



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ  
ФАКУЛТЕТ ЗА МАШИНСТВО И  
ГРАЂЕВИНАРСТВО У КРАЉЕВУ

Небојша Б. Здравковић

**УТИЦАЈНИ ПАРАМЕТРИ ЗГЛОБНО ВЕЗАНИХ  
СЕГМЕНАТА НА ЕЛАСТО-ДИНАМИЧКУ  
СТАБИЛНОСТ СТРЕЛА АУТОДИЗАЛИЦА**

Докторска дисертација

Краљево, 2015. год.

## ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА

<i>I. Аутор</i>	
Име и презиме:	Небојша Здравковић
Датум и место рођења:	06.10.1973., Краљево
Садашње запослење:	Асистент на Факултету за машинство и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагујевцу
<i>II. Докторска дисертација</i>	
Наслов:	Утицајни параметри зглобно везаних сегмената на еласто-динамичку стабилност стрела аутодизалица
Број страница:	170
Број слика:	64
Број библиографских података:	106
Установа и место где је рад израђен:	Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагујевцу, Краљево
Научна област (УДК):	Дизалице уопште, дизалице неограничене покретљивости на тлу (621.873.3)
Ментор:	др Миломир Гашић, редовни професор
<i>III. Оцена и одбрана</i>	
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:	392/7 2012.
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <b>др Ружица Николић, редовни професор</b> Факултет инжењерских наука у Крагујевцу</li> <li>2. <b>др Јован Владић, редовни професор</b> Факултет техничких наука у Новом Саду</li> <li>3. <b>др Звонимр Југовић, редовни професор</b> Технички факултет у Чачку</li> <li>4. <b>др Миле Савковић, ванредни професор</b> Машински факултет у Краљеву</li> <li>5. <b>др Миломир Гашић, редовни професор</b> Машински факултет у Краљеву</li> </ol>
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <b>др Јован Владић, редовни професор, Председник</b> Факултет техничких наука у Новом Саду</li> <li>2. <b>др Драгослав Јаношевић, редовни професор, Члан</b> Машински факултет у Нишу</li> <li>3. <b>др Миле Савковић, редовни професор, Члан</b> Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву</li> <li>4. <b>др Драган Петровић, ванредни професор, Члан</b> Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву</li> <li>5. <b>др Миломир Гашић, редовни професор, Ментор</b> Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву</li> </ol>
Датум одбране дисертације:	

## ПРЕДГОВОР

Ова докторска дисертација је урађена на Катедри за конструкције и пројектовање у машиноградњи Факултета за машинство и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагујевцу и представља резултат вишегодишњег научног и стручног усавршавања у оквиру Центра за грађевинску и транспортну механизацију, из области механизације и носећих конструкција.

На првом месту, дубоку захвалност дугујем ментору, проф. др Миломиру Гашићу за свестрану и континуирану помоћ током израде ове дисертације. Такође, посебну захвалност желим да искажем и проф. др Јовану Владићу са Факултета техничких наука у Новом Саду, проф. др Драгославу Јаношевићу са Машинског факултета у Нишу, као и професорима са матичног факултета проф. др Милу Савковићу и проф. др Драгану Петровићу на корисним саветима и сугестијама.

Захвалност дугујем и свим члановима Катедре за конструкције и пројектовање у машиноградњи, као и свим осталим колегама на Факултету за машинство и грађевинарство у Краљеву на посредној или непосредној подршци у досадашњем раду.

Захваљујем се искрено својој породици на стрпљењу и разумевању током израде дисертације.

У Краљеву, фебруар 2015.

Небојша Здравковић

# УТИЦАЈНИ ПАРАМЕТРИ ЗГЛОБНО ВЕЗАНИХ СЕГМЕНАТА НА ЕЛАСТО-ДИНАМИЧКУ СТАБИЛНОСТ СТРЕЛА АУТОДИЗАЛИЦА

## РЕЗИМЕ

Аутодизалице имају једну од кључних улога током изградње и одржавања свих видова стамбене, саобраћајне и индустријске инфраструктуре. Честе промене локације утовара и истовара, манипулација разноврсним теретом у условима ограниченог маневарског простора, повећање носивости, висине дизања и дохвата, оперативна безбедност и стабилност, ергономско и ефикасно управљање, уз висок степен искоришћења енергије формирају комплексан скуп супротстављених захтева и ограничења при њиховом пројектовању. У циљу добијања лакших, енергетски ефикаснијих и економичнијих решења, инжењери су приморани да оптимизују носећу структуру стрела аутодизалица. Директна последица ове тенденције је повећање еластичности и појава осцилација, које неповољно утичу на радни век стреле услед појаве замора и отежавају управљање дизалицом. У раду је представљен комбиновани приступ моделирању динамичког понашања зглобно везаних сегмената стреле, при савојним осцилацијама, на примеру једне реалне конструкције, састављене од два сегмента и хидроцилиндра са вешајним скоповима. Сегменти стреле су третирани као *Euler-Bernoulli*-јеве греде са дистрибуираним инерцијалним и еластичним параметрима, док је збирни утицај хидроцилиндра и вешајних подскопова узет у обзир преко концентрисаних маса у вешајним тачкама. Такође, при дефинисању модела узета је у обзир аксијална крутост самог хидроцилиндра. Маса терета је концентрисана у крајњој тачки флексибилног манипулатора. С обзиром да шасија вучног возила није апсолутно крута, еластичност ослањања је уграђена у модел преко опруге у ослонцу. Посебна пажња је посвећена конструктивној специфичности стрела аутодизалица која се тиче ексцентричности вешајних тачака хидроцилиндра у односу на неутралне линије сегмената. Веза хидроцилиндра и сегмената је моделирана специјалним системом лаких, аксијално крутих штапова. Као генерализане координате слободних савојних осцилација усвојена су попречна померања еквидистантних тачака дуж неутралних линија. Успостављена је аналитичка зависност силе у хидроцилиндру у функцији трансверзалних померања карактеристичних тачака на сегментима, чије су аксијалне деформације занемарене. Цела зглобна структура је издељена на секције тачкама у којима делују трансверзалне силе. Диференцијални облици динамичких еластичних линија секција и граничних услова су дискретизовани методом централних коначних разлика. Гранични проблем је трансформисан у систем линеарних алгебарских једначина, погодан за програмирање. Тачност добијених зависности еласто-динамичких параметара структуре је потврђена поређењем природних учестаности предложеног модела са резултатима из модела изграђеног на бази методе коначних елемената, за све геометријске конфигурације зглобног манипулатора. Проблем променљивости попречних пресека сегмената је обухваћен посебним поглављем. Коришћењем истог приступа, извршена је и фреквентна анализа телескопског дела стреле.

**Кључне речи:** аутодизалице, зглобне стреле, флексибилни манипулатори, савојне осцилације, *Euler-Bernoulli*-јева теорија греда, метода централних коначних разлика, природне учестаности, метода коначних елемената.

# INFLUENTIAL PARAMETERS OF ARTICULATED SEGMENTS ON ELASTIC-DYNAMIC STABILITY OF TRUCK CRANE BOOMS

## SUMMARY

Truck cranes have one of key roles in construction and maintenance of all kinds of residential, traffic and industrial infrastructure. Frequent changes in loading and unloading locations, manipulation with different loads in conditions of restricted maneuver space, capacity increase, lifting height and reach increase, operating safety and stability, ergonomic and efficient control, with high degree of energy utilization, create a complex set of opposing demands and restrictions in their design. In order to get the lightweight, energetically more efficient and economical solutions, the engineers are forced to optimize the carrying structure of truck crane booms. Direct effect of this tendency is the increase of elasticity and the occurrence of vibrations which unfavorably affect the boom's life due to fatigue and make the crane control difficult. In this research, a combined approach to modeling of dynamic behaviour of boom articulated segments in bending vibration is presented, in the case of a real-life structure which consists of two segments, hydro cylinder and mounting subassemblies. Segments of the boom are considered as Euler-Bernoulli's beams with distributed inertial and elastic parameters, while the total influence of hydro cylinders and mounting subassemblies has been taken into account through lumped masses in mounting points. Given that the towing vehicle's chassis is not absolutely rigid, the boom support elasticity has been built in the model through the spring in the support. Special attention has been given to the constructive specificity of truck cranes' booms which deals with the eccentricity of hydro cylinders' mounting points in relation to segments' neutral lines. Bond of hydro-cylinders and segments has been modeled by a special system of light, axially rigid rods. As generalized coordinates of free bending vibrations there have been adopted the transverse displacements of equidistant points along the neutral lines. There has been established the analytic dependence of the force in hydro-cylinder in terms of transverse displacements of characteristic points on segments, whose axial deformations are neglected. Whole articulated structure is divided in sections by points where transverse forces act. Differential forms of sections' dynamic elastic lines and boundary conditions are discretized by central finite difference method. Boundary problem is transformed into a system of linear algebraic equations, suitable for programming. Accuracy of obtained dependencies of elastic-dynamic structure parameters is confirmed by comparing the natural frequencies of proposed model with results from the model built on the base of finite element method, for all geometrical configurations of articulated manipulator. The problem of segments' cross-sections non-uniformity is covered in special chapter. By using the same approach, there has been also carried out the frequency analysis of telescopic part of the boom.

**Key words:** *truck cranes, articulated booms, flexible manipulators, bending vibrations, Euler-Bernoulli's beam theory, central finite difference method, natural frequencies, finite element method.*

## САДРЖАЈ

<b>СПИСАК ОЗНАКА ПО РЕДОСЛЕДУ ПОЈАВЉИВАЊА.....</b>	<b>1</b>
<b>1. УВОД.....</b>	<b>4</b>
1.1. Предмет истраживања.....	6
1.2. Циљ истраживања .....	7
1.3. Значај истраживања .....	8
1.4. Структура рада .....	9
<b>2. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА ИЗ ОБЛАСТИ ДИНАМИКЕ АУТО-ДИЗАЛИЦА И ФЛЕКСИБИЛНИХ МАНИПУЛАТОРА .....</b>	<b>12</b>
<b>3. ПРЕГЛЕД ТИПОВА АУТО-ДИЗАЛИЦА И ОПШТЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ КОНСТРУКЦИЈА ЗГЛОБНИХ СТРЕЛА.....</b>	<b>22</b>
3.1. Типови ауто-дизалица.....	22
3.2. Опште карактеристике конструкција зглобних стрела ауто-дизалица и основни радни параметри.....	26
<b>4. ПРИМЕНА МЕТОДЕ КОНАЧНИХ РАЗЛИКА У ФРЕКВЕНТНОЈ АНАЛИЗИ СТРУКТУРА СА ДИСТРИБУИРАНИМ И ПРОМЕНЉИВИМ ПАРАМЕТРИМА.....</b>	<b>30</b>
4.1. Однос методе коначних разлика према аналитичком приступу и методи коначних елемената.....	30
4.2. Опис модела и полазна једначина .....	32
4.3. Гранични услови у диференцијалном облику .....	35
4.4. Дискретизација граничног проблема помоћу централних коначних разлика.....	36
4.4.1. Шема дискретизације носача .....	36
4.4.2. Дискретизација диференцијалне једначине еластичне линије .....	37
4.4.3. Дискретизација граничних услова.....	38
4.4.4. Карактеристична једначина.....	39
4.5. Нумерички пример и компарација са моделом на бази коначних елемената .....	42
<b>5. МОДЕЛИРАЊЕ УТИЦАЈА СТРУКТУРНИХ ПАРАМЕТАРА ЗГЛОБНОГ ДЕЛА СТРЕЛЕ НА ПРИРОДНИ ФРЕКВЕНТНИ СПЕКТАР.....</b>	<b>49</b>
5.1. Опис модела и полазне претпоставке.....	50
5.2. Полазне једначине у аналитичком и дискретизованом облику .....	55
5.3. Одређивање зависности тригонометријских величина од геометријских параметара и конфигурационих координата зглобног механизма.....	58
5.4. Моделирање функционалне зависности између силе у хидроцилиндру и померања карактеристичних тачака на тежишним линијама стуба и полуге .....	61
5.5. Дефинисање граничних услова у карактеристичним тачкама зглобног дела стреле у аналитичком и дискретизованом облику .....	67
5.5.1. Гранични услови у еластичном ослонцу.....	67

5.5.2. Гранични услови у тачки Н.....	69
5.5.3. Гранични услови у тачки В.....	71
5.5.4. Гранични услови у тачки Ј.....	73
5.5.5. Гранични услови у зглобу С.....	75
5.5.6. Гранични услови у тачки R.....	78
5.5.7. Гранични услови у тачки D.....	80
5.5.8. Гранични услови у тачки Q.....	82
5.5.9. Гранични услови у тачки P.....	84
5.6. Формирање система алгебарских једначина по померањима реалних чворова зглобног манипулатора.....	85
5.7. Нумерички пример и упоредни коначно-елементни модел структуре зглобног дела стреле.....	92
5.8. Резултати математичког модела и компарација са резултатима из коначно-елементног модела зглобног манипулатора.....	96
<b>6. ФРЕКВЕНТНА АНАЛИЗА ТЕЛЕСКОПСКОГ ДЕЛА СТРЕЛЕ КОД САВОЈНИХ ОСЦИЛАЦИЈА ПРИМЕНОМ МЕТОДЕ ЦЕНТРАЛНИХ КОНАЧНИХ РАЗЛИКА.....</b>	<b>108</b>
6.1. Опис структуре телескопа.....	108
6.2. Основне претпоставке, прорачунски модел и полазне једначине.....	110
6.3. Гранични услови у дискретизованом облику преко централних коначних разлика.....	114
6.3.1. Гранични услови у ослонцу А.....	114
6.3.2. Гранични услови у тачки В.....	114
6.3.3. Гранични услови у тачки С.....	116
6.3.4. Гранични услови у тачки D.....	119
6.3.5. Гранични услови у тачки F.....	121
6.3.6. Гранични услови на врху телескопа у тачки G.....	124
6.4. Формирање система алгебарских једначина по померањима реалних чворова структуре телескопа.....	126
6.5. Нумерички пример и упоредни коначно-елементни модел структуре телескопског дела стреле.....	132
6.6. Резултати математичког модела и компарација са резултатима из коначно- елементног модела телескопске структуре.....	135
<b>7. ЗАКЉУЧАК И ПРАВЦИ ДАЉИХ ИСТРАЖИВАЊА.....</b>	<b>142</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>147</b>
<b>Списак слика.....</b>	<b>155</b>
<b>Списак табела.....</b>	<b>158</b>
<b>Прилози.....</b>	<b>159</b>
Прилог 1 - MatLab код уз поглавље 4.....	159
Прилог 2 - MatLab код уз поглавље 5.....	161
Прилог 3 - MatLab код уз поглавље 6.....	166

## СПИСАК ОЗНАКА ПО РЕДОСЛЕДУ ПОЈАВЉИВАЊА

$k$	- крутост флексионе опруге ослонца конзолног носача
$M$	- концентрисана маса на врху конзолног носача
$B$	- константна ширина правоугаоног танкозидног профила
$\delta$	- дебљина зидова правоугаоног танкозидног профила
$H(x)$	- висина правоугаоног танкозидног профила
$H_0$	- висина пресека код ослонца
$H_L$	- висина пресека на слободном крају
$m(x)$	- маса по јединици дужине конзолног носача
$EI(x)$	- савојна крутост
$E$	- <i>Young</i> -ов модул еластичности
$I(x)$	- аксијални момент инерције попречног пресека
$L$	- дужина конзолног носача
$f(x,t)$	- расподељено трансверзално оптерећење
$M(x,t)$	- момент савијања
$Q(x,t)$	- трансверзална сила
$C$	- амплитуда осциловања
$Y(x)$	- сопствени облик (мод) осциловања
$\omega$	- кружна природна учестаност
$\varphi$	- фазни угао
$\eta$	- бездимензиони декремент висине попречног пресека
$\psi$	- бездимензиони коефицијент нагиба контуре носача
$A(x)$	- површина попречног пресека
$\rho$	- специфична маса материјала
$I_0$	- аксијални момент инерције попречног пресека код ослонца
$I_L$	- аксијални момент инерције попречног пресека на слободном крају
$n$	- број елементарних сегмената
$\Delta s$	- дужина елементарног сегмента
$i$	- редни број чвора
$Y_i$	- попречно померање $i$ -тог чвора
$P_i$	- кондезовани израз
$Q_i$	- кондезовани израз
$R_i$	- кондезовани израз
$S_i$	- кондезовани израз
$\lambda$	- карактеристична вредност
$T$	- кондезовани израз
$J$	- кондезовани израз
$f_i$	- сопствена фреквенција



$q$	- бездимензионална крутост
$r$	- бездимензионална маса
$m$	- укупна сопствена маса носача
$\Delta_i$	- релативно одступање $i$ -те сопствене кружне учестаности
$MKE$	- метода коначних елемената
$l_1$	- дужина стуба
$l_2$	- дужина полуге
$A_1$	- површина попречног пресека стуба
$I_1$	- аксијални момент инерције стуба
$A_2$	- површина попречног пресека полуге
$I_2$	- аксијални момент инерције полуге
$k$	- крутост ослонца зглобног манипулатора
$M_P$	- маса корисног терета манипулатора
$\alpha_1$	- угао између осе стуба и вертикалног правца
$\alpha_2$	- угао између осе полуге и хоризонталног правца
$h_1$	- крак спрега код доње вешајне тачке хидроцилиндра
$h_2$	- крак спрега код горње вешајне тачке хидроцилиндра
$e_1$	- ексцентрицитет доње вешајне тачке од тежишне линије стуба
$e_2$	- ексцентрицитет горње вешајне тачке од тежишне линије полуге
$F_c$	- сила у хидроцилиндру
$c$	- аксијална крутост хидроцилиндра
$T_1(T_B)$	- трансверзална сила код доњег вешања од силе хидроцилиндра
$T_2(T_D)$	- трансверзална сила код горњег вешања од силе хидроцилиндра
$N_1$	- аксијална сила код доњег вешања која потиче од силе хидроцилиндра
$N_2$	- аксијална сила код горњег вешања која потиче од силе хидроцилиндра
$T_H$	- трансверзална сила доњег вешања услед разлагања момента на спрег
$T_J$	- трансверзална сила доњег вешања услед разлагања момента на спрег
$T_R$	- трансверзална сила горњег вешања услед разлагања момента на спрег
$T_Q$	- трансверзална сила горњег вешања услед разлагања момента на спрег
$\delta_1$	- угао између осе хидроцилиндра и осе стуба
$\delta_2$	- угао између осе хидроцилиндра и осе полуге
$M_{hc}$	- укупна маса хидроцилиндра са вешајним подсклоповима
$M_B$	- концентрисана маса
$M_D$	- концентрисана маса
$l_j$	- дужина $j$ -те секције зглобног манипулатора
$A_j$	- површина попречног пресека $j$ -те секције зглобног манипулатора
$m_j$	- подужна маса $j$ -те секције зглобног манипулатора
$Y_j(x_j)$	- функција померања $j$ -те секције зглобног манипулатора
$I_j$	- аксијални момент инерције пресека $j$ -те секције зглобног манипулатора
$EI_j$	- савојна крутост пресека $j$ -те секције зглобног манипулатора
$L$	- укупна дужина зглобно везаних сегмената

$N$	- број елементарних делића при дискретизацији структуре
$s$	- корак дискретизације структуре
$Y_i^f$	- фиктивно померање $i$ -тог чвора
$l_0$	- дужина опруге хидроцилиндра у недеформисаном стању
$l_B$	- растојање тачке В од краја стуба
$l_D$	- растојање тачке D од краја полуге
$l$	- дужина опруге хидроцилиндра у деформисаном стању
$\Delta l$	- промена дужине опруге (промена растојања крајњих тачака хидроцилиндра)
$\Delta l_F$	- парцијална промена дужине опруге код доње вешајне тачке
$\Delta l_G$	- парцијална промена дужине опруге код горње вешајне тачке
$r_1$	- коефицијент ексцентрицитета доње вешајне тачке
$r_2$	- коефицијент ексцентрицитета горње вешајне тачке
$\varphi_B$	- угао нагиба еластичне линије стуба код доње вешајне тачке
$\varphi_D$	- угао нагиба еластичне линије стуба код горње вешајне тачке
$H, B, J, C, D, Q, P$	- редни бројеви истоимених чворова у систему једначина
$B_1 \div B_{13}$	- кондезовани изрази
$\delta_1, \delta_2, \delta_3$	- релативне грешке природних фреквенција
$l_1, l_2, l_3$	- дужине сегмената телескопа
$s_1, s_2$	- конфигурационе координате телескопа (извученост сегмената)
$L$	- тренутни укупни дохват (дужина) телескопа
$A_I \div A_V$	- површине попречних пресека секција телескопа
$I_I \div I_V$	- аксијални моменти инерције попречних пресека секција телескопа
$L_1 \div L_5$	- дужине секција телескопа
$m_I \div m_V$	- подужне масе секција телескопа
$A, B, C, D, F, G$	- редни бројеви истоимених чворова у систему једначина
$a, b$	- бездимензиони коефицијенти крутости и маса прве и друге секције
$c, d$	- бездимензиони коефицијенти крутости и маса друге и треће секције
$e, f$	- бездимензиони коефицијенти крутости и маса треће и четврте секције
$g, h$	- бездимензиони коефицијенти крутости и маса четврте и пете секције
$B_1 \div B_5$	- кондезовани изрази

# 1. Увод

Динамична експанзија и развој глобалне грађевинарске индустрије, који креће од педесетих година двадесетог века, делује као континуирани генератор потреба за пројектовањем и производњом разноврсних типова машина, уређаја и конструкција, који су укључени у овај процес, како у изградњи, тако и у одржавању свих видова инфраструктуре.

