin{cases} m_h + \rho A_1 L / (2n), & i = 0, \\ \rho (A_i + A_{i+1}) L / (2n), & 0 < i < n, \\ \rho A_n L / (2n) + m_T, & i = n, \end{cases} \quad (7.3)$$

$$J_{C_i\zeta} = \begin{cases} J_h + m_h \overline{O_0 C_0}^2 + \rho A_1 \frac{L}{2n} \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L}{2n} \right)^2 + \left( \overline{O_0 C_0} - \frac{L}{4n} \right)^2 \right), & i = 0, \\ \rho A_i \frac{L}{2n} \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L}{2n} \right)^2 + \left( \overline{O_i C_i} - \frac{L}{4n} \right)^2 \right) \\ + \rho A_{i+1} \frac{L}{2n} \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L}{2n} \right)^2 + \left( \frac{3L}{4n} - \overline{O_i C_i} \right)^2 \right), & 0 < i < n, \\ \rho A_n \frac{L}{2n} \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L}{2n} \right)^2 + \left( \overline{O_n C_n} - \frac{L}{4n} \right)^2 \right) + m_T \left( \frac{L}{2n} - \overline{O_n C_n} \right)^2, & i = n, \end{cases} \quad (7.4)$$

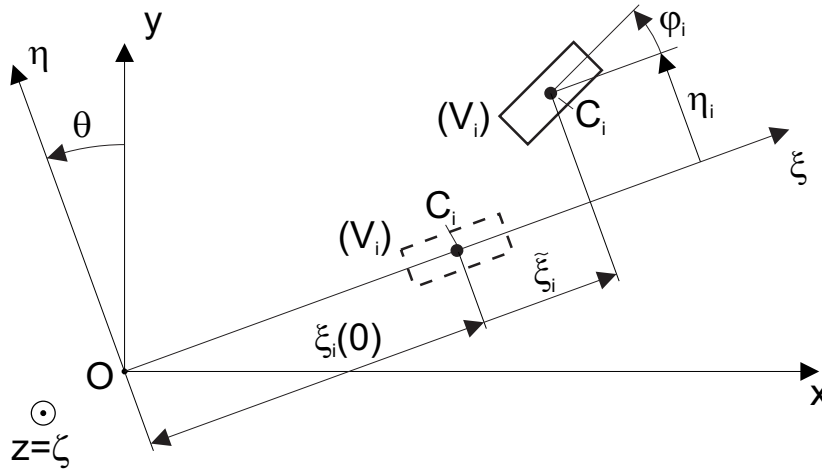
где је

$$\overline{O_i C_i} = \begin{cases} \frac{\rho A_1 L (R + L / (4n))}{2n \cdot m_h + \rho A_1 L}, & i = 0, \\ \frac{L (A_i + 3A_{i+1})}{4n (A_i + A_{i+1})}, & 0 < i < n, \\ \frac{L (\rho A_n L + 4n \cdot m_T)}{4n (\rho A_n L + 2n \cdot m_T)}, & i = n, \end{cases}$$

положај средишта маса у односу на леви крај крутог сегмента  $(V_i)$ , и  $m_h$  представља масу круте главчине.

Еластични штап се деформише током кретања, па зато долази и до померања крутих сегмената  $(V_i)$  приближног модела штапа у односу на почетни положај. Положај крутог сегмента  $(V_i)$  у односу на покретни координатни систем  $O\xi\eta\zeta$  може се описати координатама  $\xi_i$  и  $\eta_i$  које представљају померања средишта маса крутог сегмента у аксијалном и попречном правцу, респективно, као и углом закретања  $\varphi_i$

крутог сегмента у односу на правац  $\xi$  осе, као што је приказано на слици 7.4.



Слика 7.4: Кретање крутог сегмента  $(V_i)$  током обртања главчине

Координата крутог  $\xi_i$  може се изразити на следећи начин:

$$\xi_i = \xi_i(0) + \tilde{\xi}_i, \quad (7.5)$$

где је

$$\xi_i(0) = \begin{cases} \overline{O_0 C_0}, & i = 0, \\ \sum_{k=0}^{i-1} l_k + \overline{O_i C_i}, & i > 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

вредност аксијалне координате средишта маса крутог сегмента  $(V_i)$  у недеформисаном положају штапа, и  $\tilde{\xi}_i$  представља померање средишта маса крутог сегмента  $(V_i)$  у односу на недеформисани положај. Треба нагласити и да у недеформисаном положају штапа за остале две координате крутог сегмента важи да је

$$\eta_i(0) = 0, \quad \varphi_i(0) = 0. \quad (7.7)$$

## 7.2 Потенцијална енергија еластичног штапа који се обрће око непомичне осе

Потенцијална енергија обртног еластичног штапа дискретизованог на круте сегменте може се одредити на следећи начин:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (c_{p_i} p_i^2 + c_{q_i} q_i^2 + c_{r_i} r_i^2), \quad (7.8)$$

где су  $p_i$ ,  $q_i$  и  $r_i$  релативна померања у зглобном елементу  $JE_i$ .

Веза између координата суседних крутих сегмената ( $V_{i-1}$ ) и ( $V_i$ ) може се успоставити уз коришћење релативних померања зглобног елемента  $JE_i$  који их повезује коришћењем следећих релација:

$$\xi_{i-1} + \left( \overline{C_{i-1}O'_{i-1}} + p_i \right) \cos \varphi_{i-1} - q_i \sin \varphi_{i-1} + \overline{O_i C_i} \cos \varphi_i = \xi_i, \quad (7.9)$$

$$\eta_{i-1} + \left( \overline{C_{i-1}O'_{i-1}} + p_i \right) \sin \varphi_{i-1} + q_i \cos \varphi_{i-1} + \overline{O_i C_i} \sin \varphi_i = \eta_i, \quad (7.10)$$

$$\varphi_{i-1} + r_i = \varphi_i, \quad (7.11)$$

при чему важи да је  $\overline{C_i O'_i} = l_i - \overline{O_i C_i}$ .

Ако се сада узму у обзир изрази (7.5)-(7.7) и претпоставка о малим деформацијама штапа ( $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$ ,  $\cos \varphi_i \approx 1$ ), након уклањања чланова другог реда и вишег из претходна три изрази се могу одредити релативна померања у зглобном елементу  $JE_i$  на следећи начин:

$$p_i = -\tilde{\xi}_{i-1} + \tilde{\xi}_i, \quad (7.12)$$

$$q_i = -\eta_{i-1} + \eta_i - \overline{C_{i-1}O'_{i-1}} \varphi_{i-1} - \overline{O_i C_i} \varphi_i, \quad (7.13)$$

$$r_i = -\varphi_{i-1} + \varphi_i. \quad (7.14)$$

Користећи претходне изразе за релативна померања у зглобном елементу, на основу изрази (7.8) коначно се добија потенцијална енергија дискретизованог обртног еластичног штапа у облику:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n & \left( c_{p_i} \left( -\tilde{\xi}_{i-1} + \tilde{\xi}_i \right)^2 + c_{q_i} \left( -\eta_{i-1} + \eta_i - \overline{C_{i-1}O'_{i-1}} \varphi_{i-1} - \overline{O_i C_i} \varphi_i \right)^2 \right. \\ & \left. + c_{r_i} \left( -\varphi_{i-1} + \varphi_i \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

### 7.3 Кинетичка енергија еластичног штапа који се обрће око непомичне осе

Кинетичка енергија обртног еластичног штапа дискретизованог на круте сегменте може се одредити на следећи начин:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (m_i v_i^2 + J_{C_i \zeta} \omega_i^2), \quad (7.16)$$

где су  $v_i$  и  $\omega_i$  брзина средишта маса и угаона брзина крутог сегмента ( $V_i$ ), респективно.

Положај средишта маса крутог сегмента ( $V_i$ ) у односу на непокретни координатни систем  $Oxyz$  може се описати следећим координатама:

$$x_i = \xi_i \cos \theta - \eta_i \sin \theta, \quad (7.17)$$

$$y_i = \xi_i \sin \theta + \eta_i \cos \theta. \quad (7.18)$$

Ако се узме у обзир израз (7.5), први изводи по времену претходно дефинисаних координата средишта маса крутог сегмента ( $V_i$ ) су:

$$\dot{x}_i = \dot{\tilde{\xi}}_i \cos \theta - \left( \xi_i(0) + \tilde{\xi}_i \right) \dot{\theta} \sin \theta - \dot{\eta}_i \sin \theta - \eta_i \dot{\theta} \cos \theta, \quad (7.19)$$

$$\dot{y}_i = \dot{\tilde{\xi}}_i \sin \theta + \left( \xi_i(0) + \tilde{\xi}_i \right) \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\eta}_i \cos \theta + \eta_i \dot{\theta} \sin \theta, \quad (7.20)$$

Квадрат брзине средишта маса крутог сегмента ( $V_i$ ) се сада може одредити на следећи начин:

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2, \quad (7.21)$$

односно, након узимања у обзир израза (7.19) и (7.20):

$$v_i^2 = \dot{\tilde{\xi}}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + 2 \left( \left( \xi_i(0) + \tilde{\xi}_i \right) \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\tilde{\xi}}_i \right) \dot{\theta} + \left( \left( \xi_i(0) + \tilde{\xi}_i \right)^2 + \eta_i^2 \right) \dot{\theta}^2. \quad (7.22)$$