Било да је реч о изградњи и одржавању урбане инфраструктуре и стамбених објеката или индустријских постројења, у циљу скраћења рокова извођења и смањења укупних трошкова радова, као један од императива, наметнула се потреба за развојем посебног ефикасног начина транспорта и манипулације грађевинским материјалима и пратећом опремом и техником.

Честе промене локације изградње, као и промене места допреме материјала и опреме у оквиру истог градилишта, проблем манипулације при утовару и истовару материјала разноврсних облика, маса и габарита, условили су појаву, развој и масовну производњу разноврсних транспортних средстава, међу којима ауто-дизалице заузимају посебно место.

Од прве хидрауличне дизалице монтиране на камион, коју је произвела компанија НИАВ 1947. године, пројектовање и продукција ауто-дизалица је диверзификована у виду широког спектра конструкционих решења у погледу типова, намене, носивости, специјалних врста терета и сл.

Главне области примене у којима је неопходна употреба ауто-дизалица су:

- изградња и одржавање стамбених, пословних, индустријских и других грађевинских објеката;
- манипулација и транспорт у дрвној индустрији;
- постављање и одржавање јавне расвете;
- постављање и одржавање саобраћајне инфраструктуре;
- послови на уређењу и декорацији градске средине (осликавање фасада, постављање реклама, и сл.);
- гашење пожара и спасавање лица угрожених пожаром или неком другом непогодом;
- одржавање парковских површина и уличног зеленила;
- употреба у војне и полицијске сврхе.

Поред ауто-дизалица опште намене, које су предвиђене за рад са разним облицима терета, постоје и специјални типови који су намењени и за транспорт људи у специфичним ситуацијама и транспортним задацима. У њих се убрајају хидрауличне подизне радне платформе, које омогућавају привремени приступ људи и опреме до, иначе, тешко приступачних места, која су, по правилу, на некој висини. Употреба подизних платформи је оправдана услед специфичности посла којег треба обавити. Другим речима, ради се о радњама које треба обавити једнократно или привремено, а на местима која се налазе на релативно великој висини (од неколико метара до неколико десетина метара). Уз њих, ту су и специјална решења ватрогасно-спасилачких ауто-дизалица, које, поред корпе за прихват људи, имају на себи и цевоводни систем за гашење пожара.

Ауто-дизалица опште намене се састоји из вучног возила – камиона, којим се терет транспортује до места истовара и надограђеног обртног манипулатора - стреле којом се обавља манипулација теретом при утовару и истовару. Сама стрела се састоји од сегмената који могу бити повезани телескопски и/или зглобно, чиме се постиже оперативна флексибилност према затеченој конфигурацији објеката на терену (отежан приступ услед разних препрека, нагиба терена, ограниченог простора другим објектима, провлачење кроз отворе, и сл.). Са друге стране, конструкција стреле мора бити пројектована на начин који омогућава њено ефикасно склапање у тзв. транспортни положај, тј. у што мањи простор, у циљу остваривања што већег утоварног простора на камиону. Упоредо са тиме, габарити вучног возила са стрелом у транспортном положају морају бити у законом прописаним границама.

С обзиром да се манипулација теретом, у највећем делу, обавља ван габарита вучног возила, посебна пажња при пројектовању се поклања питању стабилности против претурања, које се решава предвиђањем једног или два пара стабилизатора.

Такође, у оцену свеобухватне ефикасности ауто-дизалице улази и питање управљања. Њена трансформација из транспортног у радни режим и обратно, као и руковање при утовару и истовару терета, треба да буду пројектовани тако да их може извршавати један оператер.

У условима оштре конкуренције тржишне економије, пред ове машине се стављају све строжији захтеви у погледу радних карактеристика, века трајања, функционалности, цене, ергономије, екологије и безбедности. То значи да се пред посматрану машину поставља захтев да обави одређени транспортни задатак са минимумом утрошене енергије за што краће време, да је безбедна, како за руковаоца, тако и за околину и да је цена производње и одржавања ниска. Конкурентност машине на тржишту заснована је на мери испуњења ових захтева.

## 1.1 Предмет истраживања

Стреле аутодизалица са зглобно везаним сегментима представљају геометријски изменљиве носеће структуре - манипулаторе, постављене на обртним платформама шасија вучних возила. Кретање ових механизма се остварује променом угла између зглобно повезаних полука – сегмената и извлачењем и увлачењем телескопске секције сегмената. Основни задатак ових специјалних дизалица је да безбедно подигну терет - опрему и/или људство до одређене висине за најкраће могуће време. С обзиром да сврха подизања може бити транспорт терета и/или обављање неке радње од стране оператера, пред овај тип носећих структура постављају се, поред задовољавајуће чврстоће, допунски захтеви у погледу еласто-динамичке стабилности.

Императив досезања већих висина подизања доводи до повећавања дужине сегмената, што има за последицу повећану склоност ка еластичној деформацији сегмената и угибу на крају стреле. Крутоост стреле се може повећати до одређене мере оптимизацијом попречних пресека сегмената, остајући при том у задатом масеном оквиру. Ипак, конзолна природа ослањања стреле на подконструкцију - шасију вучног возила, као и крајњи положај радног терета узрокују значајан угиб на крају стреле и појаву осцилација. Дуготрајне осцилације стреле врло неповољно утичу на радни век делова стреле и подконструкције тиме што узрокују појаву замора структурних делова, док с друге стране погоршавају радне услове за оператере у погледу вибро-удобности. Постепено смиривање осциловања настаје због трења у зглобовима и самој челичној структури и отпора средине.

При динамичком моделирању структура зглобних стрела пројектант мора сагледати све релевантне специфичности ових машина. На првом месту, ради се о структурама са изменљивом геометријом, односно, са променљивом конфигурацијом положаја око којег се осциловање догађа. При томе, измена конфигурације се остварује помоћу ротационих и трансаторних кинематских парова сегмената стреле, односно, помоћу зглобног и телескопског дела. Променом конфигурације долази и до промене динамичких карактеристика структуре, односно, свакој конфигурацији стреле одговара јединствен скуп динамичких параметара, као што су природне учестаности, сопствени облици осциловања, динамички угиб, време смиривања осцилација, и сл.

Истовремено, тежња за оптимизовањем конструкције у погледу масе довела је до изразито променљивих попречних пресека сегмената, нарочито у зглобном делу стреле, што резултује променљивим геометријским карактеристикама дуж сегмената.

Сложеност структуре је додатно повећана због захтева да се стрела склопи у строго ограничени простор приликом стављања у транспортни положај након завршетка утовара или истовара терета.

На коначан облик конструкционих решења сегмената стреле утичу и путање хидрауличних водова и вешајни подсклопови хидроцилиндара у виду отвора, ушки, разних локалних ојачања, и сл.

Током манипулисања теретом, силе у зглобовима и хидроцилиндрима досежу врло високе вредности, што повећава радне притиске у хидрауличкој инсталацији. Поред савојне еластичности самих сегмената, на динамику зглобних стрела, у извесној мери, утиче и подужна еластичност хидроцилиндара услед деформабилности зида цилиндра и стишљивости уља.

Стрела ауто-дизалице се преко обртног стуба ослања на шасију вучног возила, која је помоћу стабилизатора додатно ослоњена на тло. Сама подконструкција на којој лежи стрела је деформабилна, па се и утицај еластичности ослањања стреле мора узети у обзир приликом разматрања динамичког понашања надградње.

Тачност математичког модела динамичког понашања зглобних стрела у великој мери зависи од начина моделирања утицаја сопствених маса сегмената и хидроцилиндара, које збирно дају величину истог реда као што је маса корисног терета.

Наведене специфичности структура зглобних стрела чине поступак моделирања динамичког понашања веома комплексним.

Предмет истраживања у докторској дисертацији је дефинисање утицаја структурних специфичности и конструкционих параметара на динамичко понашање зглобне стреле, као структуре са неравномерно и континуирано расподељеним параметрима, у целокупном оперативном простору при слободним савојним осцилацијама у вертикалној равни.

## **1.2 Циљ истраживања**

Основни циљ дисертације се састоји у дефинисању функционалних зависности између еласто-динамичких параметара и развоју аналитичко-нумеричког поступка у оквиру процеса моделирања динамичког понашања зглобних стрела.

Главне специфичности конструкција зглобних стрела ауто-дизалица су:

- деформабилност ослоне подконструкције (шасије) вучног возила,
- изражена променљивост попречних пресека сегмената, нарочито у зглобном делу стреле, што повлачи за собом неравномерно расподељену савојну крутост и масу,
- изменљивост конфигурације структуре заснована на зглобним (ротационим) и телескопским (транслаторним) везама између сегмената,
- еластичност хидроцилиндра услед високих радних притисака у хидрауличкој инсталацији.

Наведени фактори чине процес динамичког моделирања зглобних стрела врло компликованим. Да би се развио одговарајући приступ, који би обухватио све наведене утицајне факторе на динамичко понашање, најчешће се мора изаћи из чисто аналитичког домена и један део поступка развити применом неке од познатих нумеричких метода.

Задатак аналитичког дела приступа при динамичком моделирању је успостављање што тачнијих функционалних зависности између одговарајућих еласто-динамичких параметара као што су померања карактеристичних тачака структуре, крутост хидроцилиндара, крутост ослонца, инерцијалне силе концентрисаних маса, итд. Избор и примена адекватне нумеричке методе и поступка треба да омогуће решавање постављених аналитичких веза са што мањом грешком.

Према томе, циљ дисертације може се формулисати и као дефинисање оптималног приступа при динамичком моделирању зглобних стрела ауто-дизалица, као комбинације аналитичког и нумеричког приступа.

### 1.3 Значај истраживања

Зглобне стреле аутодизалица се широко користе у обављању деликатног посла манипулисања теретом и људством. Већина постојећих конструкција ових манипулатора су дизајниране и изграђене на начин који повећава крутост у покушају да се минимизирају осцилације на крају стреле и постигне добра тачност позиционирања при извршењу радних операција. Висока крутост постиже се робусним дизајном зглобно спојених сегмената. Међутим, постојеће тешке и ригидне конструкције су се показале неефикасним у погледу потрошње енергије или брзине у односу на корисну носивост. Са друге стране, оптимизација сегмената има за последицу дуготрајно осциловање стреле и подконструкције, што доводи до тога да је њихов радни век ограничен због појаве замора елемената структуре.

С обзиром на веома сложену структуру зглобних стрела ауто-дизалица, истраживање динамичког понашања је врло комплексан задатак. Код динамичког моделирања овако сложених система, обично се прибегава примени приближних метода у динамици конструкција, што се одражава на тачност добијених резултата. Због тога, дефинисање комбинованог аналитичко-нумеричког поступка за генерисање приближног фреквентног модела, који би задржао аналитички облик а истовремено остварио високу тачност добијених резултата природних учестаности, представља значајан изазов и корак ка решавању свих аспеката динамичког понашања ових манипулатора.

Добијени модел, захваљујући одговарајућој форми, представља платформу за писање програмског кода који омогућава добијање жељених зависности динамичких карактеристика структуре у функцији конструкционих параметара сегмената.

Истовремено, изграђени модел се треба посматрати и као упоредни при дефинисању еквивалентног модела, истих динамичких карактеристика али са много пута мањим бројем степени слободe, при чему би се применио неки од поступака оптимизације.

#### 1.4 Структура рада

У складу са постављеним циљем дисертације, реализована истраживања су приказана кроз седам поглавља. У овом раду биће понуђен комбиновани приступ при дефинисању динамичког модела код слободних савојних осцилација структуре зглобних стрела ауто-дизалица. Он се састоји од комбинације аналитичког формулисања појединачних структурних специфичности и зависности између еласто-динамичких параметара у карактеристичним тачкама и нумеричке трансформације проблема фреквентне анализе из диференцијалног у алгебарски домен.

У првом поглављу изнете су полазне основе истраживања и дефинисани предмет, циљ и значај истраживања. Постављени су оквири истраживања као и очекивани резултати и допринос истраживања.

Друго поглавље је посвећено анализи и прегледу постојеће литературе у области истраживања зглобних стрела ауто-дизалица и зглобних манипулатора уопште. Дата је подела литературе према предмету истраживања и методама које су коришћене код дефинисања динамичких модела.

У трећем поглављу извршен је кратак преглед типова ауто-дизалица уз идентификацију заједничких структурних карактеристика зглобних стрела. Такође, дате су компаративне предности и зглобних у односу на телескопске стреле ауто-дизалица.

У четвртном поглављу је показана примена методе централних коначних разлика у фреквентној анализи структура са дистрибуираним параметрима на конкретном примеру савојних осцилација еластично ослоњеног конзолног носача променљивог попречног пресека са концентрисаном масом на врху.

Детаљно изложени поступак дефинише општи приступ код одређивања зависности природних учестаности од конструкционих параметара и граничних услова структуре са дистрибуираним инерцијалним и еластичним карактеристикама. Истовремено, показано је и како се решава проблем променљиво расподељених параметара, што је једна од главних конструкционих специфичности зглобних стрела. Тачност резултата је проверена и потврђена поређењем са резултатима из многобројних тестова који су добијени из модела на бази методе коначних елемената.



Најзначајнији део дисертације представља пето поглавље у којем је изграђен детаљан динамички модел зглобног дела стреле као дво-полужног зглобног манипулатора са еластичним ослањањем и теретом на врху. Изграђен је аналитичко-нумерички модел фреквентне анализе у функцији спољашњих и унутрашњих утицајних параметара зглобног манипулатора као система са расподељеном крутошћу и масом. Као конфигурационе координате које дефинишу тренутни положај стреле у радном пољу усвојени су углови које полуге заклапају са вертикалним, односно, хоризонталним правцем.

Утицај силе у хидроцилиндру и ексцентричности вешајних тачака у односу на неутралну линију полужја је моделиран увођењем по три лака и крута штапа код сваког вешајног склопа. Тиме су концентрисани моменти растављени на одговарајуће спрегове сила, које делују трансверзално на полуге манипулатора. Након тога, дефинисана је зависност тригонометријских величина од геометријских параметара и конфигурационих координата структуре. Анализом деформација делова полуга код вешајних тачака хидроцилиндра, утврђена је аналитичка зависност између силе у хидроцилиндру и померања карактеристичних тачака на неутралним линијама полуга.

Крајње тачке свих фиктивних штапова, заједно са крајевима полуга и зглобном тачком, деле целу структуру на секције, које имају сопствене локалне координатне системе. Анализа се ослања на *Euler-Bernoulli*-јеву теорију греда, тј. на претпоставци да се инерција услед ротирања елементарних делића и ефекти смицања могу занемарити. Поред тога, занемарене су еластичне деформације полуга у подужним правцима, на основу великих површина попречних пресека. За сваку секцију су формиране диференцијалне једначине кретања у локалним координатним системима, које су повезане у систем помоћу услова у погледу померања, нагиба, момената савијања и трансверзалних сила у граничним тачкама.

Цела структура је издељена чворним тачкама, чија су померања, управна на тежишну линију у равнотежном положају, усвојена као генералисане координате система.

Дискретизација аналитичких облика једначина кретања и граничних услова је извршена методом централних коначних разлика и формиран је систем линеарних алгебарских једначина по померањима чворова.

Тачност решења представљеног приступа је испитана и верификована упоређивањем са резултатима из коначно-елементног модела, кроз више група тестова у којима су варирани идентификовани утицајни параметри.

Користећи исти приступ, у шестом поглављу је спроведена фреквентна анализа телескопског дела стреле код савојних осцилација. Анализиран је телескоп који се састоји из три сегмента, као геометријски изменљива структура, при чему су као конфигурационе координате усвојене релативне координате унутрашњих сегмената у

односу на спољашње. Цела структура је посматрана као јединствен носач, степенасто променљивог попречног пресека.

Приликом дефинисања прорачунског модела, претпостављено је да су динамичке еластичне линије увучених делова сегмената идентичне са динамичким еластичним линијама одговарајућих делова спољашњих сегмената. Пред тога, занемарен је утицај локалних деформација зидова сегмената услед деловања локалних контактних оптерећења у односу на глобална померања тежишта попречних пресека. Утицај постојања зазора у контактима сегмената није разматран. Утицаји смицајних сила и ротације елементарних делова сегмената су занемарени, односно, усвојен је *Euler-Bernoulli*-јев модел носача при савојним осцилацијама.

Теоријске контактне тачке на срединама клизних плочица деле целу структуру на секције, и оквиру којих су масе и крутости равномерно расподељени. Парцијалне функције еластичних линија се сустичу у границама секција и формирају глобалну динамичку еластичну линију телескопа. Повезивање парцијалних функција по секцијама се одвија кроз граничне услове у граничним тачкама. Формирани дискретизовани модел је проверен тестирањем коначно-елементног модела кроз више група испитивања.

Седмо поглавље формулише закључке и даје уопштени поступак на бази предложеног приступа. Такође, изложене су предности и недостаци комбинованог аналитичко-нумеричког приступа у односу на методу коначних елемената код израде динамичких модела зглобних стрела ауто-дизалица.

На крају дисертације дат је списак коришћене литературе и прилози са програмским кодовима који су написани на бази формираних модела из четвртог, петог и шестог поглавља рада.

## 2. Преглед досадашњих истраживања из области динамике ауто-дизалица и флексибилних манипулатора

Један од приоритетних пројектних задатака са којим се суочавају конструктори зглобних стрела ауто-дизалица је остваривање што боље прецизности при позиционирању терета током извођења захтевних операција у реалним условима на терену. Већа тачност позиционирања терета повлачи за собом минимизирање деформација, односно, вибрација врха стреле. Поменути захтев се испуњава повећањем крутости структуре, тј., робусном конструкцијом сегмената. Истовремено, са повећањем крутости долази и до негативне тенденције повећања масе стреле, што има за последицу неефикасност у погледу ангажоване снаге за обављање кретања и смањење брзине манипулисања. Стреле ауто-дизалица, зглобне и телескопске, захваљујући великим дужинама сегмената у циљу остваривања већих дохвата, сврставају се у типичне представнике флексибилних манипулатора. С обзиром да највећи изазов при њиховом пројектовању лежи у контроли осцилација, многи истраживачи су покушавали да реше овај проблем побољшавањем динамичких модела и усвајањем различитих стратегија контроле [1].

Информација о динамичким оптерећењима челичне конструкције је важна за њен статички прорачун, као и за процењивање њеног века трајања [2].

Posiadala и Sekus [3] су разматрали слободне савојне вибрације телескопске стреле ауто-дизалице. Стрела је састављена од два сегмента, при чему је узета у обзир еластичност и маса хидроцилиндра којим се мења дохват. Контакти између сегмената су представљени са опругама. Представљен је дискретни модел са једним степеном слободе, где је кретање врха стреле описано обичном диференцијалном једначином. За формулацију и решавање проблема коришћен је формализам *Lagrange*-ових множитеља. Изведене су математичке релације које израчунавају еквивалентну крутост опруга и масу, као и прву учестаност слободних вибрација у равни ротирања дискретног модела. Ови параметри су се мењали са променом конфигурације система.