Угаона брзина крутог сегмента ( $V_i$ ) је:

$$\omega_i = \dot{\theta} + \dot{\varphi}_i. \quad (7.23)$$

Коначно, ако се узму у обзир изрази (7.22) и (7.23), израз за кинетичку енергију

(7.16) добија облик:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left( m_i \left( \dot{\tilde{\xi}}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + 2 \left( (\xi_i(0) + \tilde{\xi}_i) \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\tilde{\xi}}_i \right) \dot{\theta} + \left( (\xi_i(0) + \tilde{\xi}_i)^2 + \eta_i^2 \right) \dot{\theta}^2 \right) + J_{C_i \zeta} \left( \dot{\theta} + \dot{\varphi}_i \right)^2 \right). \quad (7.24)$$

#### 7.4 Диференцијалне једначине кретања еластичног штапа који се обрће око непомичне осе

Диференцијалне једначине кретања разматраног дискретизованог обртног еластичног штапа могу се одредити коришћењем Лагранжевих једначина друге врсте [61]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\xi}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \tilde{\xi}_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\xi}_i} + Q_{\tilde{\xi}_i}, \quad (7.25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial T}{\partial \eta_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \eta_i} + Q_{\eta_i}, \quad (7.26)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} + Q_{\varphi_i}, \quad (7.27)$$

где је  $i = 1, \dots, n$  и  $Q_{\tilde{\xi}_i} = Q_{\eta_i} = Q_{\varphi_i} = 0$ .

Коришћењем израза за потенцијалну и кинетичку енергију, (7.15) и (7.24), диференцијалне једначине кретања (7.25)-(7.27) добијају облик:

$$m_i \ddot{\tilde{\xi}}_i - 2m_i \dot{\theta} \dot{\eta}_i - c_{p_i} \tilde{\xi}_{i-1} + \left( c_{p_i} + c_{p_{i+1}} - m_i \dot{\theta}^2 \right) \tilde{\xi}_i - c_{p_{i+1}} \tilde{\xi}_{i+1} = m_i \xi_i(0) \dot{\theta}^2 + m_i \eta_i \ddot{\theta}, \quad (7.28)$$

$$m_i \ddot{\eta}_i + 2m_i \dot{\theta} \dot{\tilde{\xi}}_i - c_{q_i} \eta_{i-1} - \overline{C_{i-1} O'_{i-1} c_{q_i}} \varphi_{i-1} + \left( c_{q_i} + c_{q_{i+1}} - m_i \dot{\theta}^2 \right) \eta_i + \left( \overline{O_i C_i c_{q_i}} - \overline{C_i O'_i c_{q_{i+1}}} \right) \varphi_i - c_{q_{i+1}} \eta_{i+1} + \overline{O_{i+1} C_{i+1} c_{q_{i+1}}} \varphi_{i+1} = -m_i \left( \xi_i(0) + \tilde{\xi}_i \right) \ddot{\theta}, \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
& J_{C_i\zeta}\ddot{\varphi}_i + \overline{O_i C_i} c_{q_i} \eta_{i-1} + \left(-c_{r_i} + \overline{C_{i-1} O'_{i-1}} \overline{O_i C_i} c_{q_i}\right) \varphi_{i-1} \\
& + \left(-\overline{O_i C_i} c_{q_i} + \overline{C_i O'_i} c_{q_{i+1}}\right) \eta_i + \left(c_{r_i} + c_{r_{i+1}} + \overline{C_i O'_i} c_{q_{i+1}} + \overline{O_i C_i} c_{q_i}\right) \varphi_i \\
& - \overline{C_i O'_i} c_{q_{i+1}} \eta_{i+1} + \left(\overline{C_i O'_i} \overline{O_{i+1} C_{i+1}} c_{q_{i+1}} - c_{r_{i+1}}\right) \varphi_{i+1} = -J_{C_i\zeta}\ddot{\theta}, \quad (7.30)
\end{aligned}$$

где је  $i = 1, \dots, n$ ,  $\tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_{n+1} = 0$ ,  $\eta_0 = \eta_{n+1} = 0$ ,  $\varphi_0 = \varphi_{n+1} = 0$ .

Претходно приказани систем од  $3n$  диференцијалних једначина може бити приказан у матричном облику на следећи начин:

$$\mathbf{M}_v \ddot{\mathbf{v}} + \left(\mathbf{K} - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_m\right) \mathbf{v} - 2\mathbf{M}_{mv} \dot{\mathbf{v}} \dot{\theta} = \mathbf{M}_{\theta v} \ddot{\theta} + \mathbf{M}_{m\xi} \dot{\theta}^2, \quad (7.31)$$

где је:

$$\mathbf{v} = \left[ \tilde{\xi}_1 \quad \eta_1 \quad \varphi_1 \quad \dots \quad \tilde{\xi}_i \quad \eta_i \quad \varphi_i \quad \dots \quad \tilde{\xi}_n \quad \eta_n \quad \varphi_n \right]^T, \quad (7.32)$$

$$\mathbf{M}_v = \text{diag}(\mathbf{M}_{v_1}, \dots, \mathbf{M}_{v_i}, \dots, \mathbf{M}_{v_n}) \in R^{3n \times 3n}, \quad (7.33)$$

$$\mathbf{M}_{v_i} = \text{diag}(m_i, m_i, J_{C_i\zeta}) \in R^{3 \times 3}, \quad (7.34)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} + \mathbf{K}_{11}^{(3)} & \mathbf{K}_{12}^{(3)} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^{(i-1)} & \mathbf{K}_{22}^{(i-1)} + \mathbf{K}_{11}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{K}_{12}^{(i)} & \mathbf{0} & \vdots & \vdots \\
\ddots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\
\mathbf{K}_{21}^{(n-1)} & \mathbf{K}_{22}^{(n-1)} + \mathbf{K}_{11}^{(n)} & \mathbf{K}_{12}^{(n)} & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^{(n)} & \mathbf{K}_{22}^{(n)} & \vdots
\end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

$$\mathbf{K}_{11}^{(i)} = \begin{bmatrix} c_{p_i} & 0 & 0 \\ 0 & c_{q_i} & \overline{C_{i-1}O'_{i-1}c_{q_i}} \\ 0 & \overline{C_{i-1}O'_{i-1}c_{q_i}} & c_{r_i} + \overline{C_{i-1}O'^2_{i-1}c_{q_i}} \end{bmatrix}, \quad (7.36)$$

$$\mathbf{K}_{12}^{(i)} = \begin{bmatrix} -c_{p_i} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{q_i} & \overline{O_i C_i c_{q_i}} \\ 0 & -\overline{C_{i-1}O'_{i-1}c_{q_i}} & \overline{C_{i-1}O'_{i-1}O_i C_i c_{q_i}} - c_{r_i} \end{bmatrix}, \quad (7.37)$$

$$\mathbf{K}_{12}^{(i)} = \left(\mathbf{K}_{21}^{(i)}\right)^T, \quad \mathbf{K}_{22}^{(i)} = \begin{bmatrix} c_{p_i} & 0 & 0 \\ 0 & c_{q_i} & -\overline{O_i C_i c_{q_i}} \\ 0 & -\overline{O_i C_i c_{q_i}} & \overline{O_i C_i^2 c_{q_i}} + c_{r_i} \end{bmatrix}, \quad (7.38)$$

$$\mathbf{M}_m = \text{diag}(\mathbf{M}_{m_1}, \dots, \mathbf{M}_{m_i}, \dots, \mathbf{M}_{m_n}) \in R^{3n \times 3n}, \quad \mathbf{M}_{m_i} = \text{diag}(m_i, m_i, 0), \quad (7.39)$$

$$\mathbf{M}_{mv} = \text{diag}(\mathbf{M}_{mv_1}, \dots, \mathbf{M}_{mv_i}, \dots, \mathbf{M}_{mv_n}) \in R^{3n \times 3n}, \quad \mathbf{M}_{mv_i} = \begin{bmatrix} 0 & m_i & 0 \\ -m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.40)$$

$$\mathbf{M}_{\theta v} = \left[ \mathbf{M}_{\theta v_1} \quad \dots \quad \mathbf{M}_{\theta v_i} \quad \dots \quad \mathbf{M}_{\theta v_n} \right]^T \in R^{3n \times 1}, \quad (7.41)$$

$$\mathbf{M}_{\theta v_i} = \left[ m_i \eta_i \quad -m_i \left( \xi_i(0) + \tilde{\xi}_i \right) \quad -J_{C_i \xi} \right]^T, \quad (7.42)$$

$$\mathbf{M}_{m\xi} = \left[ \mathbf{M}_{m\xi_1} \quad \dots \quad \mathbf{M}_{m\xi_i} \quad \dots \quad \mathbf{M}_{m\xi_n} \right]^T \in R^{3n \times 1}, \quad \mathbf{M}_{m\xi_i} = \left[ m_i \xi_i(0) \quad 0 \quad 0 \right]^T. \quad (7.43)$$

## 7.5 Фреквентна једначина

Анализом диференцијалних једначина (7.31) може се уочити члан  $2\mathbf{M}_{mv}\dot{\mathbf{v}}\dot{\theta}$  који описује спрезање аксијалних и попречних деформација штапа током обртања. Често се у литератури овај члан занемарује при формирању фреквентне једначине која одговара слободним осцилацијама штапа у односу на стационарни положај дефинисан константном угаоном брзином  $\dot{\theta} = \text{const}$  обртања круте главчине, као на пример у референци [92]. Тиме се постиже да фреквентна једначина буде знатно једноставнија, јер нема имагинарних чланова. Оправдање за ово упрошћавање добијених диференцијалних једначина лежи у чињеници да су вредности првих фреквенција слободних осцилација фиксираних штапа услед аксијалних и попречних деформација знатно удаљене једна од друге, па је самим тим и њихов међусобни утицај мали. Такође члан  $\mathbf{M}_{m\xi}\dot{\theta}^2$  се током ове анализе занемарује јер представља константну инерцијалну силу која штап и доводи у стационарни положај.