Исти аутори су применили исти приступ код телескопске стреле са три сегмента [4]. Поред тро-сегментне структуре, аутори су проширили модел узимајући у разматрање и утицаје еластичности ослонаца саме стреле и хидроцилиндра. Као и у претходном раду са два сегмента, разматрани систем је замењен са дискретно-континуалним моделом.

Guangfu Sun и Michael Kleeberger [5] су истраживали динамичко понашање мобилних хидрауличних дизалица при обртном кретању, при чему су у динамички модел уградили погонски и управљачки систем. Изграђен је симулациони метод за

одређивање динамичког одзива обртних кранова при произвољним почетним параметрима. Једначине за комплетан динамички прорачун су изведене на основу теорије система еластичних тела, методе коначних елемената, теорије система управљања и хидраулике. Улазни подаци су жељена брзина обртања и управљачки параметри. Приликом започињања ротације хидрауличког крана и при кочењу, претпостављен је трапезоидни профил угаоне брзине. Предложен метод, осим динамичког одзива структуре, даје увид и у параметре погона као што је промена излазног момента мотора, динамички одзив вентила, притисак уља, интезитет протока, итд.

Maczynski и Wojciech су представили тродимензионални динамички модел телескопске ауто-дизалице [6]. Еластичност и пригушење у стабилизаторима и хидроцилиндру су узети у обзир, при чему се број степени слободе може бирати, сагласно комплексности приступа. Дат је алгоритам оптимизације погонских функција при закретању надградње ауто-дизалице, где је главни циљ оптимизовања у осигурању позиционирања терета на крају радног циклуса у случају минималног осциловања. Спроведени прорачуни и анализе у вези са оптимизацијом кретања надградње су потврдили претпоставку да је могуће одредити оптималне функције обртања крутог модела а онда их убацили као улазне параметре у флексибилни модел. Ове функције омогућавају врло прецизно позиционирање терета, чак и ако се еластичности узму у обзир.

Бошњак, Зрнић и Драговић су истраживали могућност појаве аеродинамичке нестабилности мобилне радне платформе услед дејства ветра [7]. Савремене методе пројектовања и оптимизације као и примена микролегираних челика су, у великој мери, допринели смањењу сопствене масе мобилних дизаличних и грађевинских машина, што је са друге стране резултовало у нижим природним фреквенцијама. На тај начин се стичу услови појаве резонанце система, што озбиљно утиче на умањење оперативних перформанси дизалице. У циљу спречавања ове појаве, аутори предлажу да се носећа подконструкција учини активном, тј, способном да реагује на тренутне услове средине. Активна подструктура би била у стању да подешава сопствене динамичке карактеристике сагласно утицајима околине.

Towarek [8] је истраживао утицај деформабилне природе тла на динамичку стабилност ауто-дизалица. Спроведена анализа је узела у обзир променљиве притиске на ослону површину тла током обртања стреле. Померање ослонаца дизалице је уграђена у динамички модел кроз функцију деформације током времена. Након усвајања дискретног модела, написане су динамичке једначине кретања, које су, због своје комплексности, решене нумеричким методама. Добијени су динамички угиби ослонаца дизалице при различитим угаоним брзинама обртања, што даје увид у утицај деформабилности тла на укупно динамичко понашање целе структуре. Такође, дате су трајекторије подигнутог терета при разним угаоним брзинама обртања, што омогућава анализу прецизности позиционирања, односно, минимизацију осциловања терета.

Chin, Nayfeh и Abdel-Rahman [9] су испитивали модел дизалице са стрелом у виду сферног клатна, које се креће под утицајем побуде у ослоњцима структуре. Као модел дизалице са стрелом усвојен је систем са два степена слободe и истим природним фреквенцијама.

Derlukiewicz и Przybyłek [10] су представили коначно-елементни дискретни модел хидрауличне подизне платформе. Добијена су поља напона и померања, при чему су максималне вредности испод допуштених. Акцент је стављен на изворе концентрација напона, који се морају ублажити приликом модификовања геометрије стреле. Такође, праћењем координата центра маса, констатовано је испуњење услова стабилности платформе.

Као доминантна и општа карактеристика свих конструкционих решења ауто-дизалица, нарочито код зглобних стрела, истиче се комплексност геометрије сегмената и структуре као целине. Високе вредности концентрисаних оптерећења која делују у спојевима сегмената и вешајним тачкама хидроцилиндара, као и функционални захтеви у погледу остваривања већих дохвата са једне и склопивости у транспортни положај са друге стране, допринели су да геометрија коначног решења склопа буде врло сложена. Оптимизација облика тих структура у циљу повећања односа масе корисног терета и сопствене масе стреле често није могућа без коришћења детаљних CAD модела и примене методе коначних елемената [11]. Такође, истраживања граничних стања која се јављају у контактима сегмената реалних конструкција телескопских стрела ауто-дизалица а која доводе до губитка стабилности целе структуре су вршена применом софтвера на бази коначно-елементних модела [12].

Ипак, уз одређене апроксимације, аналитички приступ се може применити при израчунавању нападних концентрисаних оптерећења у спојевима сегмената и сила у хидроцилиндрима [13], као и код израчунавања статичког угиба врха стреле у функцији положаја терета [14]. Изведене аналитичке зависности су значајне у раној фази пројектовања као полазна основа при грубом димензионисању карактеристичних пресека и структурних детаља и елемената преко којих се врши пренос оптерећења између сегмената.

Grabski и Strzałko [15] су анализирали тродимензионални модел зглобне радне платформе, при чему су ослоњце стабилизатора заменили сетовима опруга а сегменте зглобне стреле и корпус посматрали као крута тела. Извођење диференцијалних једначина кретања је извршено применом софтверских пакета и добијени су резултати за реакције ослонаца стабилизатора у функцији угла обртања стреле.

Будући да је реч о структурама са изменљивом геометријом [7], различитим конфигурацијама стреле ауто-дизалице одговарају и различити параметри еласто-динамичког понашања. Fujita и Sugiyama [16] су представили процедуру моделирања телескопских стрела ауто-дизалица користећи апсолутне координате чворних тачака заједно са ограничењима која важе у клизним контактима. С обзиром да се сегменти стреле међусобно увлаче и извлаче под различитим оперативним условима, укупна

дужина стреле се динамички мења, што доводи до мењања вибрационих карактеристика током времена. Такође, у овом раду је наглашено да се при моделирању телескопских стрела специјална пажња мора посветити чињеници да се положаји клизних контаката мењају дуж деформабилне осе и да се мора тражити решење за покретни гранични проблем. Стога је, као циљ истраживања, постављена изградња процедуре моделирања флексибилне стреле где се разматра услов клизних контаката уз појаву ефекта динамичког трења.

У циљу дефинисања аналитичких модела динамичког понашања стрела ауто-дизалица, многи аутори су уводили разне апроксимације и упрошћавања, како би омогућили извођење једначина кретања. Ова поједностављења се најчешће огледају у замени расподељених параметара система са концентрисаним величинама. На пример, при моделирању флексибилности зглобних радних платформи, расподељена еластичност сегмената је замењена опругама у зглобовима [17].

Значајна пажња аутора који се баве проучавањем мобилних дизалица је посвећена и проблематици њихања окаченог терета, које се дешава током радних кретања и након завршетка оперативног циклуса. Ова појава се преноси све до шасије вучног возила. Значајно место при изградњи динамичких модела ауто-дизалица заузима и ефикасна контрола љуљања шасије вучног возила, које је ослоњена на тло посредством флексибилних стабилизатора [18].

Sun и Liu [19] су дефинисали прорачунски метод за одређивање динамичких одзива хидрауличних дизалица приликом промене нагиба стреле, узимајући у обзир погонски систем хидроцилиндра. Користећи *Lagrange*-ове једначине и теорију динамике система више тела, постављен је флексибилни модел кретања дизалице при промени нагиба стреле. Погонска сила хидроцилиндра је формулисана преко принципа виртуелног рада као функција генералисаних координата. Цео систем је описан једначинама стања. Резултати су показали да су динамички одзиви система осетљивији на убрзања при промени нагиба стреле него на брзине кретања. Предложени прорачунски модел се показао као погодан за оптимизацију овог кретања стреле, где се као циљ поставља премештање терета на жељену локацију при којем се њихање терета као и динамички одзив дизалице губе што је брже могуће.

Један од проблема код стрела аутодизалица, који се наметнуо као предмет истраживања више аутора [20÷25] је питање кинематске неодређености, која се огледа у чињеници да се крајњи положај терета, обешеног о врх задњег сегмента, може постићи помоћу бесконачно много комбинација релативних кретања повезаних сегмената. Ово питање је ауторима отворило могућност за оптимизацију трајекторије врха стреле, при чему се као функција циља могу појавити разни конструктивни захтеви као, на пример, минимизација погонске силе у хидроцилиндрима [26].

Код ауто-дизалица са телескопском стрелом, терет је обешен о челично уже променљиве дужине, услед чега настаје појава њихања терета након завршеног премештања. Узајамна повезаност начина кретања стреле ауто-дизалице и интезитета њихања терета и његова минимизација као непожељне појаве, били су предмет

истраживања многих аутора [27÷42]. Lau и Low [43] су дошли до закључка да је за минимизацију осциловања терета као физичког клатна потребно да брзина померања стреле уместо трапезоидног има полу-синусоидални профил.

Током обављања транспортних и манипулативних послова помоћу мобилних дизалица са стрелом у реалним условима на терену, стабилност против претурања представља кључни предуслов за ефикасно и безбедно руковање [44], јер губитак стабилности по правилу доводи до катастрофалних последица по људе и опрему. Значај овог проблема је побудио велико интересовање многих истраживача [45÷57]. Приликом постављања математичких модела стабилности мобилних дизалица на претурање, поред статичких оптерећења услед сопствене масе стреле и шасије вучног возила, неопходно је и укључивање и инерцијалних сила услед кретања стреле и клаћења терета. У циљу процене својства стабилности, одређује се коефицијент стабилности методом маргине стабилности против претурања [58].

Ауто-дизалице са зглобним стрелама су својом функционалношћу постале обавезан део механизације у дрвној индустрији. Опремљене специјалним захватним уређајима – грабилицама и са прилагођеним утоварним простором на камиону, ове машине врше утовар и транспорт посечених стабала директно од места сече до одредишта за даљи транспорт или до фабрика за прераду. Тешки услови рада услед неприступачног и неравног терена и велике масе трупаца повлаче дејство изразито динамичких оптерећења на елементе конструкције. Због тога, умањење динамичких утицаја и побољшање ефикасности зглобних стрела ауто-дизалица које се примењују у шумарству, кроз испитивање и синтезу њихових електро-хидрауличких погонских компоненти и система, заузимају значајан удео у истраживањима [59,60,61].

Конкурентност решења зглобних стрела ауто-дизалица изражена је кроз способност манипулисања теретом (максимални терет, дохват, величина радног поља), са једне, и функционалност током транспорта, када се структура стреле ставља у тзв. транспортни положај. Кинематски посматрано, сва решења познатих светских произвођача се могу поделити у две групе конструкционих решења, К-тип и Z-тип, које се разликују у самој грађи кинематског ланца, што одређује начин њиховог склапања, односно, заузимања транспортног положаја након утовара терета. К-тип зглобних стрела постижу већу носивост у односу на решења Z-типа приближно исте сопствене масе и дохвата, док компаративна предност конструкције Z-типа лежи у бољој маневарској способности приликом паковања у транспортни положај, при чему се зглобна структура склапа попречно у односу на подужну осу возила на веома малом простору, што ослобађа товарни простор камиона [62].

С обзиром да се кретања елемената носеће структуре стрела ауто-дизалица одвијају деловањем хидроцилиндара, на местима упоришних тачака и у зглобовима се генеришу концентрисане силе великог интензитета, што доводи до тачака са појавом високе концентрације радних напона. Са друге стране, изражене осцилације целе структуре узрокују велики број промена напона, што у комбинацији са

концентрацијом напона доводи до хаварија на критичним местима, као последица замора материјала [63].

Безбедност извођења манипулисања теретом код ауто-дизалица се не може остварити без примене система за праћење и ограничавање оптерећења, односно, система за ограничавање оптерећења или лимитера момента подизања. Они се, углавном, користе за детектовање укупног момента подизања, који потиче од тежине корисног терета и сопствене тежине стреле, и поређење са прописаним вредностима. Поред тога, у циљу постизања безбедности, ефикасности и комфорности у раду, користе се разни давачи положаја, као што је детектор угла стреле, сензор извучености телескопа, давачи степена извучености стабилизатора, итд. Питањем контроле оптерећења мобилних хидрауличних дизалица се бавио Balkan [64÷66]. У свом раду [64], на примеру упрошћеног модела стреле ауто-дизалице, он је представио основна два метода за посредно мерење оптерећења које је обешено о куку. Први метод се заснива на мерењу притисака у коморама хидроцилиндра, на основу којих се, путем израза који обухвата геометријске параметре стреле, израчунава тежина окаченог терета. Други начин је базиран на мерењу деформације стреле помоћу мерних трака. Погодним распоредом мерних трака, може се елиминисати деформација услед аксијалне силе и добити чисто савојну деформацију. Вредност оптерећења на врху стреле се добија путем израза који повезује ову деформацију са нападним оптерећењима пресека на локацији мерних трака и познатим геометријским параметрима стреле.

Поред примене у системима за ограничавање оптерећења, давачи (сензори) промене угла зглобно везаних сегмената, притиска у хидроцилиндрима, извучености унутрашњих телескопских сегмената и претварачи силе су обавезне компоненте у комплексним системима управљања средом ауто-дизалица, чија функционалност представља једну од најважнијих компаративних предности савремених комерцијалних решења. При пројектовању ових система, полазну основу чини динамика и инверзна кинематика манипулатора, где се као задатак поставља дефинисање параметара појединачних кинематских парова за задати положај врха стреле. Сегменти стреле и компоненте полужних механизма се посматрају као крута тела у циљу упрошћавања једначина [67].

Традиционални управљачки системи ауто-дизалица подразумевају да оператер директно врши управљање хидрауличким разводником преко командних полуга, што захтева висок степен обучености и вештине оператера, зато што сваки од хидрауличких погона, било да је у питању погон сегмената механизма или обртно кретање целе структуре, има сопствену управљачку полугу.

Актуелни технолошки императив на пољу управљања механизмима грађевинске и транспортне механизације је потпуна аутоматизација рада и даљинско управљање машинама, које омогућава потпуно безбедно манипулисање на тешко приступачним и опасним местима, с обзиром да оператер може бити удаљен од самог места на којем машина оперише. Развијени су интелигентни управљачки интерфејси,



базирани на брзим процесорима и бежичним преносом информација, којим се врши оптимизација постављеног задатка, генерисање управљачких параметара за електромагнетне хидрауличке вентиле и њихово преношење до хидрауличног разводника, преко којег се радни флуид усмерава на одређени хидраулички актуатор [68].

Sochacki [69] је истраживао динамичку стабилност лабораторијског модела телескопске ауто-дизалице. Математички модел је постављен применом *Hamilton*-овог принципа и добијене су једначине кретања и природни гранични услови. Као резултат математичког моделирања, дефинисане су криве зависности сопствених фреквенција при промени геометрије система. При томе, дошао је до закључка да, код свих случајева који су разматрани, за одређене услове геометрије и нападног оптерећења, постоји одређена дужина челичног ужета при којој цео систем може изгубити динамичку стабилност. Прецизније, за различите параметре система у погледу угла нагиба стреле и терета, дефинисане су неповољне комбинације дужине стреле и челичног ужета које доводе до губитка динамичке стабилности лабораторијског модела ауто-дизалице.

Мијаиловић и Шелмић [70] су анализирали утицај деформације радијално-аксијалног лежаја на месту везе доњег и горњег строја ауто-дизалице на динамичку стабилност ауто-дизалице, при чему је коришћен динамички модел са пет степени слободе кретања. За дефинисање диференцијалних једначина кретања примењене су *Lagrange*-ове једначине друге врсте. Резултати математичког моделирања су верификовани кроз нумерички пример при различитим радним операцијама ауто-дизалице.

Sağırli и др. [71,72] су изградили теоријски модел телескопске ауто-дизалице са просторном побудом користећи технику *Bond Graph*-ова. Модел обухвата телескопску стрелу и погонски систем. Нелинеарност система потиче од геометријске нелинеарности, жirosкопских сила, стишљивости хидрауличног уља и еластичности носеће структуре. Симулација обртног телескопског крана изведена је користећи експериментални стварни систем за добијање геометријских и динамичких параметара. У циљу поређења стварног система и модела и оцењивања тачности, разматрани су многи случајеви који одговарају различитим оперативним условима и радним оптерећењима. При томе, коришћени су импулсни, временски и статички одзиви у циљу одређивања параметара система као што су коефицијент пригушења, померања цилиндара и крутост телескопске стреле. На крају, упоређени су резултати импулног и статичког одзива модела са одзивима реалног система.

Geisler и Sochacki [73] су истраживали слободне осцилације структуре телескопске ауто-дизалице, где су сегменти моделирани као *Bernoulli-Euler*-ове греде а челична конструкција посматрана као крута. Проблем је описан користећи принцип *Hamilton*-а. Уз дефинисање граничних услова, добијена је фреквентна једначина и израчунате сопствене вредности.

Posiadala, Skalmierski и Tomski [74] су истраживали кинематику телескопске стреле за сва могућа померања која су наметнута системом управљања. Разматране су

промене дужине стреле, дужине ужета, угла нагиба стреле у вертикалној равни, као и угао обртања око вертикалне осе. При опису кинематике врха стреле са окаченим теретом, коришћени су правоугли координатни системи тако да су њихова релативна померања транслаторна, што је знатно упростило модел. Написане су једначине кретања терета, при чему је проблем почетних услова решен применом методе *Runge-Kutta*.

На динамичке перформансе манипулатора монтираних на вучно возило утиче флексибилност ослањања самих манипулатора, као и њихових вучних возила. Dubowsky и др. [75] су представили ефикасан метод за моделирање динамичког понашања у простору сагледавањем нелинеарних динамичких карактеристика. Расподељене масе и еластичности тела су описане методом коначних елемената.

Sochacki и Bold [76] су се бавили истраживањем попречних пригушених осцилација система за промену нагиба телескопске стреле ауто-дизалице, при чему су дефинисали модел погонског хидро-цилиндра. У усвојеном моделу, дисипација енергије осциловања потиче од унутрашњег пригушења вискозно-еластичног материјала греда којим се моделира систем. Фреквенција пригушених осцилација и степен опадања амплитуда су дефинисани моделом. Такође, приказане су промене карактеристичних вредности система са променом коефицијента пригушења и геометрије система а при различитим оптерећењима.

Разноврсни приступи у истраживањима везаним за динамику стрела ауто-дизалица, заједно са динамичким моделирањем индустријских робота, налазе своју ширу теоријску основу у општем домену динамике флексибилних манипулатора. Резултати и закључци теоријских истраживања многобројних научних публикација на пољу динамике флексибилних манипулатора представљају фундаменталну теоријску базу од које се полази при изучавању динамичког понашања одређене класе ових механизма, са израженим структурним и функционалним специфичностима. Потреба за бољим искоришћењем енергије и већом ефикасношћу је мотивисала употребу модерних материјала и метода производње, у циљу изградње флексибилних и лаких манипулатора [77]. Лаки манипулатори троше мање енергије при покретању и имају већи однос корисног терета према сопственој маси, као и већу маневарску способност. Међутим, услед динамичких ефеката структурне флексибилности, њихова контрола је знатно тежа. Због тога, потребно је изградити тачне динамичке моделе за пројектовање и управљање тим системима [78]. На пример, угиб и вибрације представљају озбиљан проблем за тачност и стабилност позиционирања код роботских манипулатора. Због тога је контрола флексибилних манипулатора постала кључно питање у роботизици [79]. Крутост флексибилног манипулатора одређује потребу за управљачким алгоритмом, док пригушење дефинише лакоћу са којом га можемо имплементирати [80].