Користећи процедуру изложену у поглављу 5.3, на основу диференцијалних једначина (7.31) добија се карактеристичан проблем

$$\left(\mathbf{K} - \dot{\theta}^2\mathbf{M}_m - \omega^2\mathbf{M}_v\right) \mathbf{a} = \mathbf{0}_{3n \times 1}, \quad (7.44)$$

односно фреквентна једначина:

$$\left|\mathbf{K} - \dot{\theta}^2\mathbf{M}_m - \omega^2\mathbf{M}_v\right| = 0. \quad (7.45)$$

Решавањем фреквентне једначине могу се добити кружне фреквенције слободних непригушених осцилација обртног еластичног штапа у односу на стационарни положај током обртања константном угаоном брзином  $\dot{\theta}$ . Пошто сада разматрани систем крутих сегмената има  $3n$  степени слободе кретања, фреквентна једначина (7.45) ће имати исто толико решења:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_r \leq \dots \leq \omega_{3n-1} \leq \omega_{3n}. \quad (7.46)$$

Сада се за сваку добијену кружну фреквенцију  $\omega_r$  ( $r = 1, \dots, 3n$ ) може формирати једначина

$$\left(\mathbf{K} - \dot{\theta}^2\mathbf{M}_m - \omega_r^2\mathbf{M}_v\right) \mathbf{a}_r = \mathbf{0}_{3n \times 1}, \quad (7.47)$$



из које је могуће одредити вектор главних облика осциловања  $\mathbf{a}_r$  који одговара кружној фреквенцији  $\omega_r$ .

Имајући у виду структуру вектора апсолутних координата крутих сегмената  $\mathbf{v}$ , дефинисаног изразом (7.32), може се закључити да је вектор главних облика осциловања у облику:

$$\mathbf{a}_r = \left[ \mathbf{a}_{0,r}^T \quad \mathbf{a}_{1,r}^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_{i,r}^T \quad \dots \quad \mathbf{a}_{n-1,r}^T \quad \mathbf{a}_{n,r}^T \right]^T, \quad (7.48)$$

где је

$$\mathbf{a}_{i,r} = \left[ a_{\xi(i,r)} \quad a_{\eta(i,r)} \quad a_{\varphi(i,r)} \right]^T. \quad (7.49)$$

Сада се главни облици осциловања обртног штапа при аксијалним и попречним осцилацијама добијају груписањем елемената вектора  $\mathbf{a}_r$  на следећи начин:

$$\begin{aligned} \xi_r \left( \xi = (i-1) \frac{L}{n} + \frac{L}{2n} \right) &= a_{\xi(i,r)}, \quad \eta_r \left( \xi = (i-1) \frac{L}{n} + \frac{L}{2n} \right) = a_{\eta(i,r)}, \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \xi_r (\xi = L) &= a_{\xi(n,r)} + \frac{L}{2n} \cos(a_{\varphi(n,r)}), \quad \eta_r (\xi = L) = a_{\eta(n,r)} + \frac{L}{2n} \sin(a_{\varphi(n,r)}), \quad (i = n), \end{aligned} \quad (7.50)$$

где су  $\xi_r(\xi)$  и  $\eta_r(\xi)$  функције главних облика осциловања дефинисане у дискретним вредностима координате  $\xi$ , које одговарају аксијалним и попречним осцилацијама штапа, респективно.

Нормализовани главни облици осциловања могу се, на основу израза (7.50), одредити следећим изразима:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_r \left( \xi = i \frac{L}{n} \right) &= \frac{a_{\xi(i,r)}}{\max(\xi_r(\xi))}, \quad \bar{\eta}_r \left( \xi = i \frac{L}{n} \right) = \frac{a_{\eta(i,r)}}{\max(\eta_r(\xi))}, \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \bar{\xi}_r (\xi = L) &= \frac{a_{\xi(n,r)}}{\max(\xi_r(\xi))}, \quad \bar{\eta}_r (\xi = L) = \frac{a_{\eta(n,r)}}{\max(\eta_r(\xi))}, \quad (i = n), \end{aligned} \quad (7.51)$$

у којима је максимална амплитудна вредност сваког од облика осциловања увек јединична.

## 7.6 Критична угаона брзина

Анализом диференцијалних једначина кретања (7.31) може се приметити да током обртања, матрица крутости штапа  $\mathbf{K} - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_m$  зависи од вредности угаоне брзине  $\dot{\theta}$ . Са повећањем угаоне брзине вредности појединих елемената матрице крутости се смањују. Ова појава се у литератури [93–95] назива ефекат динамичког омекшавања штапа (енг. „softening effect“) и карактеристична је за линеарне моделе у којима је коришћена претпоставка о малим деформацијама штапа, као и у овом раду.

Када вредност угаоне брзине  $\dot{\theta}$  достигне одређену критичну вредност, матрица крутости  $\mathbf{K} - \dot{\theta}^2 \mathbf{M}_m$  постаје сингуларна. Даљим повећавањем угаоне брзине преко критичне вредности поменута матрица крутости постаје негативно дефинитна, што доводи до нарушавања стабилности диференцијалних једначина (7.31), па решења дивергирају. Дакле, предложени приступ има одређених ограничења по питању примене, јер са повећањем угаоне брзине деформације штапа више нису мале па ова претпоставка више не важи. Препорука је да се пре одређивања решења диференцијалних једначина (7.31) одреди вредност критичне угаоне брзине  $\dot{\theta}_{cr}$  из услова:

$$\left| \mathbf{K} - \dot{\theta}_{cr}^2 \mathbf{M}_m \right| = 0. \quad (7.52)$$

Тиме би се извршила провера да ли је задата угаона брзина штапа у дозвољеним границама, тј. да ли је могуће користити предложени приступ за анализу. Иако имају ограничења, линеарни модели се често користе због релативно једноставних диференцијалних једначина кретања на које се могу лакше применити различити алгоритми управљања за стабилизацију кретања. Са друге стране, када њихова употреба није могућа, користе се нелинеарни модели [94, 96, 97] који се могу користити и при већим угаоним брзинама. Код свих нелинеарних модела је карактеристично да матрица крутости обртног штапа поред елемента  $\dot{\theta}_{cr}^2 \mathbf{M}_m$  са негативним предзнаком, који се јавља код линеарних модела, садржи и члан са  $\dot{\theta}_{cr}^2$  који је позитивног предзнака. Овај члан доприноси да се вредност критичне угаоне брзине знатно повећава, чиме се омогућава анализа и при већим вредностима угаоне брзине штапа. Овај ефекат се у литератури назива ефекат динамичког очвврштавања штапа (енг. „stiffening effect“).

## 7.7 Нумерички пример

У табели 25 приказане су нумеричке вредности параметара обртног еластичног штапа. Најпре ће бити разматран штап константних параметара дуж осе штапа. Такође, претпоставља се и да је закон промене угаоне брзине штапа задат у облику функције:

$$\dot{\theta}(t) = \begin{cases} \frac{w_f}{t_f}t - \frac{w_f}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{t_f}t\right), & 0 \leq t \leq t_f, \\ w_f, & t > t_f, \end{cases} \quad (7.53)$$

где је  $w_f$  стационарна вредност угаоне брзине која се достиже након временског периода  $t_f$ . Параметри  $w_f$  и  $t_f$  ће бити варирани у примеру зависно од потребе поређења са доступним резултатима у литератури. Овај закон промене угаоне брзине штапа користи се у литератури при тестирању разних метода за анализу обртних еластичних штапова. Графички приказ угаоне брзине штапа  $\dot{\theta}(t)$ , дат на слици 7.5, често се назива и „Spin up“ маневар. Он осликава прелазни режим рада многих ротационих елемената, па је из тог разлога интересантан за анализу. Разлог за његову употребу је што не постоји погонски елемент (мотор) који би могао да постигне жељену угаону брзину тренутно, већ мора да постоји неки прелазни режим који је овим маневром описан.

Параметар	Ознака	Вредност
Дужина	$L$	8 [m]
Густина	$\rho$	$2.7667 \cdot 10^3$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Површина попр. пресека штапа	$A$	$7.2968 \cdot 10^{-5}$ [m <sup>2</sup> ]
Модул еластичности	$E$	$6.8952 \cdot 10^{10}$ [N/m <sup>2</sup> ]
Момент инерције попр. пресека штапа	$I_z$	$8.2189 \cdot 10^{-9}$ [m <sup>4</sup> ]
Момент инерције главчине	$J_h$	200 [kg · m <sup>2</sup> ]
Полупречник главчине	$r$	0.5 [m]
Концентрисана маса на слободном крају	$m_t$	(0 – 0.5) [kg]

Табела 25: Физички параметри штапа [94, 96]

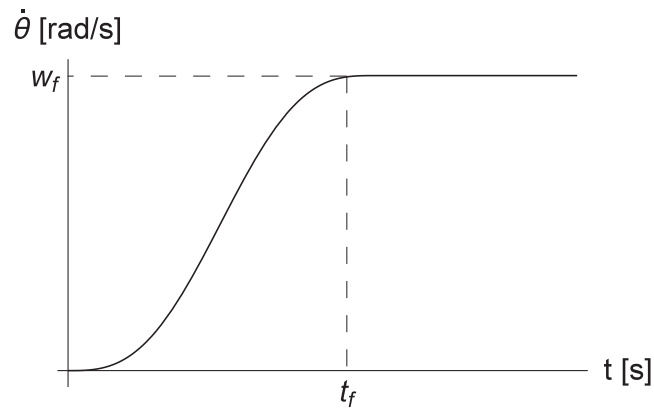
За нумеричку интеграцију диференцијалних једначина кретања (7.31) ротационог штапа биће коришћен Runge-Kutta метод четвртог реда.