Fukuda [81], Fukuda и Arakawa [82] су истраживали динамичке карактеристике дво-полужне флексибилне роботске руке и контролу вибрација, узимајући у обзир гравитацију, користан терет и спрегнуте вибрације између полууга. При томе,

разматране су искључиво савојне вибрације. Они су извели једначине кретања помоћу хомогених матрица трансформације, једначина *Euler*-ове греде при савијању, уз одговарајуће граничне услове и методу модалне анализе.

Ower и Vegte [83] су користили приступ *Lagrange*-ове динамике при моделирању раванског кретања манипулатора који се састоји од две еластичне полуге и два обртна зглоба. Једначине су линеаризоване и представљене преко матрице трансформационих функција. Такође, направљен је мулти-параметарски систем управљања коришћењем класичних метода.

Chen [84] је представио линеаризован динамички модел раванског вишечланог флексибилног манипулатора, који може имати произвољан број чланова. Еластична деформација сваког члана је моделирана користећи методу претпостављених модова. Флексибилни чланови су посматрани као *Euler-Bernoulli*-јеве греде, где су занемарени ефекти смицања и инерције обртног кретања. За постављање једначина кретања целог система је коришћен приступ *Lagrange*-а. Кретање сваког члана је посматрано као суперпозиција кретања члана као крутог тела и малих еластичних деформација.

Milford and Ashokanathan [85] су, на бази *Euler-Bernoulli*-јеве теорије греда, извели тачне парцијалне диференцијалне једначине које дефинишу сопствене облике осциловања општег двочланог флексибилног манипулатора, уз одговарајуће граничне услове у зглобу. Резултујућа парцијална диференцијална једначина, која је решена нумерички, даје тачне вредности сопствених фреквенција при произвољном углу код зглоба. Показало се да су вредности сопствених учестаности у великој мери зависне од конфигурације, при чему могу варирати и до 30% на целом опсегу кретања манипулатора.

Ата и др. [86] су спровели динамичку анализу дво-полужног флексибилног манипулатора који је изложен различитим почетним и граничним условима. Еластична померања за сваки члан су одређена користећи метод претпостављених облика осциловања. Потребни погонски момент манипулатора је добијен као решење инверзног динамичког проблема. Добијени резултати су показали да гранични услови имају значајан утицај на еластична померања и погонски момент.

Paradopoulos и Abu-Abed [87] су анализирали проблем преношења сила и момената код манипулатора и представили конструкцију манипулатора са три степена слободе и кинематском неодређеношћу, у циљу дефинисања кретања при којем би реакције биле елиминисане. Динамичке реактивне силе су елиминисане помоћу уравнотежења сила. Реактивни моменти су елиминисани дефинисањем трајекторија врха манипулатора при којима су они једнаки нули.

Coleman и McSweeney [88] су истраживали фреквентни спектар роботске руке са транслаторним померањима, при чему су модел изградили на основу *Euler-Bernoulli*-јеве теорије греда. Добијене су вредности сопствених учестаности при варирању вредности маса актуатора и корисног терета на врху манипулатора.

Choura и Yigit [89] су разматрали утицај покретног терета код двочланог манипулатора са једним крутим чланом. Истраживана је стабилност система за време померања терета дуж члана који је еластичан. Показано је да се допуштањем релативног кретања терета по флексибилном члану манипулатора постиже значајно смањење заосталих вибрација у поређењу са случајем када је терет фиксиран за врх манипулатора током извођења маневрисања.

Користећи *Euler-Lagrange*-ове једначине, Bahrami и Rahi [90] су изградили динамичку једначину кретања зглобног манипулатора са еластичним зглобовима и произвољним бројем чланова, који је изложен стохастичким померањима ослонца.

Значајан број радова у области динамике флексибилних манипулатора је заснован на методи коначних елемената [91-97].

Rosado и Yuhara [98] су разматрали динамички модел раванског флексибилног манипулатора са два зглоба и два еластична члана. Аксијалне деформације су занемарене, с обзиром да су код теоријског моделирања доминантна попречна померања услед савијања. Такође, пригушење у зглобовима није разматрано. Динамичке једначине су изведене на бази *Newton-Euler*-ове формулације и методи коначних елемената.

Поред приступа помоћу претпостављених модела осциловања и методе коначних елемената, у циљу добијања система са коначним бројем степени слободе, многи аутори су прибегли дискретизовању расподељених инерцијалних и еластичних својстава флексибилних манипулатора и реалне системе са дистрибуираним параметрима заменили моделима са концентрисаним параметрима [99-105].

### 3. Преглед типова ауто-дизалица и опште карактеристике конструкција зглобних стрела

#### 3.1 Типови ауто-дизалица

Општа карактеристика свих ауто-дизалица је да се састоје из основног вучног возила – камиона, задуженог за транспорт између локација утовара и истовара, и надградње у виду полужног механизма – стреле, која обавља манипулацију теретом, слика 3.1.



*Слика 3.1 Камион као вучно возило са монтираном зглобном стрелом за манипулисање теретом*

Према облику полужног манипулатора, ауто-дизалице могу бити са зглобном (слика 3.1) и телескопском стрелом, слика 3.2.

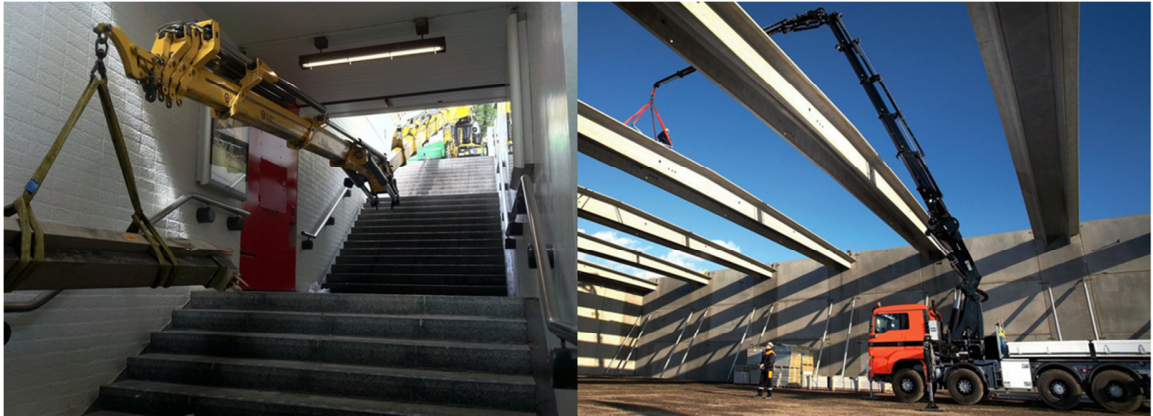
Ауто-дизалице са телескопском стрелом, у принципу, остварују веће носивости, дохвате и висине подизања (немачка компанија Liebherr држи рекорд од 1200 тона носивости и дужином стреле од 100 метара). Код ових дизалица имамо да се подизање и спуштање терета обавља посредством челичног ужета, које се намотава на добош, смештен на шасији камиона. Због гломазне конструкције и смањених маневарских могућности, оне се углавном употребљавају за манипулисање теретом на једном месту (утовар и истовар на друге камионе, монтажа, итд.), без могућности транспортовања терета на другу удаљену локацију.



*Слика 3.2 Ауто-дизалица са телескопском стрелом*

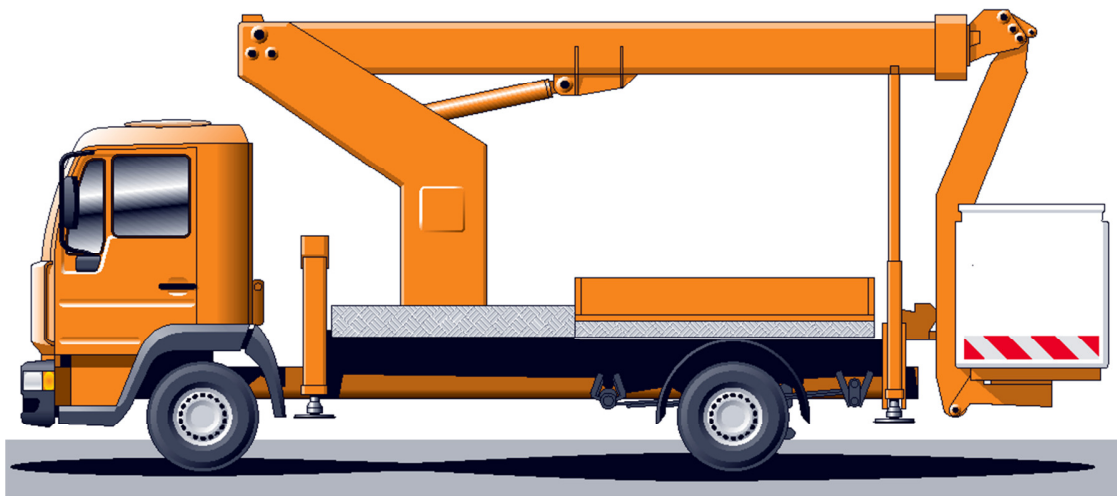
Код ауто-дизалица са зглобном стрелом не постоји челично уже и добош за његово намотавање, већ се комплетна манипулација теретом обавља у потпуности хидрауличким путем помоћу хидроцилиндара. Конструкција зглобне стреле и начин манипулисања асоцира на морфологију и функционисање руке код неких биолошких организама. Комбинацијом промене угла између зглобно спојених сегмената и извлачењем и увлачењем телескопске секције, добија се изузетна прилагодљивост манипулатора која може да одговори свим специфичним захтевима транспортних задатака у конкретним ситуацијама, слика 3.3.

У условима савремених градских средина, због конфигурације терена који се одликује ограниченим простором за маневар и постојањем великог броја разних препрека у виду уличне расвете, саобраћајних знакова, рекламних објеката, дрвећа, електричних, телефонских и других јавних инсталација, паркираних возила и многих других објеката, употреба ауто-дизалица са зглобним стрелама је незаменљива.



*Слика 3.3 Маневарска супериорност зглобних стрела ауто-дизалица у конкретним ситуацијама на терену*

Поред ауто-дизалица за транспорт и манипулацију терета разноврсних типова, облика и димензија, постоје и специјализовани типови за извођење специјализованих операција. На првом месту, у ову подгрупу улазе мобилне хидрауличне подизне платформе, слика 3.4, које на свом врху имају челичну, алуминијумску или композитну корпу, којима се оператери заједно са опремом подижу до неприступачних места у циљу обављања послова на одржавању објеката, разних инсталација, градског зеленила и сл.



*Слика 3.4 Мобилна хидраулична подизна платформа*

Специјалан вид ауто-дизалица представљају и ватрогасне хидрауличне платформе које уједно омогућавају евакуацију људи у акцидентним ситуацијама, слика 3.5.



*Слика 3.5 Ватрогасна платформа*

Такође, у групу специјализованих ауто-дизалица се могу сврстати и мобилне дизалице за доставу бетона на градилишта, слика 3.5.



*Слика 3.6 Камionsка пумпа за бетон*



### 3.2 Опште карактеристике конструкција зглобних стрела ауто-дизалица и основни радни параметри

Зглобна стрела ауто-дизалице представља сложен механичко-хидраулички систем, који се као целина монтажном надограђује на шасију непосредно иза кабине или на задњем крају вучног возила, слика 3.7.



Слика 3.7 Варијанте уградње зглобне стреле – испред и позади товарног простора

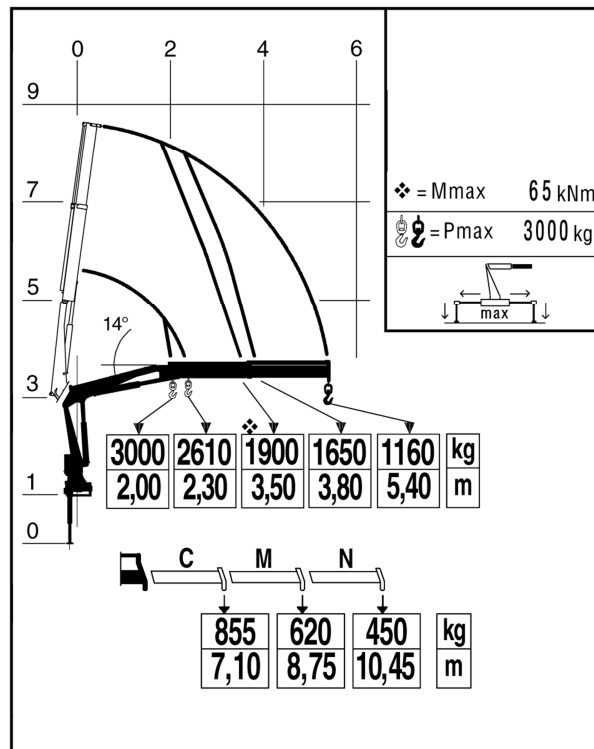
Типична структура подскопа зглобне стреле који се као целина уграђује на шасију возила приказана је на слици 3.8 (Fassi - Италија). Постоље или база (1) на коју је постављен полужни механизам се израђује ливењем и чврсто је спојено са кутијастим хоризонталним вођицама (2) кроз које се телескопски бочно извлаче кутијасте носачи (3) на чијим крајевима се налазе вертикални стабилизатори (хидроцилиндри) са стопама (4), којима се додатно обезбеђује стабилност против претурања у радном режиму дизалице. Обртање полужја око вертикалне осе је остварено посредством зупчастог споја у унутрашњости базе између зупчате летве, коју покреће пар хидроцилиндара једностраног дејства (5), и зупчаника који је чврсто спојен са стубом (6). Извлачењем хидроцилиндра (7) врши се промена угла између стуба (6) и унутрашње руке (8), који су повезани цилиндричним зглобом. Извлачењем хидроцилиндра (9) остварује се релативно кретање спољашње руке (10) у односу на унутрашњу руку (8). Хидроцилиндри (11) покрећу телескопске сегменте (12) који се извлаче један из другог а у потпуно увученом стању улазе у спољашњу руку. На крају последњег телескопског сегмента налази се вешајни склоп куке (13). Сви хидроцилиндри су водовима повезани у јединствен хидраулички систем, чији се резервоар (14) и разводник са командама (15) налазе на постољу структуре. Као опција, уграђује се и радио-пријемник у склопу са електро-хидрауличким разводником којим се остварује даљинско управљање појединим операцијама полужног механизма.



Слика 3.8 Елементи конструкције типичне зглобне стреле ауто-дизалице

Мерењем притиска у стабилизаторима, аутоматски се контролише момент подизања терета у условима ослањања дизалице.

Најважнији радни параметри једне ауто-дизалице су носивост, максимална висина дизања и хоризонтални дохват. Погодан начин приказивања ових величина је радни дијаграм или дијаграм носивости, приказан на слици 3-9. Са повећањем дохвата смањује се маса терета која се може подићи. Такође, даје се и вредност максималног момента терета у односу на централну осу обртања, који се ограничава посебним сигурносним системом против преоптерећења. Као опција, дата је носивост и дохват за додатне телескопске сегменте који немају хидраулични погон, већ се извлаче и увлаче ручно.



Слика 3.9 Дијаграм носивости зглобне стреле ауто-дизалице

Сва кретања полуга стреле ван граница поља коришћења (ван дозвољених положаја) спречена су електричним, хидрауличним или механичким уређајима, тако да је у великој мери избегнут штетан утицај непрописног руковања.

Управљање радом цилиндара за кретање полуга стреле и хидроцилиндара за обртање стреле се врши преко електрохидрауличних и електромагнетних разводника, што омогућава посредно, односно, даљинско управљање. Укључивање и искључивање ових разводника се врши успорено (постепено), а тиме се остварује успорено почетно и завршно кретање извршних органа, чиме се знатно смањују динамичка оптерећења конструкције.

За регулацију основне брзине кретања полуга стреле, користе се неповратно пригушни вентили, који регулишу брзину истицања уља из радних цилиндара.

Блокирајући вентили, који се, такође, уграђују до оптерећених комора извршних органа, имају улогу да зауставе (блокирају) кретање извршних органа у случају пуцања уљних водова и тиме осигурају подигнути терет од пада.

У радне цилиндре за извлачење стабилизатора су уграђени притисни прекидачи. Они онемогућавају рад с окретним делом структуре док нема одговарајућег притиска у оптерећеној комори радног цилиндра било којег стабилизатора, односно, док није извршена правилна стабилизација ауто-дизалице.

На основу свега наведеног, структура зглобних стрела се, генерално, може поделити на доњи подсклоп постоља са стабилизаторима и полужни механизам, при чему се сам полужни механизам може рашчланити на зглобни и телескопски део. Зглобни део полужног механизма обухвата стуб, унутрашњу и спољашњу руку заједно са хидроцилиндрима који остварују угловне промене између ових чланова. Стуб и унутрашња рука имају изразито променљив попречни пресек који је последица високих вредности локалних оптерећења у зглобовима и упоришним тачкама хидроцилиндара. Телескопски део обухвата сегменте константних попречних пресека, који врше релативно транслаторно кретање и њихове хидроцилиндре.

Сегменти полужног механизма стреле су израђени заваривањем од квалитетних ситнозрнастих нисколегираних челичних лимова и профила, са повишеном границом пластичности и повећаном отпорношћу према кртом лому и атмосферској корозији.

## **4. Примена методе коначних разлика у фреквентној анализи структура са дистрибуираним и променљивим параметрима**

### **4.1 Однос методе коначних разлика према аналитичком приступу и методи коначних елемената**

Једна од кључних структурних карактеристика зглобног дела полужја зглобних стрела ауто-дизалица је њихов изразито променљив попречни пресек. Захваљујући зглобној вези и деловању хидроцилиндара у упоришним тачкама, имамо веома променљиву дистрибуцију оптерећења дуж сегмената. Са друге стране, захтев који се ставља пред пројектанта ових манипулатора у погледу склапања целог полужног механизма у веома ограничени простор приликом стављања у транспортни положај, додатно доприноси коначном облику овог дела стреле. Као трећи фактор који утиче на дизајн јесу и технолошка ограничења при фабриковању сегмената. На крају, на обликовање полуга утичу и путање хидрауличних водова, који се могу наћи са спољашње али и унутрашње стране. Дакле, као последицу наведених ограничења и фактора имамо глобалне промене попречних пресека дуж тежишних линија сегмената у виду постепених промена димензија елемената пресека и локалне скоковите промене кроз повећање дебљине лимова, ојачања на местима упоришних тачака хидроцилиндара и у зглобовима.

Континуиране и локалне промене попречног пресека носача повлаче комплексну расподелу савојне крутости и подужне масе, што доводи до дилеме у избору приступа код моделирања статичког и динамичког понашања структуре.

Чисто аналитички приступ је идеал коме се увек тежи, с обзиром да се добијају аналитичке зависности између динамичких карактеристика и структурних параметера и тиме најбоља контрола динамичког понашања структуре још у фази конципирања решења конструкције. Међутим, он је применљив код носача са константним попречним пресецима, што значи да би се постојећи реални носач морао заменити апроксимативним једноставнијим моделом, уз осредњавање попречних пресека, чиме се ризикује тачност резултата због грубих одступања која би морала да уследе. Поред овога, узимање у разматрање крутости и масе као расподељених параметара може додатно компликовати прорачун. Дискретизацијом

масе, прорачун би се поједноставио али уз неминовно додатно удаљавање од реалне структуре.

На другој страни имамо чисто нумерички приступ, нпр. методом коначних елемената, којом се могу обухватити и најмање промене и неправилности структуре, те се резултати могу узети као тачни. Дискретизацијом запремине структуре довољно фином мрежом коначних елемената могу се обухватити утицаји и најмањих конструктивних детаља као што су разна локална ојачања у виду ребара, преклопних заварених лимова, отвора за осовинице, и сл. Захваљујући моћним рачунарским процесорима, велики број генерисаних једначина се релативно брзо решава. Међутим, недостатак овог приступа је у томе што његова примена добија пун ефекат тек у завршној фази пројектовања, односно, када је структура потпуно дефинисана до детаља. Дакле, овим приступом би могли да добијемо прецизне параметре динамичког понашања али тек за готов производ. Намера да се добију потребне зависности динамичких параметара од геометријских карактеристика структуре би повлачиле генерисање мноштва коначно-елементних модела и њихово процесирање, што је веома дуг и комплексан посао.