Пошто се у литератури најчешће прате деформације слободног краја В штапа, након извршене интеграције потребно је одредити аксијалне и попречне деформације врха штапа користећи следеће релације:

$$\tilde{\xi}_B(t) = \tilde{\xi}_n(t) + \frac{l_n}{2} \cos \varphi_n(t), \quad (7.54)$$

$$\eta_B(t) = \eta_n(t) + \frac{l_n}{2} \sin \varphi_n(t), \quad (7.55)$$

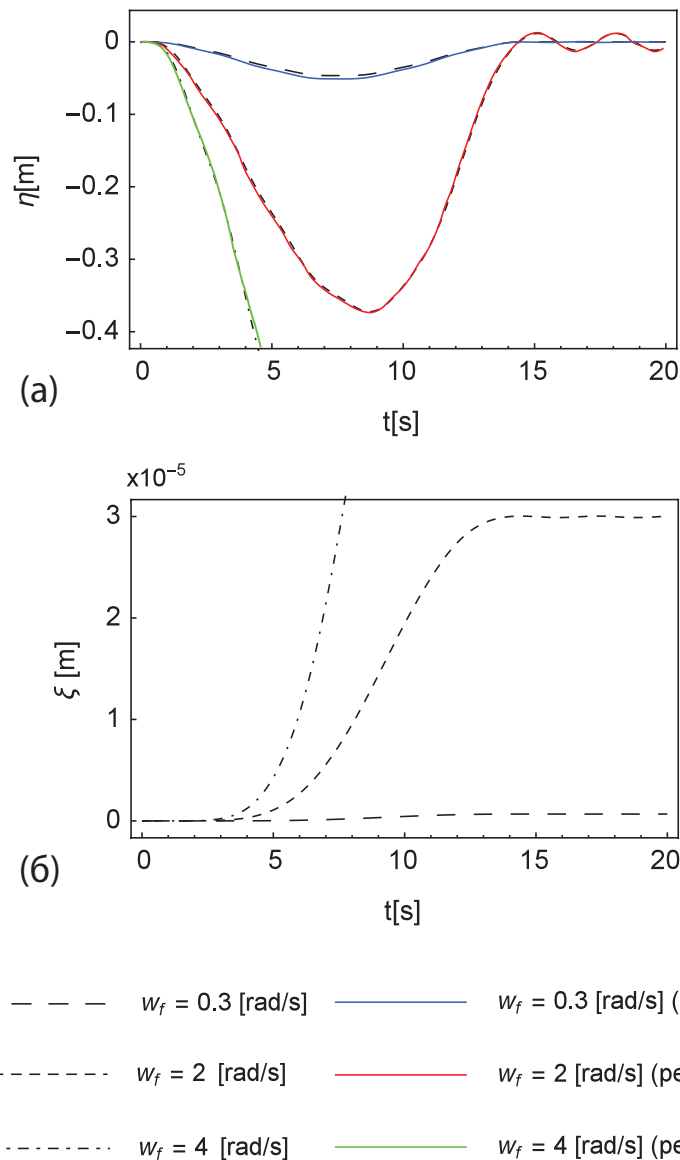
где су  $\tilde{\xi}_n(t)$ ,  $\eta_n(t)$  и  $\varphi_n(t)$  координате крутог сегмента ( $V_n$ ) које су добијене нумеричком интеграцијом.



Слика 7.5: Закон промене угаоне брзине  $\dot{\theta}(t)$  штапа - „Spin up“ маневар

На слици 7.6 приказане су попречне и аксијалне деформације врха штапа В током извођења „Spin up“ маневра, при  $t_f = 15$  [s] и  $w_f = (0.3, 2, 4)$  [rad/s]. Поред резултата предложеног приступа, на слици 7.6 (а) приказане су и вредности попречних деформација врха штапа добијене у референци [94] где је формиран тзв. нулти динамички модел штапа (енг. „zero-order dynamic model“) који ће надаље бити означен скраћеницом ZDM. Може се видети да постоји веома добро слагање резултата добијених предложеним приступом за  $n = 20$  и ZDM-ом. Такође, резултати код оба приступа дивергирају при  $w_f = 4$  [rad/s], што значи да је вредност критичне угаоне брзине мања од 4 [rad/s]. На слици 7.6 (б) приказане су вредности аксијалних деформација врха штапа добијене применом предложеног приступа. У референци [94] нису доступни подаци о аксијалним деформацијама врха штапа па није могуће

поређење резултата. У сваком случају, аксијалне деформације штапа су током ротације знатно мање од попречних деформација, што је и очекивано. Такође, и овде резултати дивергирају при  $w_f = 4$  [rad/s]. Вредност критичне угаоне брзине  $\dot{\theta}_{cr}$  при задатим физичким параметрима штапа може се одредити из израза (7.52).



Слика 7.6: Деформације слободног краја штапа током „Spin-up“ маневра

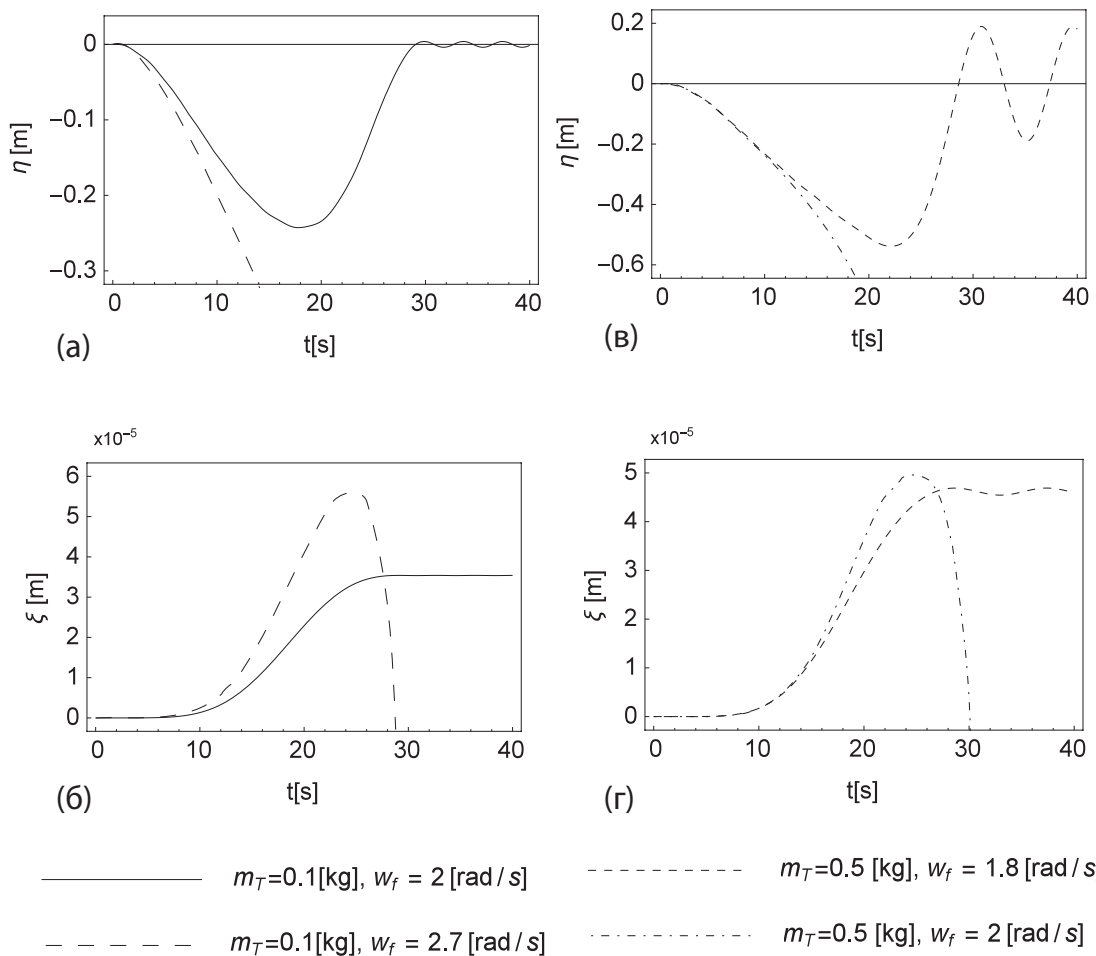
У табели 26 приказане су вредности  $\dot{\theta}_{cr}$  које одговарају различитим вредностима концентрисане масе  $m_T$  на слободном крају штапа. Са повећањем вредности концентрисане масе  $m_T$  долази до знатног смањења вредности  $\dot{\theta}_{cr}$  чиме се поменути ефекат динамичког омекшавања додатно појачава. Тако се на пример, за  $m_T = 0.1$  [kg] из табеле 26 може очитати вредност критичне угаоне брзине штапа  $\dot{\theta}_{cr} = 2.61$  [rad/s].