Метода коначних разлика, која је по својој суштини нумерички поступак, при решавању поменуте проблематике, представља средњи пут између аналитичког и чисто нумеричког приступа. Обухватајући делове аналитичког и нумеричког приступа, она прави ефикасан а довољно поуздан и прецизан компромис при решавању проблема фреквентне анализе реалних конструкција.

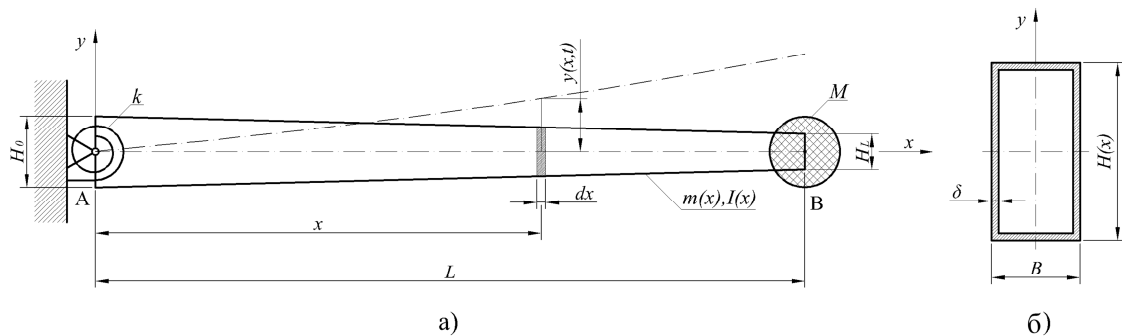
На конкретном примеру савојних осцилација еластично ослоњене конзоле променљивог попречног пресека са концентрисаном масом на врху, изложен је детаљан поступак примене методе коначних разлика код одређивања зависности природних учестаности од конструкционих параметара. Тачност резултата је проверена и потврђена поређењем са резултатима добијеним методом коначних елемената.

## 4.2 Опис модела и полазна једначина

Поступак примене методе коначних разлика у динамици структура са дистрибуираним и променљивим параметрима биће показан на примеру фреквентне анализе модела еластично ослоњеног конзолног носача променљивог попречног пресека са концентрисаном масом на врху, чији су конструкциони параметри приказани на слици 4.1. Разматрају се слободне савојне осцилације у равни симетрије  $xu$ .

Природа ослонца је таква да су онемогућена померања у попречном и подужном правцу, при чему се дозвољава извесно почетно угаоно деформисање – нагиб, што је представљено флексионом опругом константне крутости  $k$ . На слободном крају конзоле се налази чврсто везана концентрисана маса  $M$ .

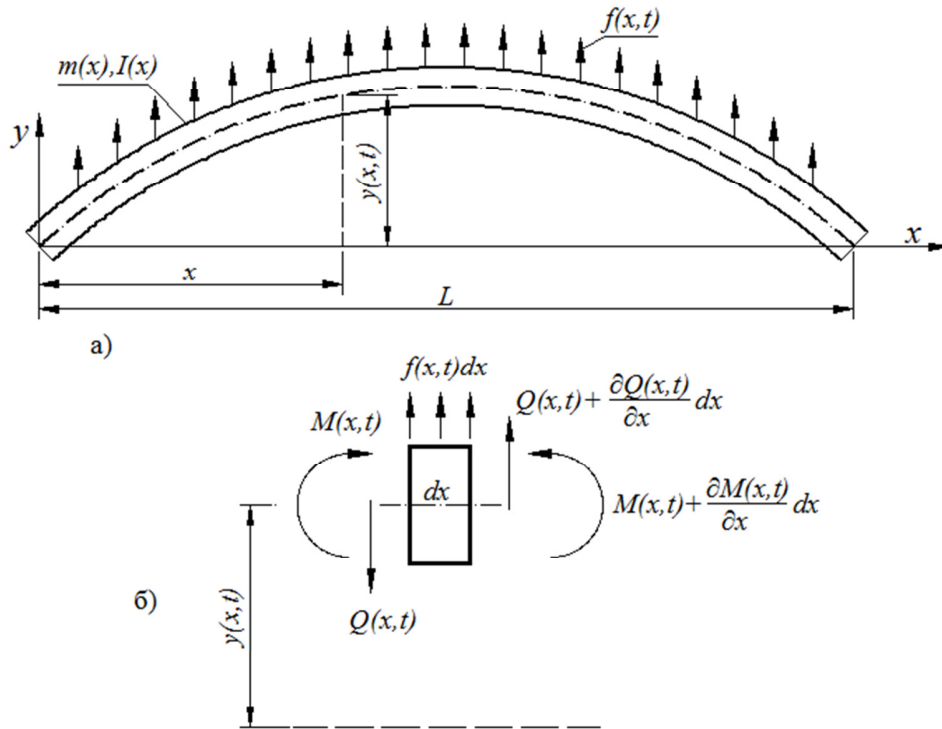
Попречни пресек носача је у облику правоугаоног танкозидног профила константне ширине  $B$  дуж тежишне линије и подједнаке дебљине свих зидова  $\delta$ , при чему његова висина  $H(x)$  линеарно опада идући ка слободном крају. Као последицу, имамо да су подужна маса носача, односно, маса по јединици дужине,  $m(x)$  и савојна крутост  $EI(x)$  променљиви по дужини носача  $L$ , где  $E$  представља *Young*-ов модул еластичности а  $I(x)$  аксијални момент инерције попречног пресека за осу која је нормална на  $x$  и  $y$  а пролази кроз тежиште. Висина попречног пресека у ослонцу ( $x=0$ ) је означена са  $H_0$ , док је висина попречног пресека на слободном крају ( $x=L$ ) означена као  $H_L$ .



Слика 4.1 а) еластично ослоњен конзолни носач променљивог попречног пресека са концентрисаном масом на врху б) попречни пресек носача

Полази се од елементарне теорије о савојним осцилацијама греда, познате као *Euler-Bernoulli*-јева теорија, која се базира на претпоставци да је угаоно померање елементарног делића занемарљиво у односу на транслаторно и да се утицај смицања може занемарити према утицају савијања.

На слици 4.2 приказана је греда са расподељеном крутошћу и масом при слободним савојним осцилацијама и елементарни делић са пресечним величинама.



Слика 4.2 а) греда при савојним осцилацијама б) елементарни делић греде са позитивним смеровима пресечних величина

Према усвојеној знаковној конвенцији, приказани смерови момената савијања и трансверзалних сила са обе стране елементарног делића, у даљем излагању, биће сматрани као позитивни.

Парцијална диференцијална једначина кретања код слободних непригушених осцилација греда код савијања, према *Euler-Bernoulli*-јевој теорији, је опште позната и гласи [106]

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.1)$$

После диференцирања, једначина (4.1) добија развијенији облик

$$-E \left[ \frac{d^2 I(x)}{dx^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + 2 \frac{dI(x)}{dx} \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} + I(x) \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

Слободне осцилације су хармонијске, па се попречна померања носача могу написати у познатом облику

$$y(x,t) = CY(x) \cos(\omega t - \varphi), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.3)$$



где је  $C$  амплитуда,  $Y(x)$  представља сопствени облик осциловања или мод осциловања,  $\omega$  је кружна природна учестаност а  $\varphi$  фазни угао. Убацавањем једначине (4.3) у једначину (4.2) дељењем обе стране са  $C\cos(\omega t - \varphi)$ , добија се карактеристичан проблем за савијање *Euler-Bernoulli*-јеве греде променљивог пресека у диференцијалном облику

$$E \left[ \frac{d^2 I(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + 2 \frac{dI(x)}{dx} \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} + I(x) \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} \right] = m(x) \omega^2 Y(x) \quad (4.4)$$

На овом месту треба напоменути да изабрани пример носача са датим карактеристикама не уводи било каква ограничења која се тичу применљивости поступка, који је валидан за било какав облик попречног пресека и начин његове варијације дуж тежишне линије.

У овом случају, висина правоугаоног танкозидног профила у произвољном пресеку на месту елементарног делића се може изразити као

$$H(x) = H_0 - \eta x \quad (4.5)$$

где је:

$\eta = (H_0 - H_L) / L = H_L (\psi - 1) / L$  - бездимензиони декремент висине попречног пресека,  
 $\psi = H_0 / H_L$  - бездимензиони коефицијент нагиба контуре носача.

Сходно томе, површина попречног пресека се може формулисати у облику

$$A(x) = BH(x) - (B - 2\delta) [H(x) - 2\delta] = 2\delta(H_0 - \eta x + B - 2\delta) \quad (4.6)$$

Маса носача по јединици дужине се може написати као

$$m(x) = 2\rho\delta(H_0 - \eta x + B - 2\delta) \quad (4.7)$$

где је  $\rho$  специфична маса материјала носача.

Занемарујући мале величине вишег реда, може се написати апроксимативни израз за аксијални момент инерције попречног пресека у форми

$$I(x) \approx \frac{\delta}{6} \left[ (H_0 - \eta x - 2\delta)^3 + 3B(H_0 - \eta x - \delta)^2 \right] \quad (4.8)$$

Након дефинисања потребних извода на бази претходне једначине и њиховим убацавањем заједно са једначином (4.7) у једначину (4.4), добија се потупно развијен облик полазне диференцијалне једначине еластичне линије датог носача у следећем облику

$$\begin{aligned} & \left[ (H_0 - \eta x - 2\delta)^3 + 3B(H_0 - \eta x - \delta)^2 \right] \frac{d^4 Y}{dx^4} - \\ & - 6\eta \left[ (H_0 - \eta x - 2\delta)^2 + 2B(H_0 - \eta x - \delta) \right] \frac{d^3 Y}{dx^3} + \\ & + 6\eta^2 (H_0 + B - \eta x - 2\delta) \frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{12\rho\omega^2}{E} (H_0 + B - \eta x - 2\delta) Y = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

### 4.3 Гранични услови у диференцијалном облику

Решење  $Y(x)$  диференцијалне једначине еластичне линије (4.9), које представља сопствени облик осциловања, мора да задовољи по два гранична услова на оба краја носача. У циљу дефинисања једначина ових граничних услова у односу на функцију померања, уведе се функционалне зависности момената савијања  $M(x,t)$  и трансверзалне силе  $Q(x,t)$  од функције померања  $y(x,t)$ , које су познате из области отпорности материјала

$$\begin{aligned} M(x,t) &= EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \\ Q(x,t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

На ослоњеном крају, функција померања  $y(x,t)$  има вредност нула за све време кретања, док нагиб еластичне линије произилази из односа између момента савијања и крутости ослонца, односно, крутости флексионе опруге

$$y(0,t) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{M(x,t)}{k} = \frac{E}{k} I(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, x=0 \quad (4.12)$$

Претпостављајући да је обртни момент инерције концентрисане масе  $M$  око осе нормалне на  $x$  и у занемарљив, друга два гранична услова за слобдан крај конзоле гласе

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0, x=L \quad (4.13)$$

$$Q(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = -M \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, x=L \quad (4.14)$$

Наведени гранични услови, написани преко функције еластичне линије  $Y(x)$  и њених извода, имају облик

$$Y(0) = 0 \quad (4.15)$$

$$Y'(0) = \frac{EI_0}{k} Y''(0) \quad (4.16)$$

$$Y''(L) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{dI(L)}{dx} Y''(L) + I(L) Y'''(L) + \frac{M \omega^2}{E} Y(L) = 0 \quad (4.18)$$

где је:

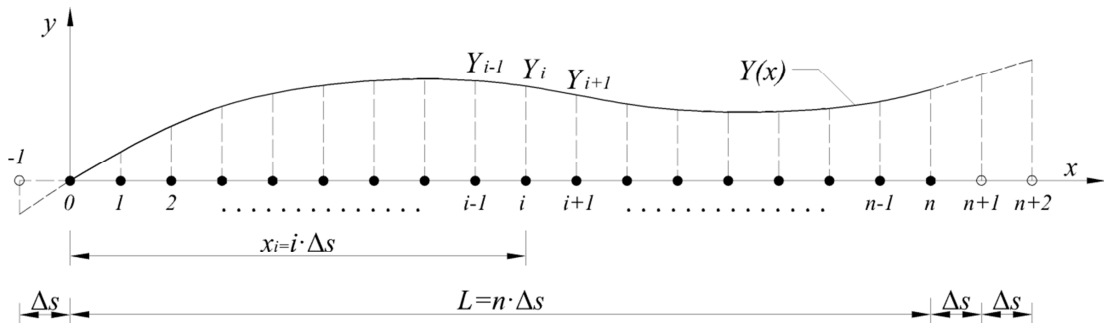
$I_0 = I(x=0)$  - момент инерције попречног пресека у ослонцу,

$I_L = I(x=l)$  - момент инерције попречног пресека у на слободном крају.

## 4.4 Дискретизација граничног проблема помоћу централних коначних разлика

### 4.4.1 Шема дискретизације носача

На слици 4.3 приказана је шема дискретизације дужине конзоле помоћу централних коначних разлика. Дужина носача  $L$  је издељена помоћу  $n+1$  чворних тачака на  $n$  сегмената једнаких дужина  $\Delta s = L/n$ .



Слика 4.3 Шема чворних тачака дуж носача при дискретизацији граничног проблема методом централних коначних разлика

Апроксимације на бази централних коначних разлика за изводе функције облика осциловања  $Y(x)$  у чвору  $i$  гласе

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = Y_i' \approx \frac{-Y_{i-1} + Y_{i+1}}{2\Delta s} \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_i = Y_i'' \approx \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{(\Delta s)^2} \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_i = Y_i''' \approx \frac{-Y_{i-2} + 2Y_{i-1} - 2Y_{i+1} + Y_{i+2}}{2(\Delta s)^3} \quad (4.21)$$

$$\left(\frac{d^4Y}{dx^4}\right)_i = Y_i^{IV} \approx \frac{Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}}{(\Delta s)^4} \quad (4.22)$$

С обзиром да је диференцијална једначина еластичне линије четвртог реда, њен дискретизован облик за произвољан чвор, осим померања номиналног чвора, обухвата и померања по два суседна чвора са сваке стране. Ако чвор у ослонцу, у тачки  $A$ , носи “нулти” редни број и ако се прва дискретизована једначина испишује за чвор број  $l$ , у једначини ће фигурирати померање непостојећег чвора са леве стране. Истовремено, на слободном крају конзоле, имаћемо померања два непостојећа чвора са десне стране.

#### 4.4.2 Дискретизација диференцијалне једначине еластичне линије

Замењујући апроксимативне изразе за изводе функције еластичне линије (4.19-4.22), који су добијени дискретизацијом централним коначним разликама, у диференцијалну једначину (4.9) и уз дискретизацију подужне координате  $x=i\Delta s$ , добија се систем једначина

$$\begin{aligned}
 & 2E\left[(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta)^3 + 3B(H_0 - \eta i \Delta s - \delta)^2\right](Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) - \\
 & -6\eta\Delta s E\left[(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta)^2 + 2B(H_0 - \eta i \Delta s - \delta)\right](-Y_{i-2} + 2Y_{i-1} - 2Y_{i+1} + Y_{i+2}) + \\
 & +12\eta^2(\Delta s)^2 E(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta + B)(Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}) - \\
 & -24\rho\omega^2(\Delta s)^4(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta + B)Y_i = 0; \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Н тај начин, проблем фреквентне анализе се из диференцијалног домена пребацује на алгебарски. Формулација (4.23) представља систем од  $n$  линеарних алгебарских једначина у којима се као непознате појављују дискретне вредности померања чворова, које формирају сопствене облике осциловања.

Уводећи изразе

$$\begin{aligned}
 P_i &= 2E\left[(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta)^3 + 3B(H_0 - \eta i \Delta s - \delta)^2\right] \\
 Q_i &= 6\eta\Delta s E\left[(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta)^2 + 2B(H_0 - \eta i \Delta s - \delta)\right] \\
 R_i &= 12\eta^2(\Delta s)^2 E(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta + B) \\
 S_i &= 24\rho(H_0 - \eta i \Delta s - 2\delta + B)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

и параметар  $\lambda = \omega^2(\Delta s)^4$ , који представља карактеристичну вредност, систем једначина (4.23) се може написати у кондезованом облику

$$\begin{aligned}
 & (P_i + Q_i)Y_{i-2} - (4P_i + 2Q_i - R_i)Y_{i-1} + (6P_i - 2R_i - \lambda S_i)Y_i - \\
 & -(4P_i - 2Q_i - R_i)Y_{i+1} + (P_i - Q_i)Y_{i+2} = 0; \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Фиктивна померања  $Y_{-1}$ ,  $Y_{n+1}$  и  $Y_{n+2}$  која ће фигурирати у једначинама написаним за чворове  $i=1$  и  $i=n$ , која одговарају фиктивним чворовима додатим на слици 4.3, биће елиминисани, тј., изражени у функцији померања реалних чворова, увођењем дискретизованих граничних услова.

### 4.4.3 Дискретизација граничних услова

Замењујући апроксимативне изразе за изводе функције еластичне линије (4.19-4.22), који су добијени дискретизацијом централним коначним разликама, у диференцијалне облике граничних услова (4.9), фиктивна померања се изражавају преко померања реалних чворова на границама. Ове зависности омогућавају елиминацију фиктивних померања из система једначина.

Дискретизовани облици граничних услова имају облик

$$Y_0 = 0 \quad (4.26)$$

$$Y_{-1} = -\frac{2EI_0 - k\Delta s}{2EI_0 + k\Delta s} Y_1 \quad (4.27)$$

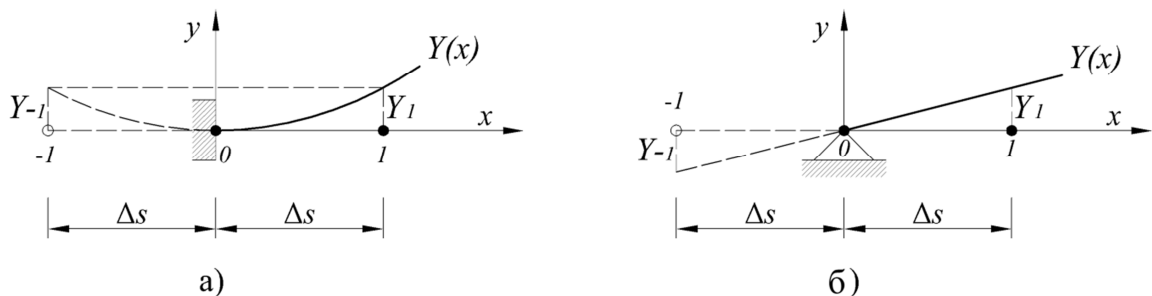
$$Y_{n+1} = 2Y_n - Y_{n-1} \quad (4.28)$$

$$Y_{n+2} = Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + \left[ 4 - \frac{2\omega^2 (\Delta s)^3 M}{EI_L} \right] Y_n \quad (4.29)$$

Анализом једначине граничног услова (4.27) може се сагледати природа еластичног ослоња на левом крају, односно, облик еластичне линије око ослоња у функцији крутости опруге  $k$ .

Размотриће се два екстремна случаја, када је у питању укљештење и када имамо зглобно ослањање.

Код укљештења имамо да крутост опруге тежи бесконачној вредности  $k \rightarrow \infty$ , пас се једначина (4.27) своди на  $Y_{-1} = Y_1$ , што значи да функција еластичне линије  $Y(x)$  при сопствеом облику осциловања има локални екстрем у чвору  $i=0$ , тј.  $dY/dx=0$ . Насупрот томе, ако је у питању зглобно ослањање, односно за  $k \rightarrow 0$ , имамо да је  $Y_{-1} = -Y_1$ . Слика 4.4 представља графичку интерпретацију ова два екстремна случаја ослањања. У реалности, параметар  $k$  узима вредности негде унутар поменутих екстрема.