$m_T$ [kg]	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
$\dot{\theta}_{cr}$ [rad/s]	2.91	2.61	2.20	1.94	1.75	1.61	1.55

Табела 26: Вредности критичне угаоне брзине у зависности од концентрисане масе  $m_T$

Како би се тестирала тачност одређивања вредности критичне угаоне брзине на слици 7.7 (а) и (б) су приказане попречне и аксијалне деформације врха штапа при  $t_f = 30$  [s] и  $w_f = (2, 2.7)$  [rad/s], респективно. Када је  $w_f = 2$  [rad/s] добијени су коректни резултати.

Супротно томе, када је  $w_f = 2.7$  [rad/s], дакле веће од добијене критичне вредности угаоне брзине  $\dot{\theta}_{cr} = 2.61$  [rad/s], резултати су дивергентни тј. предложени приступ није у могућности да опише понашање еластичног штапа. Слична је ситуација и када је  $m_T = 0.5$  [kg].



Слика 7.7: Деформације слободног краја штапа током „Spin-up“ маневра

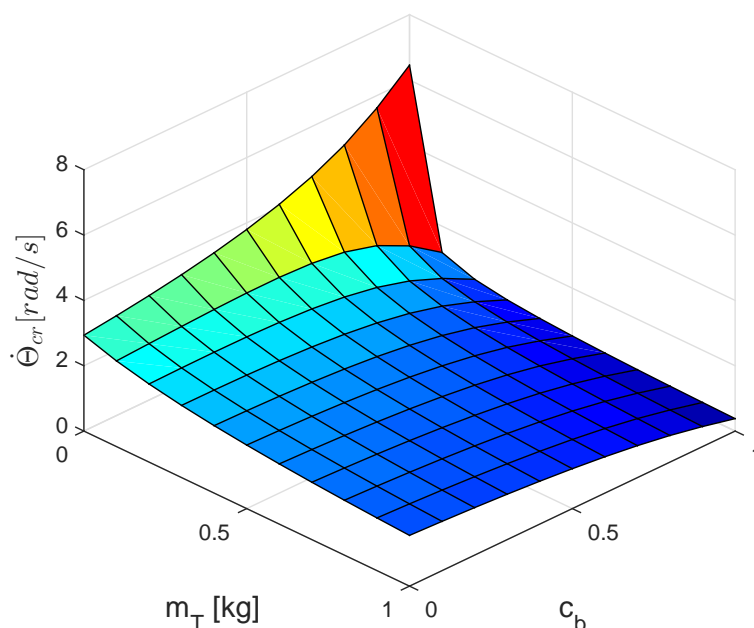
Вредност критичне угаоне брзине је тада  $\dot{\theta}_{cr} = 1.94$  [rad/s]. Зато су вредности деформација врха штапа приказане на слици 7.7 (в) и (г) коректне када је  $w_f = 1.8$  [rad/s], а резултати су дивергентни при  $w_f = 2$  [rad/s].

Утицај константне вредности угаоне брзине  $\dot{\theta}$  на фреквенције слободних осцилација савијања штапа при ротацији приказан је у табели 27. Добијени резултати су верификовани кроз поређење са резултатима из референце [96] при  $\dot{\theta} = 1$  [rad/s] који су приказани у угластим заградама. Релативна грешка добијених резултата у односу на ове резултате приказана је у обичним заградама. Постоји добро слагање резултата између ове две методе, што је и очекивано јер је у обе коришћен линеарни модел еластичног штапа. При повећању угаоне брзине штапа долази до значајног смањења прве (основне) фреквенције осциловања, док наредне две фреквенције остају готово непромењене. Ова појава се може правдати већ уоченим ефектом динамичког омекшавања при повећању вредности угаоне брзине.

$\dot{\theta}$ [rad/s]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]
0	0.46330	2.89918	8.09030
1	0.43513 [0.4353] (0.04 %)	2.89483 [2.9003] (0.2 %)	8.08876 [8.1316] (0.5 %)
2	0.33678	2.88176	8.08413

Табела 27: Фреквенције  $f_i = \omega_i / (2\pi)$  [Hz] еластичног штапа константних параметара који се обрће око непомичне осе при различитим вредностима угаоне брзине

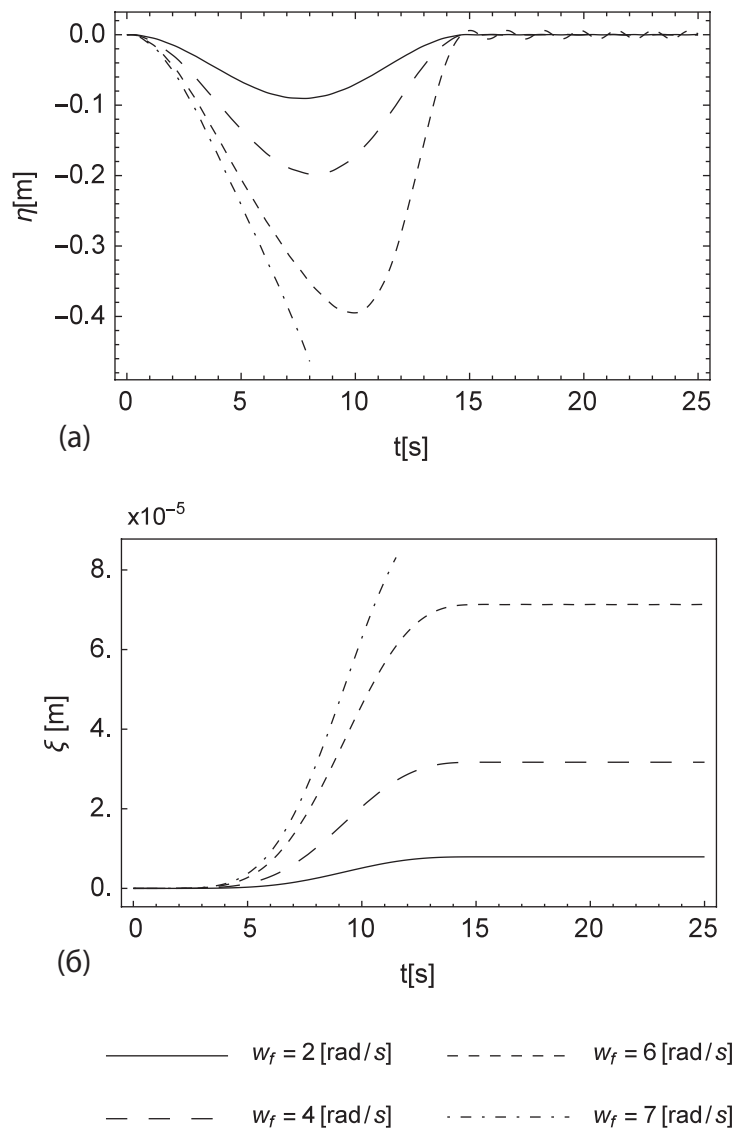
Интересантно је сада размотрити понашање штапа променљивог попречног пресека при ротацији. Нека параметри задати у табели 25 важе на левом крају штапа, док је попречни пресек штапа правоугаони чија се ширина и висина мењају сагласно линеарним законима  $b(x) = h(x) = b_0(1 - c_b x/L)$ , као у примеру 5.4.4. Са повећањем параметра линеарног закошења  $c_b$  крутост штапа се повећава, па је очекивано да се повећа и отпорност штапа на утицај ефекта динамичког омекшавања током ротације. На слици 7.8 дат је просторни дијаграм којим је описан утицај вредности концентрисане масе  $m_T$  и параметра линеарног закошења  $c_b$  на вредност критичне угаоне брзине  $\dot{\theta}_{cr}$  штапа до које је могуће користити предложени приступ.



Слика 7.8: Утицај степена линеарног закошења  $c_b$  и концентрисане масе  $m_T$  на вредност критичне угаоне брзине  $\dot{\theta}_{cr}$

Повећање вредности концентрисане масе  $m_T$  при било којој вредности коефицијента линеарног закошења  $c_b$  доводи до знатног смањења вредности критичне угаоне брзине  $\dot{\theta}_{cr}$ . Са друге стране, промена параметра закошења  $c_b$  на сложенији начин утиче на вредности критичне угаоне брзине. При  $m_T = 0$ , свако повећање коефицијента закошења доводи до повећања вредности критичне угаоне брзине, па тако за  $c_b = 1$  она чак износи  $\dot{\theta}_{cr} = 6.45$  [rad/s]. Међутим, када је  $m_T \neq 0$ , при  $0 < c_b < 0.5$  вредности критичне угаоне брзине благо расте, док са наставком пораста параметра закошења, тј. при  $0.5 < c_b < 1$ , опада. Како би се проверила тачност добијених вредности критичне угаоне брзине, на слици 7.9 (а) и (б) приказане су попречне и аксијалне деформације врха ротационог штапа при  $m_T = 0$ ,  $c_b = 1$  и при различитим стационарним вредностима угаоне брзине  $w_f = (2, 4, 6, \text{ и } 7)$  [rad/s]. Очекивано, са повећањем вредности  $w_f$  повећавају се и максималне вредности деформација штапа, све док вредност стационарне угаоне брзине не постане  $w_f = 7$  [rad/s], када резултати дивергирају. Ово се дешава јер је у том случају прекорачена вредност критичне угаоне брзине за коју је већ речено да у том случају износи  $\dot{\theta}_{cr} = 6.45$  [rad/s].





Слика 7.9: Утицај вредности стационарне угаоне брзине на деформације врха штапа током „Spin-up“ маневра

## 8 ЗАКЉУЧАК

У овој дисертацији предложена је нова варијанта метода крутих сегмената за статичку и динамичку анализу нехомогених еластичних штапова променљивог попречног пресека. Најпре је у уводној секцији рада истакнут значај извођења статичке и динамичке анализе штапова променљивих параметара. Скренута је пажња на проблеме који се јављају при употреби континуалних модела за ову сврху. Указано је на значај постојања дискретних модела без којих се данас не може замислити пројектовање различитих инжењерских објеката који су сложеног облика и веома често израђени од нових врста материјала. У другом поглављу је дат детаљан приказ постојећих варијанти метода крутих сегмената уз критички осврт на сваку од помених варијанти. Даља разматрања у раду се могу поделити на три главне целине.

Прва, која садржи поглавља од трећег до петог, представља идејну основу читаве дисертације. У трећем поглављу је описан начин дискретизације нехомогеног еластичног штапа променљивог попречног пресека који је касније коришћен у раду. Главни допринос у овој дисертацији дат је у четвртом поглављу, где су формиране диференцијалне једначине кретања крутих сегмената. Иако у доступној литератури постоје добро развијене методе за анализу кретања система крутих тела уз коришћење релативних координата (релативна зглобна померања) овде је инсистирано на употреби апсолутних координата изабраних тачака крутих сегмената у односу на инерцијални координатни систем при анализи. Разлог за то је што се релативне координате најчешће користе за анализу кретања робота, па су и сами алгоритми прилагођени системима са малим бројем степени слободе кретања. Ове методе дају одличне резултате при анализи и синтези кретања робота, јер се директно може управљати релативним зглобним померањима. Међутим, овде је често потребно користити већи број крутих сегмената како би се постигла жељена тачност. У том случају, алгоритми који користе релативне координате постају нумерички неефикасни. Зато су овде коришћене апсолутне координате. Најпре је анализом еластичног сегмента

штапа константних параметара уочено да се јавља већи број апсолутних координата у односу на број степени слободе кретања система. Зато су у првом кораку искоришћене Лагранжеве једначине са множитељима веза. Елиминацијом множитеља веза уклоњене су и зависне координате, па се даље формирање диференцијалних једначина кретања штапа променљивих параметара своди на коришћење Лагранжевих једначина друге врсте. Добијене су диференцијалне једначине у векторском облику, при чему експлицитно изражене матрице изведене за општи број крутих сегмената доприносе значајном повећању нумеричке ефикасности предложеног приступа. Диференцијалне једначине кретања су формиране за случај просторних деформација аксијално притиснутог штапа. Међутим, свођењем са општег на посебне случајеве деформација може се лако доћи до диференцијалних једначина кретања при свакој деформацији појединачно. Одговарајућим избором крутости опруга еластично ослоњеног штапа у општем случају могу се обезбедити различити контурни услови на ефикасан начин. У петом поглављу је, поред извођења опште фреквентне једначине, у нумеричким примерима акценат стављен на проверу резултата остварених коришћењем предложеног приступа кроз поређење са резултатима доступним у литератури. Најпре је ефикасност предложеног приступа проверена за случај хомогеног еластичног штапа константног пресека који осцилује у равни при различитим контурним условима. Показано је да са повећањем броја крутих сегмената вредности критичне силе извијања, као и фреквенције слободних осцилација и њима одговарајући главни облици осциловања веома брзо конвергирају ка тачним вредностима које су добијене решавањем парцијалних диференцијалних једначина континуалног модела. Потом је ефикасност предложеног приступа проверена и за случај штапова са знатно сложенијим законима промене параметара дуж штапа. У сваком од приказаних нумеричких примера је део добијених резултата упоређен са доступним резултатима у литератури. Показано је да се при коришћењу релативно малог броја крутих сегмената (нпр.  $k \cdot n = 40$ ) могу добити резултати који се одлично слажу са доступним резултатима у литератури. Штавише, у примеру 5.4.6 за случај штапа са степенастом променом попречног пресека извршено је поређење добијених резултата са резултатим НВМ-а који спада у групу метода крутих сегмената. Добијени резултати се одлично слажу са резултатима ове методе. Поред тога, треба истаћи и да се у предложеном приступу могу много ефикасније увести различити контурни услови у односу на НВМ. У ту сврху је овде довољно задати крутост опруга постављених

на крајевима штапа, док се код НВМ-а крутости ових опруга одређују на основу еквиваленције уведеног модела са методом коначних разлика, што додатно компликује примену код различитих контурних услова. У нумеричким примерима је такође показано да се захваљујући нумеричкој ефикасности предложеног приступа може успешно изводити и квалитативна анализа утицаја различитих параметара штапа на модалне карактеристике и вредност критичне силе извијања. Главни резултати из овог дела дисертације изложени су у референцама [98, 99] на међународним конференцијама, као и у референцама [100–102] у међународним часописима.

Другу целину у овој дисертацији чини шесто поглавље које је посвећено примени предложене варијанте метода крутих сегмената у облику тзв. квази-крутог модела за анализу раванских гипких механизма. Овде је идеја о дискретизацији еластичног штапа примењена за дискретизацију гипког зглоба у равни, при чему се маса зглоба занемарује због малих димензија зглоба у односу на остале елементе ових механизма. Поред тога, измењен је и начин одређивања крутости опруга у предложеном квази-крутом моделу гипког зглоба у односу на прву целину у дисертацији. Димензије попречног пресека ових зглобова су често значајне у односу на дужину зглоба, па је по потреби укључен и утицај смицања на крутости уведених опруга. Пошто се маса зглоба занемарује, коефицијенти еластичности потребни за одређивање крутости опруга се одређују за тачан облик зглоба. У доступној литератури постоје различити приступи за што прецизније одређивање ових крутости. Овде су изведене крутости опруга приближног модела у симболичкој форми, као функција коефицијената еластичности. Тиме се отвара пут за коришћење и нових, тачнијих коефицијената еластичности ових зглобова, који би се евентуално појавили у литератури убудуће. Формиран је општи алгоритам за анализу гипких механизма који се састоје од крутих чланова који су међусобно редно повезани гипким зглобовима. За опис кретања гипког механизма такође су коришћене апсолутне координате које се састоје од координата произвољно изабраних тачака крутих чланова механизма, као и угла оријентације крутих чланова у односу на  $x$  осу. Пошто се број степени слободе кретања механизма увек поклапа са бројем коришћених координата код разматраног раванског механизма, нема потребе за коришћењем прекобројних координата, па је формирање диференцијалних једначина једноставно. У нумеричком примеру је показано добро слагање резултата предложеног приступа и метода доступних у литератури при анализи померања изабране тачке гипког механизма. Такође, при

анализи слободних осцилација овог механизма је уочено да тачност одређивања коефицијента еластичности знатно утиче на вредност фреквенција. Главни резултати из овог дела дисертације изложени су у референци [103] на међународној конференцији.

Трећу целину ове дисертације чини седмо поглавље у којем је разматран приближни модел хомогеног еластичног штапа променљивог пресека који се обрће око непомичне осе. Овде је искоришћен начин дискретизације еластичног штапа предложен у првој целини дисертације, при чему су узете у обзир само деформације у равни обртања штапа. Разматрањима су обухваћени штапови са променљивим параметрима попречног пресека при малим деформацијама штапа. Слично као и у претходној целини, ни овде није било потребе за коришћењем прекобројних координата, па је кретање разматраног система крутих сегмената описано Лагранжевим једначинама друге врсте. У формираним диференцијалним једначинама кретања су се појавили чланови који указују на утицај инерцијалних сила на круте сегменте током ротације штапа. Уочено је да предложени метод дискретизације и описа кретања добијеног система крутих сегмената има одређене недостатке. Наиме, након пораста угаоне брзине преко одређене критичне вредности, деформације штапа постају велике, па претпоставка о малим деформацијама коришћена у овом раду више не важи. Тада добијени резултати дивергирају и не описују реално понашање врха штапа током кретања. Зато је потребно пре интеграције добијених диференцијалних једначина кретања проверити вредност критичне угаоне брзине обртања штапа, упоредити је са реалним угаоним брзинама које се јављају у задатом систему, и тек након тога донети одлуку да ли се предложени приступ може користити за анализу. Ако је реална угаона брзина система мања од критичне вредности, предложени приступ се може користити за анализу понашања врха штапа током обртања. У нумеричком примеру је извршено поређење добијених резултата са одговарајућим линеарним моделима у литератури. Показало се да се добијени резултати одлично слажу са резултатима других линеарних модела. Карактеристично за линеарне моделе је да се код њих уочава тзв. ефекат омекшавања, јер се у матрици крутости појављују чланови који садрже интензитет угаоне брзине са негативним предзнаком. Тако са повећањем угаоне брзине долази до смањења појединих чланова матрице крутости. Међутим, код нелинеарних модела се јавља и додатни члан, који такође садржи интензитет угаоне брзине али са позитивним предзнаком и по интензитету је већи од претходно поменутог члана са негативним предзнаком. Зато са повећањем вредности угаоне брзине

обртања штапа долази и до повећања вредности чланова матрице крутости. Зато се ова појава назива ефекат динамичког очвршћавања и умногоме доприноси повећању стабилности таквих метода. Резултати који су добијени у овом делу дисертације саопштени су на међународном скупу у референци [104].