Слика 4.4 Облик функције померања код ослоња а)  $k \rightarrow \infty$  б)  $k \rightarrow 0$

#### 4.4.4 Карактеристична једначина

Након конверзије конститутивних диференцијалних једначина за глобални облик осциловања и локалне граничне услове кроз процес дискретизације централним коначним разликама, њиховим комбиновањем се формулише гранични проблем у алгебарском облику. Прецизније речено, уврштавањем дискретизованих граничних услова (4.26-4.29) у систем (4.25) елиминишу се фиктивна померања  $Y_{-1}$ ,  $Y_{n+1}$  и  $Y_{n+2}$ , што коначно доводи до система од  $n$  алгебарских једначина са померањима реалних чворова структуре  $Y_i$ ,  $i=1, \dots, n$  као непознатама и параметром  $\lambda$  који представља карактеристичну вредност система.

Дискретизовани гранични услови имају утицај на формирање дискретизованих једначина еластичне линије само за прва два и последња два чвора, док за све остале чворове облик дискретизоване једначине остаје непромењен, тј. идентичан изразу (4.25).

После сређивања израза, добија се гранични проблем у виду система линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned}
 i = 1 & \rightarrow \left[ 6P_1 - 2R_1 - \lambda S_1 - \frac{2EI_0 - k\Delta s}{2EI_0 + k\Delta s} (P_1 + Q_1) \right] Y_1 - (4P_1 - 2Q_1 - R_1)Y_2 + (P_1 - Q_1)Y_3 = 0 \\
 i = 2 & \rightarrow -(4P_2 + 2Q_2 - R_2)Y_1 + (6P_2 - 2R_2 - \lambda S_2)Y_2 - (4P_2 - 2Q_2 - R_2)Y_3 + (P_2 - Q_2)Y_4 = 0 \\
 i = 3 \div n - 2 & \rightarrow \begin{aligned} & (P_i + Q_i)Y_{i-2} - (4P_i + 2Q_i - R_i)Y_{i-1} + (6P_i - 2R_i - \lambda S_i)Y_i - \\ & -(4P_i - 2Q_i - R_i)Y_{i+1} + (P_i - Q_i)Y_{i+2} = 0 \end{aligned} \tag{4.30} \\
 i = n - 1 & \rightarrow \begin{aligned} & (P_{n-1} + Q_{n-1})Y_{n-3} - (4P_{n-1} + 2Q_{n-1} - R_{n-1})Y_{n-2} + (5P_{n-1} - 2R_{n-1} - \lambda S_{n-1} + Q_{n-1})Y_{n-1} - \\ & -(2P_{n-1} - R_{n-1})Y_n = 0 \end{aligned} \\
 i = n & \rightarrow 2P_n Y_{n-2} - 4P_n Y_{n-1} + \left[ 2\left(1 - \frac{M\lambda}{\Delta s EI_L}\right)P_n - \lambda S_n + \frac{2M\lambda}{\Delta s EI_L} Q_n \right] Y_n = 0
 \end{aligned}$$

У циљу добијања компактнијег записа уводе се следеће ознаке

$$T = \frac{2EI_0 - k\Delta s}{2EI_0 + k\Delta s} \tag{4.31}$$

$$J = \frac{2M}{\Delta s EI_L} (P_n - Q_n) \tag{4.32}$$

Након замене уведених израза и систем једначина (4.30) добија нов прегледнији облик

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_1} \{ [6P_1 - 2R_1 - T(P_1 + Q_1)]Y_1 - (4P_1 - 2Q_1 - R_1)Y_2 + (P_1 - Q_1)Y_3 \} &= \lambda Y_1 \\ \frac{1}{S_2} \{ -(4P_2 + 2Q_2 - R_2)Y_1 + 2(3P_2 - R_2)Y_2 - (4P_2 - 2Q_2 - R_2)Y_3 + (P_2 - Q_2)Y_4 \} &= \lambda Y_2 \\ \frac{1}{S_i} \{ (P_i + Q_i)Y_{i-2} - (4P_i + 2Q_i - R_i)Y_{i-1} + 2(3P_i - R_i)Y_i - (4P_i - 2Q_i - R_i)Y_{i+1} + (P_i - Q_i)Y_{i+2} \} &= \lambda Y_i \quad (4.33) \\ \frac{1}{S_{n-1}} \{ (P_{n-1} + Q_{n-1})Y_{n-3} - (4P_{n-1} + 2Q_{n-1} - R_{n-1})Y_{n-2} + (5P_{n-1} - 2R_{n-1} + Q_{n-1})Y_{n-1} - (2P_{n-1} - R_{n-1})Y_n \} &= \lambda Y_{n-1} \\ \frac{1}{S_n + J} (2P_n Y_{n-2} - 4P_n Y_{n-1} + 2P_n Y_n) &= \lambda Y_n \end{aligned}$$

Претходна форма је погодна за формулисање граничног проблема у облику матричне једначине

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y} \quad (4.34)$$

тј.

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{Y} = 0 \quad (4.35)$$

где је  $\mathbf{A}$  квази-дијагонална матрица,  $\mathbf{I}_n$  је јединична матрица реда  $n$ ,  $\lambda$  је сопствена или карактеристична вредност и  $\mathbf{Y}$  матрица - колона померања чворова која формирају сопствене облике осциловања. Нетривијална решења постоје ако и само ако је детерминанта система једнака нули, што коначно доводи до карактеристичне једначине

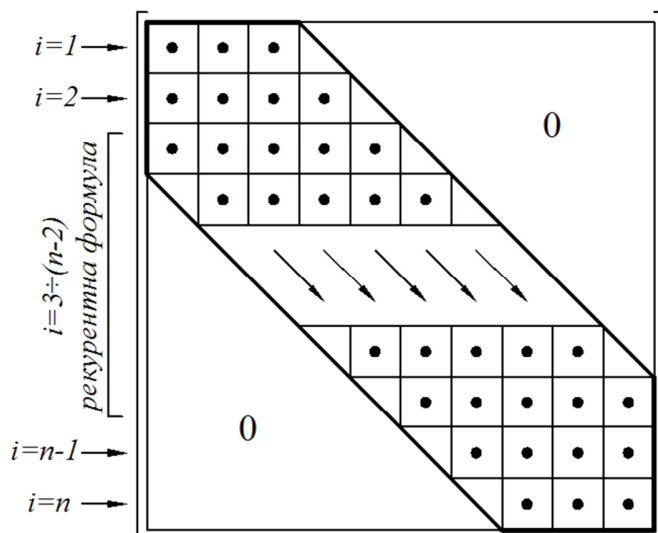
$$\Delta(\lambda) = \det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n] = 0 \quad (4.36)$$

Налазећи коренове  $\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, n$  карактеристичне једначине (4.36), добијамо сопствене кружне учестаности, односно, сопствене фреквенције

$$\omega_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{(\Delta s)^2} = \frac{n^2 \sqrt{\lambda_i}}{L^2}, i = 1, \dots, n \quad (4.37)$$

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, i = 1, \dots, n.$$

Треба нагласити да је кључни задатак при извођењу карактеристичне једначине (4.36) дефинисање матрице  $\mathbf{A}$ , чија је шема елемената презентована на слици 4.5.



Слика 4.5 Шема попуњавања матрице  $A$

То је квази-дијагонална матрица, при чему гранични услови утичу само на прве две и последње две врсте. Све остале врсте се састоје из пет елемената који су дефинисани рекурентном формулом из система (4.33), написаном за чворове  $i=3\div n-2$ . Погодност да се померања свих унутрашњих чворова структуре, на које дискретизовани гранични услови немају утицаја, без обзира на корак дискретизације  $\Delta s$ , описују једном дискретизованом једначином, при чему се само мења редни број номиналног чвора, кључна је за ефикасно решавање проблема фреквентне анализе помоћу софтверских рутина.



## 4.5 Нумерички пример и компарација са моделом на бази коначних елемената

У циљу испитивања тачности претходно описаног приступа методом коначних разлика, спроведен и су прорачуни кроз нумерички пример са следећим параметрима:  $L=3m$ ,  $H_L=0.1m$ ,  $\Psi=2.0$ ,  $B=0.1m$ ,  $\delta=0.005m$ ,  $\rho=7850kg/m^3$ ,  $E=2.1 \cdot 10^{11}N/m^2$ .

Дужина носача је дискретизована са  $n=100$  чворних тачака. С обзиром да је погодније и сврсисходније анализирати резултате користећи бездимензионалне односе конструктивних параметара него варирању појединачно сваког од њих, на овом месту има смисла увести следеће бездимензионалне односе крутости и масе

$$q = \frac{kL}{EI_0} \quad (4.38)$$

и

$$r = \frac{M}{m} \quad (4.39)$$

при чему  $m = \delta\rho L[(1+\psi)H_L + 2B - 4\delta]$  представља укупну сопствену масу носача. Дакле, имамо бездимензиони параметар  $q$  као однос крутости ослонца и самог носача у почетној тачки и бездимензиони параметар  $r$  као однос концентрисане масе и масе самог носача.

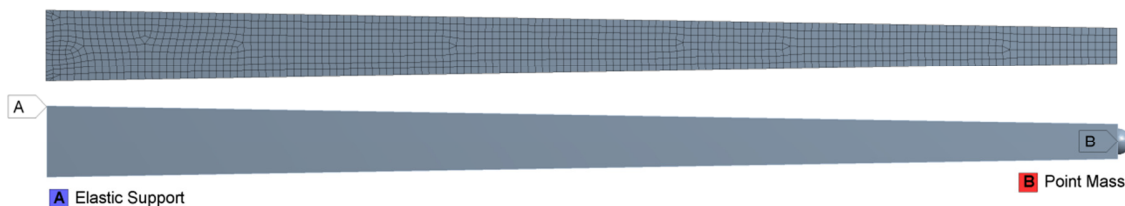
Сходно наведеном, изрази (4.31-4.32), изведени из граничних услова сада постају

$$T = \frac{2n - q}{2n + q} \quad (4.40)$$

и

$$J = \frac{2rm}{\Delta s EI_L} (P_n - Q_n) \quad (4.41)$$

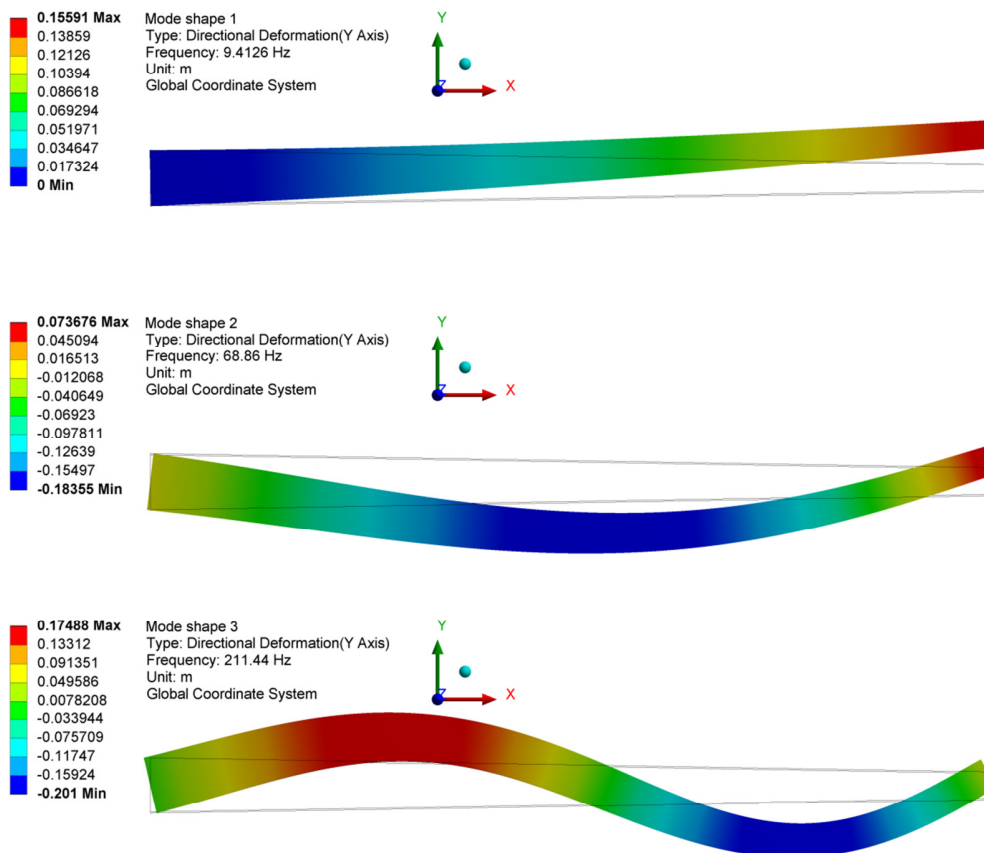
Нумерички прорачуни на бази методе коначних разлика су извршени помоћу написаног кода у оквиру софтверског пакета MATLAB. Упоредо са тим, креиран је коначно-елементни модел у програмском пакету ANSYS у циљу верификације добијених вредности. Тродимензионални модел конзоле променљивог попречног пресека је дискретизован аутоматском мрежом од 28335 чворова и 4794 шестостраних призматичних запреминских коначних елемената. Гранични услови су унешени кроз еластичност ослонца и додељену концентрисану масу на слободном крају, слика 4.6.



Слика 4.6 Густина мреже и гранични услови коначно елементног модела

Нумеричко испитивање је урађено на начин да је вредност бездимензионалног коефицијента крутости континуирано повећавана, док је масени бездимензиони коефицијент узимао дискретне вредности  $r=0.5;1.0;1.5;2.0$  за сваку појединачну вредност односа крутости.

Слика 4.7 показује прва три сопствена облика осциловања и одговарајуће сопствене учестаности за случај када бездимензионални коефицијенти крутости и масе узму вредности  $q=3.0$  и  $r=0.5$ , респективно. Вредности сопствених фреквенција добијене из коначно-елементног модела из програма ANSYS представљају број циклуса у секунди, па су множене са  $2\pi$  и добијене су природне кружне учестаности које су упоређиване са резултатима из модела са коначним разликама.



Слика 4.7 Природни облици осциловања и фреквенције из ANSYS-a за  $q=3.0$  и  $r=0.5$

Сprovedен је велики број тестова и табела 4.1 приказује резултате за прве три кружне учестаности из оба модела са одговарајућим релативним одступањима (колоне  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ).

Табела 4.1 Упоредни приказ добијених резултата са релативним одступањима

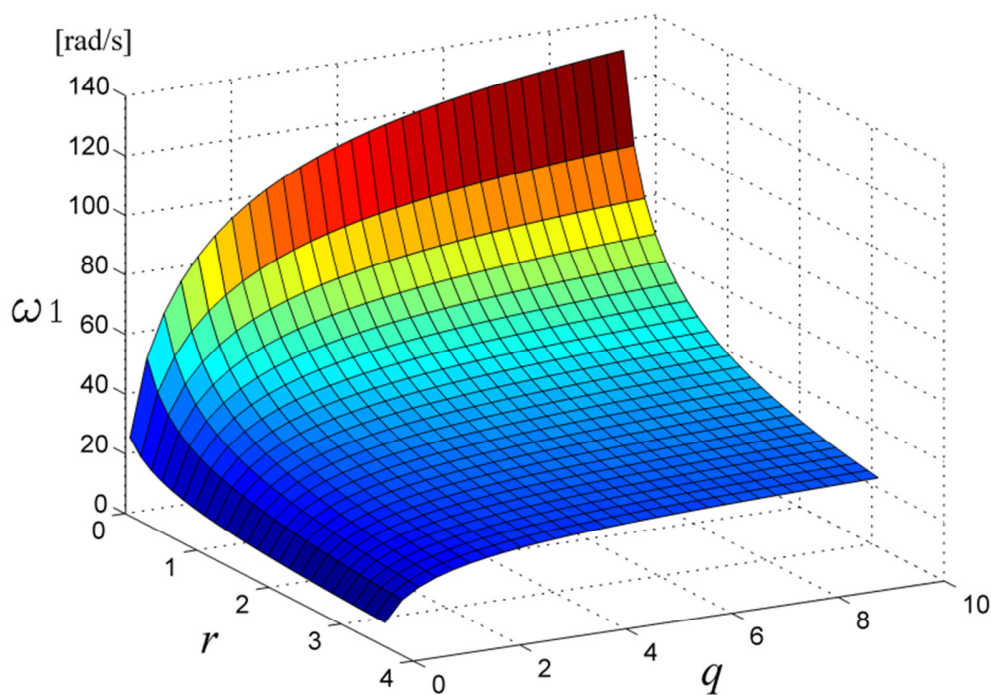
$q$	$r$	$\omega_1[\text{rad/s}]$			$\omega_2[\text{rad/s}]$			$\omega_3[\text{rad/s}]$		
		FDM	FEM	$\Delta_1$	FDM	FEM	$\Delta_2$	FDM	FEM	$\Delta_3$
0.25	0.50	24.39	24.38	0.05%	367.67	364.12	0.97%	1299.50	1253.87	3.64%
	1.00	19.07	19.06	0.04%	347.28	343.99	0.96%	1278.50	1233.83	3.62%
	1.50	16.17	16.17	0.04%	339.32	336.13	0.95%	1270.90	1226.60	3.61%
	2.00	14.30	14.29	0.04%	335.08	331.93	0.95%	1267.00	1222.90	3.61%
0.50	0.50	32.99	32.97	0.06%	377.20	373.39	1.02%	1309.00	1262.42	3.69%
	1.00	25.72	25.70	0.06%	357.19	353.65	1.00%	1288.00	1242.44	3.67%
	1.50	21.79	21.78	0.06%	349.41	345.96	1.00%	1280.50	1235.27	3.66%
	2.00	19.24	19.23	0.06%	345.28	341.88	0.99%	1276.60	1231.57	3.66%
1.00	0.50	43.11	43.08	0.08%	393.78	389.48	1.10%	1326.60	1278.31	3.78%
	1.00	33.46	33.44	0.08%	374.30	370.28	1.08%	1305.80	1258.46	3.76%
	1.50	28.30	28.28	0.08%	366.77	362.87	1.08%	1298.30	1251.36	3.75%
	2.00	24.97	24.95	0.08%	362.79	358.93	1.07%	1294.50	1247.71	3.75%
1.50	0.50	49.30	49.26	0.10%	407.68	402.94	1.18%	1342.70	1292.70	3.87%
	1.00	38.15	38.11	0.10%	388.54	384.10	1.16%	1322.00	1272.97	3.85%
	1.50	32.22	32.19	0.09%	381.19	376.85	1.15%	1314.60	1265.87	3.85%
	2.00	28.41	28.38	0.09%	377.29	373.01	1.15%	1310.70	1262.23	3.84%
2.00	0.50	53.59	53.53	0.11%	419.51	414.36	1.24%	1357.30	1305.77	3.95%
	1.00	41.37	41.33	0.11%	400.59	395.75	1.22%	1336.70	1286.11	3.93%
	1.50	34.91	34.87	0.11%	393.34	388.62	1.22%	1329.30	1279.07	3.93%
	2.00	30.76	30.73	0.10%	389.51	384.85	1.21%	1325.50	1275.49	3.92%
3.00	0.50	59.22	59.14	0.13%	438.53	432.66	1.36%	1383.10	1328.52	4.11%
	1.00	45.57	45.52	0.12%	419.84	414.31	1.33%	1362.60	1309.04	4.09%
	1.50	38.40	38.36	0.12%	412.72	407.31	1.33%	1355.20	1302.06	4.08%
	2.00	33.81	33.77	0.12%	408.96	403.62	1.32%	1351.50	1298.48	4.08%
4.00	0.50	62.78	62.69	0.14%	453.13	446.67	1.45%	1404.90	1347.68	4.25%
	1.00	48.21	48.15	0.13%	434.54	428.44	1.42%	1384.40	1328.27	4.23%
	1.50	40.59	40.54	0.13%	427.47	421.51	1.41%	1377.10	1321.35	4.22%
	2.00	35.72	35.67	0.13%	423.75	417.86	1.41%	1373.40	1317.77	4.22%
5.00	0.50	65.24	65.14	0.15%	464.68	457.73	1.52%	1423.50	1363.95	4.37%
	1.00	50.03	49.96	0.14%	446.12	439.55	1.49%	1403.10	1344.60	4.35%
	1.50	42.10	42.04	0.14%	439.08	432.65	1.49%	1395.80	1337.69	4.34%
	2.00	37.03	36.98	0.14%	435.37	429.02	1.48%	1392.10	1334.11	4.35%
7.00	0.50	68.44	68.33	0.16%	481.78	474.05	1.63%	1453.60	1390.03	4.57%
	1.00	52.38	52.30	0.15%	463.19	455.88	1.60%	1433.30	1370.80	4.56%
	1.50	44.04	43.97	0.15%	456.16	449.00	1.60%	1426.00	1363.89	4.55%
	2.00	38.72	38.66	0.15%	452.47	445.38	1.59%	1422.30	1360.37	4.55%
9.00	0.50	70.42	70.30	0.17%	493.81	485.51	1.71%	1476.80	1410.01	4.74%
	1.00	53.83	53.75	0.16%	475.17	467.30	1.68%	1456.50	1390.78	4.73%
	1.50	45.24	45.16	0.16%	468.12	460.41	1.67%	1449.20	1383.93	4.72%
	2.00	39.76	39.70	0.16%	464.42	456.80	1.67%	1445.50	1380.42	4.71%
200.00	0.50	78.52	78.38	0.19%	557.89	546.22	2.14%	1634.70	1543.72	5.89%
	1.00	59.72	59.61	0.18%	538.40	527.32	2.10%	1613.90	1524.30	5.88%
	1.50	50.08	49.99	0.18%	531.10	520.23	2.09%	1606.40	1517.33	5.87%
	2.00	43.97	43.90	0.17%	527.27	516.52	2.08%	1602.60	1513.75	5.87%
$10^6$	0.50	78.97	78.83	0.18%	562.34	550.51	2.15%	1648.20	1555.34	5.97%
	1.00	60.04	59.94	0.17%	542.77	531.54	2.11%	1627.30	1535.80	5.96%
	1.50	50.34	50.26	0.17%	535.44	524.43	2.10%	1619.80	1528.89	5.95%
	2.00	44.20	44.13	0.17%	531.60	520.70	2.09%	1616.00	1525.31	5.95%
$10^{12}$	0.50	78.97	78.83	0.18%	562.34	550.51	2.15%	1648.20	1555.34	5.97%
	1.00	60.04	59.94	0.17%	542.77	531.54	2.11%	1627.30	1535.80	5.96%
	1.50	50.34	50.26	0.17%	535.44	524.43	2.10%	1619.80	1528.89	5.95%
	2.00	44.20	44.13	0.17%	531.60	520.70	2.09%	1616.00	1525.31	5.95%

Компарација резултата добијених презентованим приступом преко централних коначних разлика и резултата коначно-елементног модела је показала одличну подударност. Релативна одступања за прву сопствену кружну учестаност не прелазе 0.19%, док за другу и трећу иду највише до 2.15% и 5.97%, респективно.

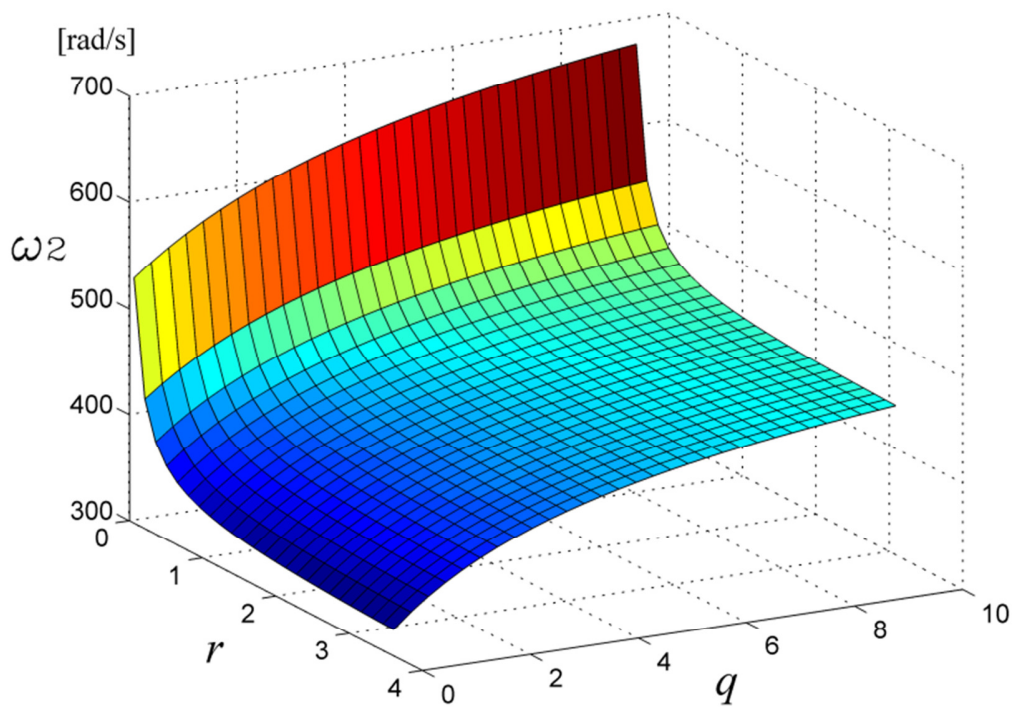
Као што је и очекивано, с обзиром да су занемарени ефекти ротације елементарних делића као и утицај смицања, добијен је нешто крући модел, односно, нешто веће вредности за сопствене учестаности.

Важно је приметити да, иако мала, релативна одступања расту са порастом бездимензионалног коефицијента крутости  $q$  и достижу поменуте максималне вредности када параметар  $T$ , који је дефинисан изразом (4.40), достиже нулту вредност. Пошто је дискретизација структуре извршена на  $n=100$  сегмената, одговарајућа вредност за бездимензионалну крутост за тај случај износи  $q=200$ . Случајеви са вредностима  $q=10^6$  и  $q=10^{12}$  су испитани и приказани у циљу показивања тенденције стабилизовања релативног одступања.

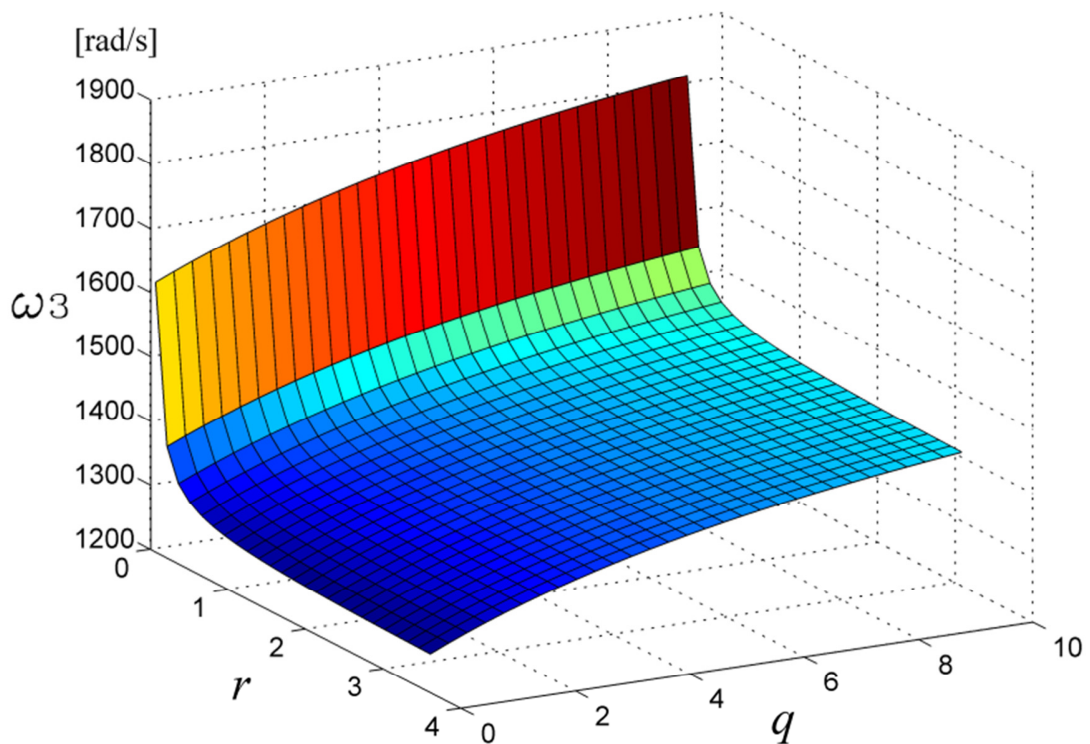
Слике 4.8, 4.9 и 4.10 су графичка интерпретација резултата добијених приступом коначних разлика, односно, представљају дијаграме зависности прве три сопствене кружне учестаности од различитих граничних услова ослањања у функцији бездимензионалних коефицијената крутости и масе  $q$  и  $r$ . Повећањем односа крутости  $q$  долази до прогресивног приближавања услова ослањања потпуном укљештењу, што резултује већим учестаностима. Симултано, веће вредности односа масе на врху и сопствене масе носача  $r$  доводе до опадања природних учестаности.



Слика 4.8 Утицај промена граничних услова на фундаменталну кружну учестаност

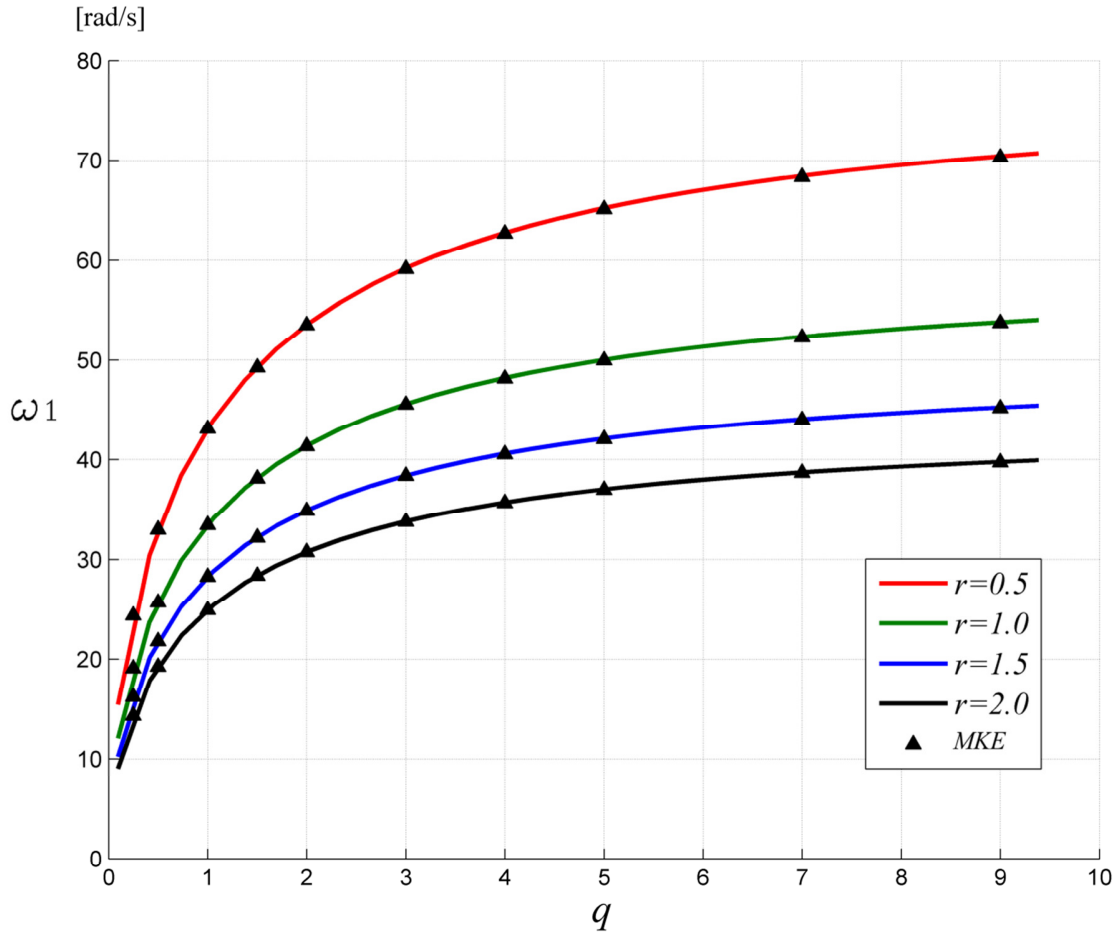


Слика 4.9 Утицај промена граничних услова на другу природну кружну учестаност



Слика 4.10 Утицај промена граничних услова на трећу природну кружну учестаност

Слика 4.11 приказује дводимензионалну форму дијаграма са слике 4.8, допуњену са резултатима из методе коначних елемената. Линијама су дате зависности добијене на бази модела са коначним разликама, док маркери представљају резултате симулације из табеле 4.1. Резултати стоје у одличној сагласности.



Слика 4.11 Поређење резултата за прву природну кружну учестаност

Дакле, дати поступак, базиран на примени централних коначних разлика, се показао као веома тачан, у поређењу са методом коначних елемената, при решавању проблема фреквентне анализе носача са неравномерно дистрибуираним параметрима. Ово је од посебне важности за зглобни део стреле, који се састоји управо од сличних сегмената.

Након постављања система једначина добијеног дискретизацијом диференцијалног проблема, овај приступ показује велику издашност у погледу пружања широког спектра зависности динамичких параметара при варирању жељених конструкционих параметара.

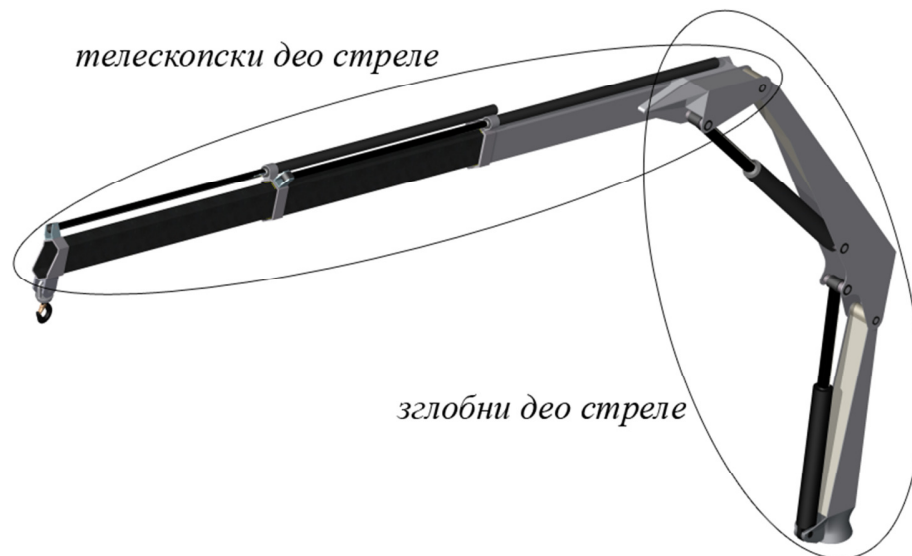
Изграђени модел даје компактну структуру једначина по померањима реалних чворова. Кључна предност овог приступа лежи у постојању рекурентне формуле за све унутрашње чворове дискретизоване секције неке структуре, чије једначине нису биле под утицајем граничних услова. Другим речима, повећање броја чворова не увећава број једначина које морају бити написане приликом изградње математичког модела. Управо те рекурентне једначине чине овако формулисани модел веома погодним за програмирање.

Коришћењем релативно једноставних програмских алгоритама добијамо дијаграме зависности преко којих имамо ефикасан увид у то како се мењају излазни динамички параметри при промени било којег улазне величине, било да је у питању димензија попречног пресека, концентрисана маса, локална крутост итд.

За разлику од методе коначних елемената, која се код структура са изразито променљивим попречним пресецима мора примењивати са неким од типова запреминских елемената, повећање густине дискретизације, односно, повећање броја чворова код овог приступа, нема значајног утицаја на време прорачуна.

## 5. Моделирање утицаја структурних параметара зглобног дела стреле на природни фреквентни спектар

Као што је наведено на крају трећег поглавља, у којем су анализирани заједничке структурне особине зглобних стрела ауто-дизалица, цела конструкција се, генерално, може поделити на доњи подсклоп постоља са стабилизаторима и полужни механизам, при чему се сам полужни механизам може рашчланити на зглобни и телескопски део, слика 5-1. Зглобни део полужног механизма обухвата стуб, унутрашњу и спољашњу руку заједно са хидроцилиндрима који остварују угловне промене између ових чланова. Стуб и унутрашња рука имају изразито променљив попречни пресек који је последица високих вредности локалних оптерећења у зглобовима и упоришним тачкама хидроцилиндара. Телескопски део обухвата сегменте константних попречних пресека, који врше релативно транслаторно кретање и њихове хидроцилиндре.



Слика 5.1 Генерална подела конструкције на чисто зглобни и телескопски део

Проблематика везана за моделирање променљивости попречног пресека сегмената применом методе централних коначних разлика је детаљно анализирана у претходном поглављу, па се, у циљу растерећења једначина модела и фокусирања на моделирање зглобних веза између хидроцилиндара и сегмената, овде неће бити поново разматрана.

У излагању које следи, на поједностављеном моделу зглобног механизма биће парцијално анализирани утицаји релевантних фактора зглобног дела стреле на промене сопственог фреквентног спектра код савојних осцилација.



## 5.1. Опис модела и полазне претпоставке

Генерализована конструкција дво-полужног флексибилног зглобног манипулатора, погоњеног хидроцилиндром заједно са предложеним прорачунским моделом приказана је на слици 5.2.

Зглобна структура се налази у вертикалној авни и састоји се од две еластична гредна носача, које се обично називају стуб (енг. “*column*”) и полука или рука (енг. “*arm*”), хидрауличног цилиндра и два идентична вешајна подскопа ушки, заварених за стуб и полуку, преко којих је хидроцилиндр посредно везан. Између ушки и хидроцилиндра је остварена зглобна веза посредством осовиница са чаурама и отвора на крајевима цилиндра и клипњаче.

Дужине стуба и полуге су респективно означене као  $l_1$  и  $l_2$ . У циљу поједностављивања наредног истраживања примењивости и ефикасности предложеног прорачунског модела, усвојени су константни правоугаони танкозидни попречни пресеци за стуб и полуку. Упркос овом поједностављењу, општост приступа није нарушена и односи се и на случај са променљивим попречним пресецима.