На основу свега што је приказано у овој дисертацији може се недвосмислено закључити да је предложеном варијантом методе крутих сегмената могуће изводити статичку и динамичку анализу штапова са променљивим параметрима. Постигнута нумеричка ефикасност метода не зависи од закона промене параметара штапа, што није случај код континуалних модела. Користећи предложени приступ могуће је формирати универзалан алгоритам за анализу ових штапова који се може лако програмирати у различитим софтверским пакетима (нпр. Matlab, Mathematica, Python, Mathcad, итд). Кроз поређења резултата у нумеричким примерима је показано да су резултати овог приступа веома блиски резултатима осталих варијанти метода крутих сегмената као и метода коначних елемената.

Истраживања која су пратила ову дисертацију указују на могућности унапређења предложеног приступа и ширење његове примене за анализу различитих техничких објеката. Уз једноставне модификације приступа могуће је анализирати штапове са пукотинама, као и штапове потоњене у течност. Исто тако, могуће је различитим методама вршити оптимизацију параметара штапа при задатим пројектним ограничењима како би се добио штап жељених модалних карактеристика или жељене отпорности на извијање. Уз додатне напоре је могуће предложени приступ проширити и применити за анализу објеката који се састоје од више штапова који су повезани у једну функционалну целину (нпр. равански и просторни рамови, решеткасти носачи, итд.). Код гипких механизма је могуће проширити изложени приступ и на случај разгранатих кинематичких структура, чиме би био обухваћен знатно већи број ових механизма. Такође, било би интересантно применити неку од метода оптимизације на ове моделе, како би се оптимизацијом параметара гипких зглобова уз одређена технолошка ограничења дошло до жељених померања задатих тачака на механизму. На крају, код модела еластичног штапа који се обрће око непомичне осе у облику крутих сегмената је потребно у будућим истраживањима доћи до модела који узима у обзир и велике деформације. Тиме би се направио велики искорак у примени ове групе метода за анализу ротационих еластичних штапова. Већ постојећа нумеричка ефикасност овог приступа би овде добила на значају, јер би било могуће користити

ове моделе и при пројектовању управљања деформацијама штапа.

## Литература

- [1] Shiota I, Miyamoto Y. Functionally graded materials. Elsevier, 1997.
- [2] Meirovitch L. Fundamentals of vibrations. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [3] Timoshenko SP, Gere JM. Theory of elastic stability. Tokyo: McGraw-Hill, 1961.
- [4] Mabie HH, Rogers CB. Transverse vibrations of tapered cantilever beams with end loads. The Journal of the Acoustical Society of America, 36(3):463–469, 1964.
- [5] Mabie HH, Rogers CB. Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams with end support and with end mass. The Journal of the Acoustical Society of America, 55(5):986–991, 1974.
- [6] Sanger DJ. Transverse vibration of a class of non-uniform beams. Journal of Mechanical Engineering Science, 10(2):111-120, 1968.
- [7] Auciello NM, Ercolano A. Exact solution for the transverse vibration of a beam a part of which is a taper beam and other part is a uniform beam. International Journal of Solids and Structures, 34(17):2115-2129, 1997.
- [8] Wang CY, Wang CM. Exact vibration solution for exponentially tapered cantilever with tip mass. Journal of Vibration and Acoustics, 134(4):041012, 2012.
- [9] Wang CY. Vibration of a tapered cantilever of constant thickness and linearly tapered width. Archive of Applied Mechanics, 83:171–176, 2013.
- [10] Wang CM, Wang CY, Reddy JN. Exact solutions for buckling of structural members. CRC press, 2004.
- [11] Li QS. Exact solutions for buckling of non-uniform columns under axial concentrated and distributed loading. European Journal of Mechanics-A/Solids, 20(3):485–500, 2001.
- [12] De Rosa MA, Auciello NM. Free vibrations of tapered beams with flexible ends. Computers & Structures, 60(2):197–202, 1996.



- 
- [13] Naguleswaran S. Vibration of an Euler-Bernoulli beam of constant depth and with linearly varying breadth. *Journal of Sound and Vibration*, 153(3):509–522, 1992.
- [14] Naguleswaran S. A direct solution for the transverse vibration of Euler-Bernoulli wedge and cone beams. *Journal of Sound and Vibration*, 172(3):289–304, 1994.
- [15] Naguleswaran S. Vibration in the two principal planes of a non-uniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial coordinate. *Journal of Sound and Vibration*, 172(3):305–319, 1994.
- [16] Firouz-Abadi RD, Rahmanian M, Amabili M. Exact solutions for free vibrations and buckling of double tapered columns with elastic foundation and tip mass. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(5):051017, 2013.
- [17] Kim CS, Dickinson SM. On the analysis of laterally vibrating slender beams subject to various complicating effects. *Journal of Sound and Vibration*, 122(3):441–455, 1988.
- [18] Ansari R, Sahmani S, Rouhi H. Rayleigh--Ritz axial buckling analysis of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions. *Physics Letters A*, 375(9):1255–1263, 2011.
- [19] Hsu JC, Lai HY, Chen C-K. Free vibration of non-uniform Euler--Bernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4):965–981, 2008.
- [20] Mao Q, Pietrzko S. Free vibration analysis of a type of tapered beams by using Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 219(6):3264–3271, 2012.
- [21] Pinarbasi S, Okay F, Akpınar Erkan, Erdogan H. Stability analysis of two-segment stepped columns with different end conditions and internal axial loads. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013: 858906, 2013.
- [22] Huo Y, Wang Z. Dynamic analysis of a rotating double-tapered cantilever Timoshenko beam. *Archive of Applied Mechanics*, 86(6):1147–1161, 2016.
- [23] Zhu, TL. Free flapwise vibration analysis of rotating double-tapered Timoshenko beams. *Archive of Applied Mechanics*, 82(4):479–494, 2012.

- 
- [24] Wu JS. Analytical and numerical methods for vibration analyses. John Wiley & Sons, 2013.
- [25] Reddy JN. An introduction to the finite element method. McGraw-Hill; New York, 1993.
- [26] Attard MM. Lateral buckling analysis of beams by the FEM. *Computers & Structures*, 23(2):217–231, 1986.
- [27] Brown JE, Hutt JM, Salama AE. Finite element solution to dynamic stability of bars. *AIAA Journal*, 6(7):1423–1425, 1968.
- [28] Eisenberger M, Reich Y. Static, vibration and stability analysis of non-uniform beams. *Computers & Structures*, 31(4):567–573, 1989.
- [29] Gupta P, Wang ST, Blandford GE. Lateral-torsional buckling of nonprismatic I-beams. *Journal of Structural Engineering*, 122(7):748–755, 1996.
- [30] Karabalis DL, Beskos DE. Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams. *Computers & Structures*, 16(6):731–748, 1983.
- [31] Wang G, Wereley NM. Free vibration analysis of rotating blades with uniform tapers. *AIAA Journal*, 42(12):2429–2437, 2004.
- [32] He P, Liu Z, Li C. An improved beam element for beams with variable axial parameters. *Shock and Vibration*, 20(4):601–617, 2013.
- [33] Alshorbagy AE, Eltahir MA, Mahmoud FF. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 35(1):412–425, 2011.
- [34] Hencky H. Über die angenäherte lösung von stabilitätsproblemen im raum mittels der elastischen gelenkkette. *Der Eisenbau*, 11:437–452, 1920.
- [35] El-Naschie MS, Wu CW, Wifi AS. A simple discrete element method for the initial postbuckling of elastic structures. *International journal for numerical methods in engineering*, 26(9):2049–2060, 1988.
- [36] Kocsis A. Buckling analysis of the discrete planar cosserat rod. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 16(03):1450111, 2016.
-

- 
- [37] Challamel N, Kocsis A, Wang CM. Discrete and non-local elastica. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 77:128–140, 2015.
- [38] Challamel N, Camotim D, Wang CM, Zhang Z. On lateral-torsional buckling of discrete elastic systems: A nonlocal approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 49:106–113, 2015.
- [39] Ruocco E, Zhang H, Wang CM. Hencky bar-chain model for buckling analysis of non-uniform columns. *Structures*, 6:73–84, 2016.
- [40] Wang CM, Zhang H, Challamel N, Xiang Y. Buckling of Nonlocal Columns with Allowance for Selfweight. *Journal of Engineering Mechanics*, 142(7), 2016.
- [41] Wang CM, Zhang H, Challamel N, Duan WH. On boundary conditions for buckling and vibration of nonlocal beams. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 61:73–81, 2017.
- [42] Zhang H, Wang CM, Ruocco E, Challamel N. Hencky bar-chain model for buckling and vibration analyses of non-uniform beams on variable elastic foundation. *Engineering Structures*, 126:252–263, 2016.
- [43] Schiehlen WO, Rauh J. Modeling of flexible multibeam systems by rigid-elastic superelements. *Revista Brasileira de Ciencias Mecanicas*, 8(2):151–163, 1986.
- [44] Rauh J, Schiehlen W. Various approaches for the modeling of flexible robot arms. *Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and Their Applications*, pp.420–429, 1987.
- [45] Wang Y, Huston RL. A lumped parameter method in the nonlinear analysis of flexible multibody systems. *Computers & Structures*, 50(3):421–432,1994.
- [46] Krodziewski JM. *Mechanical vibration*. University of Melbourne, Melbourne, Australia,2008.
- [47] Parszewski ZA, Krodziewski JM, Skoraczynski J. Rigid FEM in a case history of boiler feed pump vibration. *Computers & Structures*, 31(1):103–110,1989.
- [48] Banerjee AK, Nagarajan S. Efficient simulation of large overall motion of beams undergoing large deflection. *Multibody System Dynamics*, 1(1):113–126,1997.
-

- 
- [49] Mitiguy P, Banerjee AK. Determination of spring constants for modelling flexible beams. Working Model Technical Paper,2000.
- [50] Schiehlen W. Recent developments in multibody system dynamics. *Meccanica*, 26(1):7–10,1991.
- [51] Zhao X, Maißer P. Seismic response analysis of wind turbine towers including soil-structure interaction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 220(1):53–61,2006.
- [52] Zhao X, Maißer P, Wu J. A new multibody modelling methodology for wind turbine structures using a cardanic joint beam element. *Renewable Energy*, 32(3):532–546,2007.
- [53] Kruszewski J, Gawronski W, Wittbrodt E, Najbar F, Grabowski S. The rigid finite element method. Arkady, Warsaw,1975.
- [54] Wittbrodt E, Adamiec-Wójcik I, Wojciech S. Dynamics of flexible multibody systems: rigid finite element method. Springer Science & Business Media,2007.
- [55] Wittbrodt E, Wojciech S. Forty-Five Years of the Rigid Finite Element Method. *Archive of Mechanical Engineering*, 60(3):313,2013.
- [56] Przemieniecki JS. Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill, New York,1968.
- [57] Ciblak N, Lipkin H. Remote center of compliance reconsidered. ASME design engineering technical conference and computers in engineering conference (96-DETC/MECH-1167), pages 1–10, Irvine, California, 18–22 August 1996.
- [58] Craig JJ. Introduction to robotics: mechanics and control. Pearson Prentice Hall Upper Saddle River,2005.
- [59] Lazarević PM. Zbirka zadataka iz mehanike robota. Mašinski fakultet Beograd,2006.
- [60] Čović V, Lazarević M. Mehanika robota. Mašinski fakultet Beograd,2009.
- [61] Lurie AI. Analytical mechanics. Springer Science & Business Media,2013.
- [62] Trahair NS. Flexural-torsional buckling of structures, volume 6. CRC Press,1993.

- [63] Pi YL, Trahair NS. Non-linear buckling and postbuckling of elastic arches. *Engineering Structures*, 20(7):571–579,1998.
- [64] Machado PS, Cortínez HV. Lateral buckling of thin-walled composite bisymmetric beams with prebuckling and shear deformation. *Engineering Structures*, 27(8):1185–1196,2005.
- [65] Amirouche F. *Fundamentals of multibody dynamics: theory and applications*. Springer Science & Business Media,2007.
- [66] Вуковић Ј, Обрадовић А. *Линеарне осцилације механичких система*. Машински факултет Београд,2007.
- [67] Wei DJ, Yan SX, Zhang ZP, Li X-F. Critical load for buckling of non-prismatic columns under self-weight and tip force. *Mechanics Research Communications*, 37(6):554–558,2010.
- [68] Downs B. Transverse Vibrations of Cantilever Beams Having Unequal Breadth and Depth Tapers. ASME. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4):737–742,1977.
- [69] Shahba A, Rajasekaran S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, 36(7):3094–3111,2012.
- [70] Naguleswaran S. Natural frequencies, sensitivity and mode shape details of an Euler-Bernoulli beam with one-step change in cross-section and with ends on classical supports. *Journal of Sound and Vibration*, 252(4):751–767,2002.
- [71] Bir G, Jonkman J. ASME 2008 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, pages 669–679. American Society of Mechanical Engineers,2008.
- [72] Fitzgerald B, Basu B. Structural control of wind turbines with soil structure interaction included. *Engineering Structures*, 111:131–151,2016.
- [73] Harte M, Basu B, and Nielsen RKS. Dynamic analysis of wind turbines including soil-structure interaction. *Engineering Structures*, 45:509–518,2012.

- [74] Vatanchian M, Shooshtari A. Investigation of soil-structure interaction effects on seismic response of a 5 MW wind turbine. *International Journal of Civil Engineering*, pages 1–17,2016.
- [75] Jonkman J, Butterfield S, Musial W, Scott G. Definition of a 5-MW reference wind turbine for offshore system development. National Renewable Energy Laboratory (NREL), Golden, CO.,2009.
- [76] Zhao X, Maissner P. Seismic response analysis of wind turbine towers including soil-structure interaction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 220(1):53–61,2006.
- [77] Norton LR. *Design of machinery*. McGraw-Hill,2004.
- [78] Lobontiu N. *Compliant mechanisms: design of flexure hinges*. CRC press,2002.
- [79] Pavlović DN, Pavlović TN. *Gipki mehanizmi*. Univerzitet u Nišu,2013.
- [80] Xu Q. *Design and implementation of large-range compliant micropositioning systems*. John Wiley & Sons,2017.
- [81] Smith TS. *Flexures: elements of elastic mechanisms*. CRC Press,2000.
- [82] Howell LL. *Compliant mechanisms*. John Wiley & Sons,2001.
- [83] Lobontiu N. Compliance-based matrix method for modeling the quasi-static response of planar serial flexure-hinge mechanisms. *Precision Engineering*, 38(3):639–650,2014.
- [84] Young WC, Budynas RG. *Roark's formulas for stress and strain, volume 7*. McGraw-Hill New York,2002.
- [85] Schotborgh OW, Kokkeler GMF, Tragter H, van Houten JAMF. Dimensionless design graphs for flexure elements and a comparison between three flexure elements. *Precision Engineering*, 29(1):41–47,2005.
- [86] Paros MJ. How to design flexure hinges. *Machine design*, 37:151,1965.
- [87] Yong KY, Lu TF. The effect of the accuracies of flexure hinge equations on the output compliances of planar micro-motion stages. *Mechanism and Machine Theory*, 43(3):347–363,2008.

- 
- [88] Gundogdu K, Bayrakdar S, Yucedag I. Developing and modeling of voice control system for prosthetic robot arm in medical systems. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, 2017.
- [89] <http://www.coroflot.com/santiagomorales/Conceptual-Design-of-High-Speed-Helicopter>.
- [90] <https://cleantechnica.com/2012/07/27/wind-turbine-net-capacity-factor-50-the-new-normal/>.
- [91] <http://amverusecg.blogspot.rs/2010/05/ship-monitoring-project.html>.
- [92] Yoo HH, Shin SH. Vibration analysis of rotating cantilever beams. *Journal of Sound and vibration*, 212(5):807–828, 1998.
- [93] Garcia-Vallejo D, Sugiyama H, Shabana AA. Finite element analysis of the geometric stiffening effect. Part 1: a correction in the floating frame of reference formulation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 219(2):187–202, 2005.
- [94] Li C, Meng X, Liu Z. Dynamic modeling and simulation for the rigid flexible coupling system with a non-tip payload in non-inertial coordinate system. *Journal of Vibration and Control*, 22(4):1076–1094, 2016.
- [95] Yang H, Hong J, Yu Z. Dynamics modelling of a flexible hub--beam system with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 266(4):759–774, 2003.
- [96] Bai S, Ben-Tzvi P, Zhou Q, Huang X. Dynamic modeling of a rotating beam having a tip mass. *Robotic and Sensors Environments, 2008. ROSE 2008. International Workshop on*, pages 52–57. IEEE, 2008.
- [97] Chung J, Yoo HH. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. *Journal of Sound and vibration*, 249(1):147–164, 2002.
- [98] Nikolić A, Šalinić S. Natural frequencies of a tapered cantilever beam of constant thickness and linearly tapered width. *The Eight Triennial International Conference HEAVY MACHINERY HM 2014*, volume E, pages 61–69, Zlatibor, Serbia, June 2014.

- [99] Nikolić A, Šalinić S. Free vibration analysis of the horizontal axis wind turbine tower. Proceedings of the 5th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Arandjelovac, Serbia, June 2015.
- [100] Nikolić A, Šalinić S. A rigid multibody method for free vibration analysis of beams with variable axial parameters. Journal of Vibration and Control, 23(1):131–146,2017.
- [101] Nikolić A. Free vibration analysis of a non-uniform axially functionally graded cantilever beam with a tip body. Archive of Applied Mechanics, 87(7):1227–1241, Jul 2017.
- [102] Nikolić A, Šalinić S. Buckling analysis of non-prismatic columns: A rigid multibody approach. Engineering Structures, 143:511–521,2017.
- [103] Šalinić S, Nikolić A. Determination of natural frequencies of a planar serial flexure-hinge mechanism using a new pseudo-rigid-body model (PRBM) method. Proceedings of the 6th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Mountain Tara, Serbia, June 2017.
- [104] Nikolić A, Šalinić S. Dynamics of the Rotating Cantilever Beam. The Ninth Triennial International Conference HEAVY MACHINERY HM 2017, volume D, pages 7-12, Zlatibor, Serbia, June 28 – Jul y 2017.