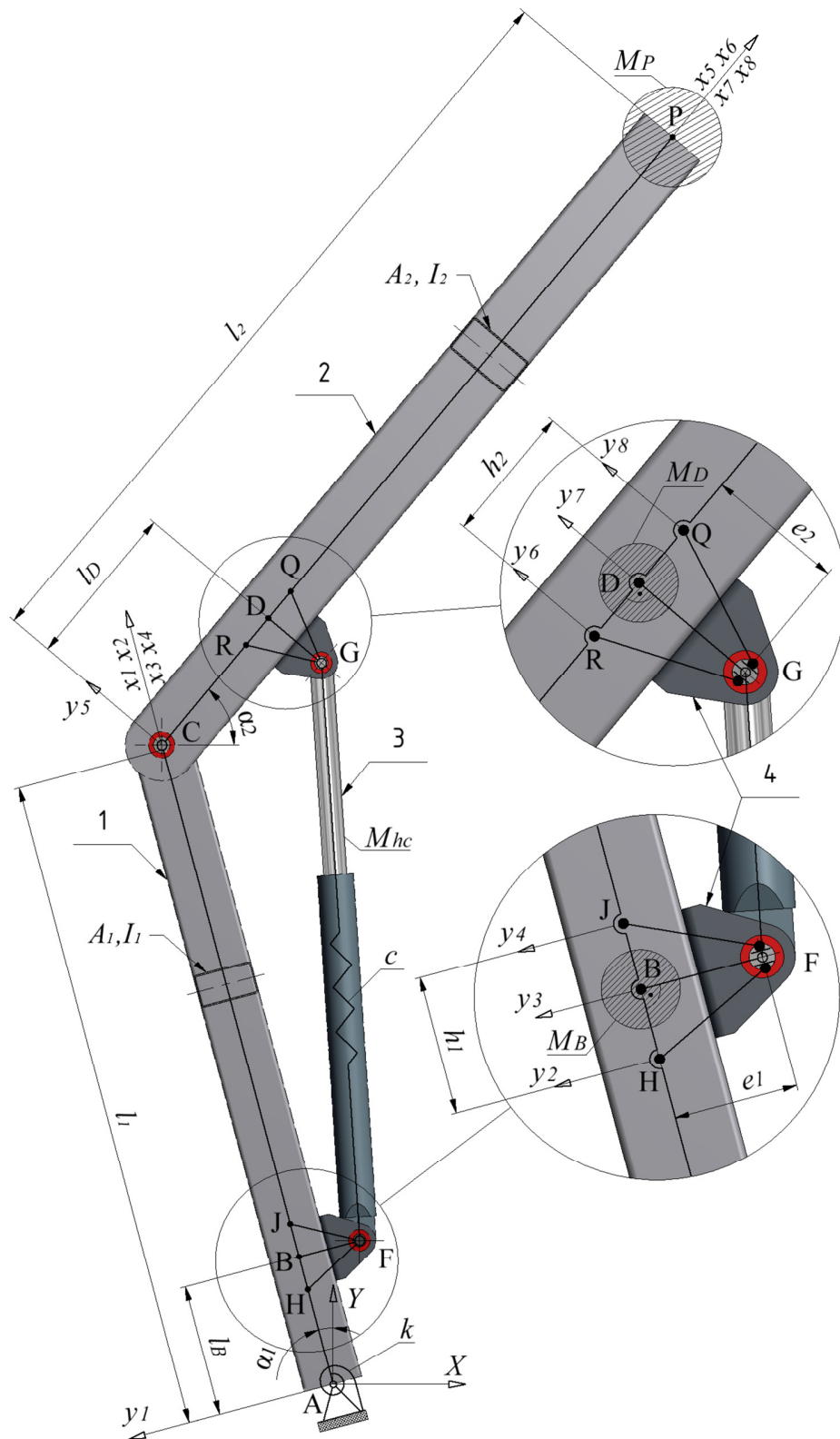
Површине попречних пресека и аксијални моменти инерције за осу која пролази кроз њихово тежиште а нормална је на вертикалну раван, за стуб и полуку су означени са  $A_1$ ,  $I_1$  и  $A_2$ ,  $I_2$  респективно.

Тродимензионална структура је замењена дужима које спајају крајеве гредних носача и пролазе кроз тежишта пресека. Ове дужи представљају неутралне линије греда и симболизују придружене расподељене параметре подужне масе  $\rho A$  и савојне крутости  $EI$ , где је  $\rho$  специфична маса или густина материјала а  $E$  Young-ов модул еластичности.

Носећа подконструкција на којој се обрће полужје зглобне стреле, састављена од ливеног постоља, подскопа стабилизатора са њиховим носачима и кутијастим вођицама, чврсто је везана за главне носаче шасије вучног возила ауто-дизалице. Њена склоност ка деформисању је у овом моделу представљена флексионом опругом константне крутости  $k$  у тачки ослоња А, уз истовремено спречавање померања у попречном и подужном правцу.

Маса терета је уграђена у модел као коцентрисана маса  $M_P$ , занемарљивих димензија, односно, занемарљивог момента инерције при обртном кретању, која је везана за крајњу тачку Р на врху флексибилног манипулатора.

Стуб и полука, директно повезани цилиндричним зглобом у тачки С, такође су повезани посредно и хидроцилиндром преко идентичних подскопова ушица са осовиницама, који су заварени за полуге. Осе цилиндричних зглобова које формирају подскопови ушица и крајеви хидроцилиндра, чије су тачке продора на раван структуре F и G, имају ексцентрицитете у односу на тежишне линије стуба и полуге  $e_1$  и  $e_2$  респективно (детаљи на слици 5.2).



Слика 5.2 Модел дво-полужног флексибилног манипулатора:  
 1-стуб, 2-полуга, 3-хидроцилиндар, 4- подсклоп ушки

Моделирање структурног детаља ушица као посредног везног елемента између хидроцилиндра и греда је спроведено помоћу три кратка штапа на сваком од крајева хидроцилиндра.

Веза хидроцилиндра са стубом на доњем крају је моделирана помоћу штапова FH, FB и FJ, чији се крајеви на страни хидроцилиндра поклапају са упоришном тачком F а на супротној страни леже на тежишној линији стуба. При томе, подужна оса штапа FB је управна на тежишну линију стуба. Крајње тачке друга два штапа H и J се налазе на растојању  $h_1$  мерено дуж тежишне линије стуба и симетричне су у односу на тачку B (доњи детаљ на слици 5.2).

Аналогно претходном, веза хидроцилиндра са полугом на горњем крају је моделирана помоћу штапова GR, GD и GQ, чији се крајеви на страни хидроцилиндра поклапају са упоришном тачком G а на супротној страни леже на тежишној линији полуге. При томе, подужна оса штапа GD је управна на тежишну линију полуге. Крајње тачке друга два штапа R и Q се налазе на растојању  $h_2$  мерено дуж тежишне линије стуба и симетричне су у односу на тачку D (горњи детаљ на слици 5.2).

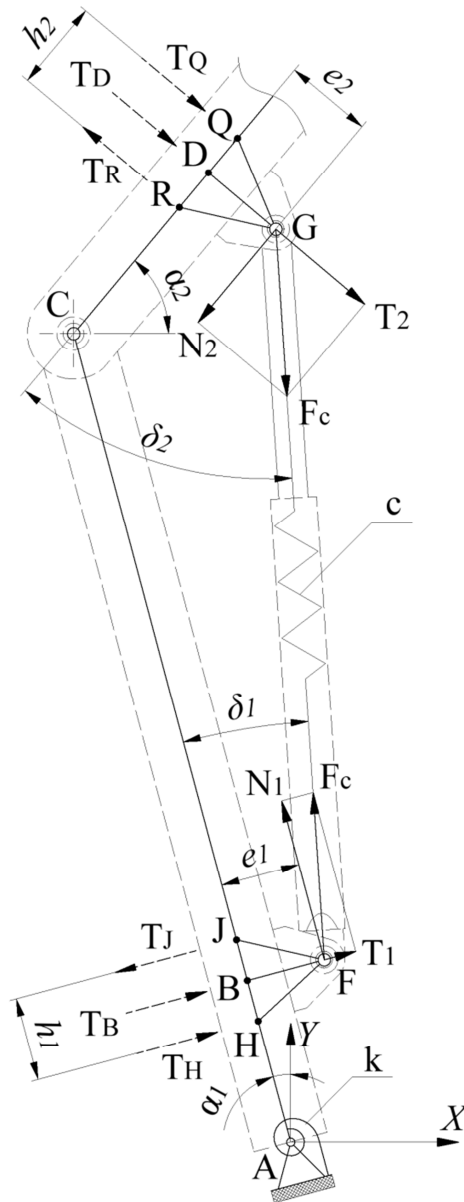
Сви штапови су сматрани лаким и апсолутно крутим. Ослоњени зглобно на оба своја краја, ови структурни елементи предложеног модела могу преносити искључиво сопствену аксијалну силу. Овде се даје акценат на појединачан начин ослањања за сваки од ових штапова у упоришним тачкама, што представља концепт моделирања утицаја силе хидроцилиндра на угибе и пресечне величине у одређеним тачкама на неутралним линијама стуба и полуге (детаљи на слици 5.2).

На оба краја, сила хидроцилиндра  $F_c$  се може разложити на аксијалну и трансверзалну компоненту у односу на тежишне линије стуба и полуге, слика 5.3. Према начину ослањања приказаном на слици 5.2, крути штапови FB и GD, управни на тежишне линије стуба и полуге, преносе трансверзалне компоненте  $T_1$  и  $T_2$  респективно. У циљу усклађивања ознака карактеристичних тачака на тежишним линијама стуба и полуге и трансверзалних сила које у њима делују, ове две компоненте су преименоване у  $T_B$  и  $T_D$  респективно.

Услед постојања ексцентрицитета упоришних тачака хидроцилиндра F и G у односу на тежишне линије стуба и полуге  $e_1$  и  $e_2$ , аксијалне компоненте силе хидроцилиндра  $N_1$  и  $N_2$  генеришу локалне концентрисане моменте савијања, који додатно утичу на померања локалних тачака на тежишним линијама стуба и полуге.

Сваки од локалних момената савијања је замењен спрегом трансверзалних сила које преко симетричних крутих штапова делују у њиховим крајњим тачкама на стуб и полуку. Према томе, трансверзалне силе истог интезитета и супротних смерова  $T_H$  и  $T_I$  замењују утицај локалног момента савијања на стубу, док трансверзалне силе истог интезитета и супротних смерова  $T_R$  и  $T_Q$  замењују утицај локалног момента савијања на полузи.

Углови  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  одређују тренутни положај зглобног манипулатора и представљају конфигурационе координате. При томе, оса хидроцилиндра заклапа углове  $\delta_1$  и  $\delta_2$  са стубом и полугом, респективно (слика 5.3).



Слика 5.3 Декомпозиција силе хидроцилиндра у упоришним тачкама  $F$  и  $G$  и замена локалних момената савијања одговарајућим спреговима трансверзалних сила

Хидроцилиндар као структурна компонента може да преноси искључиво подужну силу, која може бити веома великог интензитета у зависности од релативног положаја стуба и полуге, односно, угла којег заклапају. Са друге стране, ако се има у виду деформабилност клипњаче а посебно зидова цилиндра, као и стишљивост уља, утицај укупне еластичности хидроцилиндра у подужном правцу се може представити опругом константне крутости  $c$ . Треба напоменути да код реалног објекта, ова подужна крутост није константна, пре свега због промене дужине хидроцилиндра.

Утицај укупне масе хидроцилиндра и подсклопова везних ушки, означене са  $M_{hc}$ , је узет у обзир у прорачунском моделу кроз две концентрисане масе  $M_B$  и  $M_D$  које су везане у тачкама В и D, респективно. Њихова величина ће бити претпостављена касније, при нумеричком тестирању изграђеног модела.

Поред наведених претпоставки и апроксимација, сматра се да су стуб и полуга апсолутно крути у подужним правцима. Другим речима, занемарују се аксијалне еластичне деформације греда.

Коначно, као исход овако постављеног модела, цела артикулисана структура је издељена на секције у оквиру којих су функције померања непрекидне и диференцијабилне, при чему у граничним тачкама секција делују трансверзалне силе. Свака од секција има сопствени локални координатни систем  $x_i y_i$ , где је  $x$  подужна оса. Дакле, тачке Н, В, Ј, С, R, D и Q деле целокупну структуру на укупно осам секција, при чему је померање прве тачке наредне секције једнако померању последње тачке претходне.

Функције померања секција се, користећи одређене граничне услове, повезују и формирају сопствене облике осциловања.

## 5.2 Полазне једначине у аналитичком и дискретизованом облику

Анализа се ослања на *Euler-Bernoulli*-јеву теорију греда, тј. на претпоставци да се инерција услед ротирања елементарних делића и ефекти смицања могу занемарити. Парцијална диференцијална једначина кретања код савојних осцилација греде је позната и гласи

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x \leq l \quad (5.1)$$

Такође, облик решења је познат и карактерише га раздвајање на подфункције које зависе само од координата и само од времена

$$y(x,t) = CY(x) \cos(\omega t - \varphi), \quad 0 < x \leq l \quad (5.2)$$

где је  $C$  амплитуда,  $Y(x)$  представља сопствени облик осциловања,  $\omega$  је природна кружна учестаност а  $\varphi$  фазни угао.

Ако се једначина (5.2) уврсти у једначину (5.1) и обе стране поделе са  $C \cos(\omega t - \varphi)$ , добија се диференцијални карактеристични проблем за сваку секцију манипулатора у одговарајућем локалном координатном систему

$$EI_j \frac{d^4 Y_j(x_j)}{dx_j^4} = m_j \omega^2 Y_j(x_j); \quad 0 < x_j \leq l_j; \quad j = 1, \dots, 8 \quad (5.3)$$

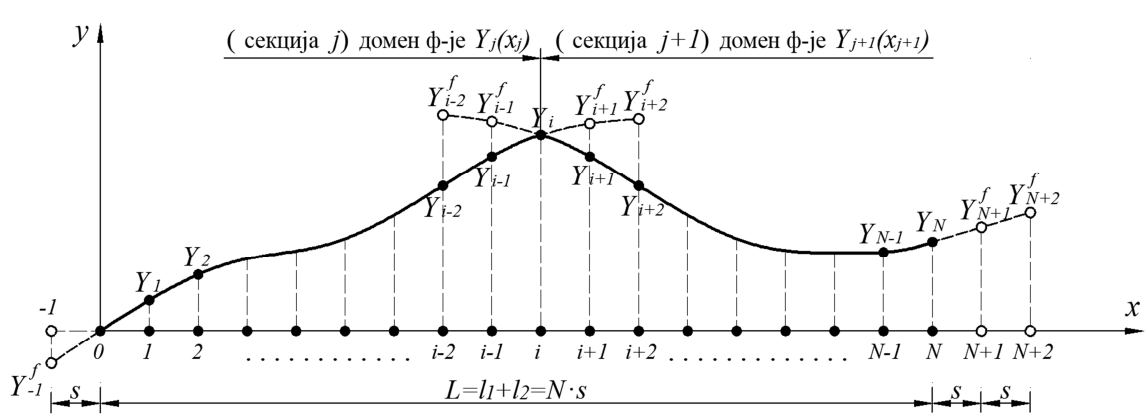
где је

$m_j = \rho A_j$  - подужна маса,

$Y_j(x_j)$  - функција померања,

$EI_j$  - савојна крутост секције  $j$ .

Слика 5.4 приказује шему чворних тачака при дискретизацији проблема помоћу централних коначних разлика. Збирна дужина манипулатора  $L = l_1 + l_2$  је подељена са  $N+1$  чворова (рачунајући и онај у ослоњу) на  $N$  делића исте дужине  $s = L/N$ .



Слика 5.4 Шема дискретизације структуре са приказаним фиктивним чворовима

Апроксимације извода функције померања преко централних коначних разлика, којима ће се извршити дискретизација гласе

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = Y_i' \approx \frac{-Y_{i-1} + Y_{i+1}}{2s} \quad (5.4)$$

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_i = Y_i'' \approx \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{s^2} \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_i = Y_i''' \approx \frac{-Y_{i-2} + 2Y_{i-1} - 2Y_{i+1} + Y_{i+2}}{2s^3} \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{d^4Y}{dx^4}\right)_i = Y_i^{IV} \approx \frac{Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}}{s^4} \quad (5.7)$$

Заменом једначине (5.7) у једначину (5.3) добија се дискретизован облик једначине померања за произвољан чвор структуре  $i$

$$EI_i \frac{Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}}{s^4} = m_i \omega^2 Y_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.8)$$

Ако се уведе ознака за сопствену вредност  $\lambda = \omega^2 s^4$

$$Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2} = \frac{m_i \lambda}{EI_i} Y_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.9)$$

На овај начин, диференцијалне једначине по функцији померања секција (5.3) су трансформисане у систем од  $N$  алгебарских једначина са константним коефицијентима по непознатим трансверзалним померањима чворова  $Y_i$ .

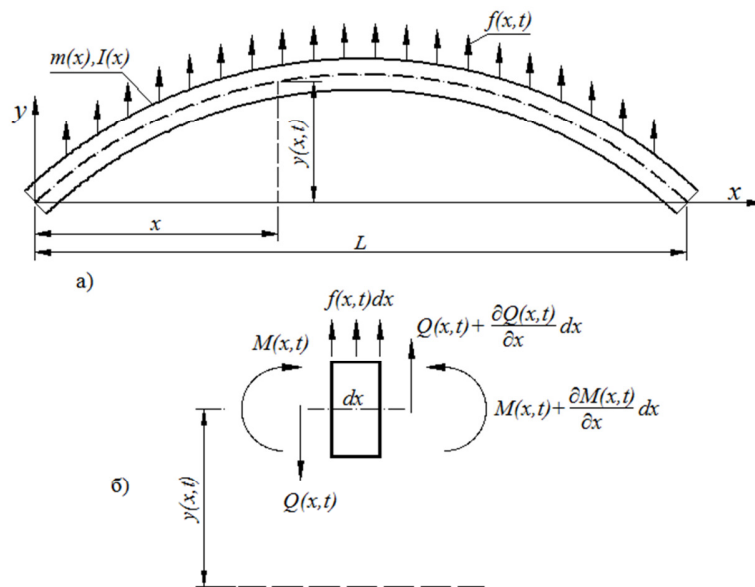
Овде треба нагласити да дискретне тачке дуж полуге врше померања и у подужном правцу, такође. Међутим, уведена претпоставка о апсолутној аксијалној крутости греда велике површине попречних пресека, даје за право да се аксијална померања посматрају као померања тачака крутог тела. Другим речима, то намеће закључак да су аксијална померања свих тачака полуге међусобно подједнака и детерминисана померањем зглоба  $C$ , односно, његовом пројекцијом на подужну осу полуге. Ова апроксимација нам допушта да опишемо слободне савојне осцилације зглобног дела стреле искључиво преко попречних померања чворних тачака.

Померања чворова секција су спрегнута преко одређених услова који важе за граничне чворове и који се дефинишу у погледу померања (угиба), нагиба, момента савијања и трансверзалне силе.

Претходни облик дискретизоване једначине функције померања написане за произвољни чвор  $n$ , осим померања номиналног чвора обухвата и померања по два суседна чвора са сваке стране. Ако чвор у ослонцу, у тачки  $A$ , носи “нулти” редни број и ако се прва дискретизована једначина испишује за чвор број  $1$ , у једначини ће фигурисати померање непостојећег чвора са леве стране тачке у ознаци  $Y_{-1}^f$ . Истовремено, на слободном крају манипулатора, при писању једначине за крајњу тачку  $P$ , имаћемо померања два непостојећа чвора са десне стране у ознаци  $Y_{N+1}^f$  и  $Y_{N+2}^f$ .

Осим код крајњих тачака манипулатора, фиктивни чворови, односно, фиктивна померања се јављају око граничних чворова између секција, као последица тога што се налазе ван домена парцијалне функције динамичке еластичне линије за дату секцију, слика. У наредном излагању, померања фиктивних чворова ће, сагласно слици 5.4, бити индексирана са “ $f$ ”.

Као и у претходном поглављу, приликом дефинисања граничних услова биће коришћена знаковна конвенција за позитивне смерове пресечних величина, приказана сликом 5.5.



Слика 5.5 а) греда при савојним осцилацијама б) елементарни делић греде са позитивним смеровима пресечних величина

Пре дефинисања граничних услова у крајњим тачкама секција, претходно је неопходно одредити зависности углова које оса хидроцилиндра заклапа са тежишним линијама стуба и полуге  $\delta_1$  и  $\delta_2$  од положајних координата  $a_1$  и  $a_2$ .

Након тога, потребно је моделирати зависност силе у хидроцилиндру од померања карактеристичних тачака на тежишним линијама стуба и полуге.



### 5.3 Одређивање зависности тригонометријских величина од геометријских параметара и конфигурационих координата зглобног механизма

Са променом положаја, односно, конфигурације зглобног манипулатора, долази и до промена интезитета трансверзалних сила у карактеристичним тачкама којима је цела структура издељена на секције а тиме и до промене у граничним условима, које утичу на динамичко понашање.

Изрази за трансверзалне силе укључују променљиве тригонометријске величине синуса и косинуса углова које оса хидроцилиндра заклапа са тежишним линијама стуба и полуге  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , респективно.

Поврх тога, дефинисање поменутих тригонометријских величина повлачи и одређивање тренутне дужине хидроцилиндра, односно дужине недеформисане опруге  $l_0$ , у функцији конфигурационих координата, тј, углова  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Скица за одређивање зависности углова  $\delta_1$  и  $\delta_2$  у функцији геометријских параметара и конфигурационих углова  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  је дата сликом 5.6.

Помоћне тачке М и N се налазе у пресеку осе хидроцилиндра са тежишним осам стуба и полуге, респективно.

Полаз за одређивање дужине недеформисане опруге  $l_0$  је косинусна теорема, примењена на троуглу CFG:

$$l_0 = \overline{CG}^2 + \overline{CF}^2 - 2\overline{CGCF} \cos \sphericalangle(\overline{CG}, \overline{CF})$$

С обзиром да је

$$\overline{CG}^2 = l_D^2 + e_2^2$$

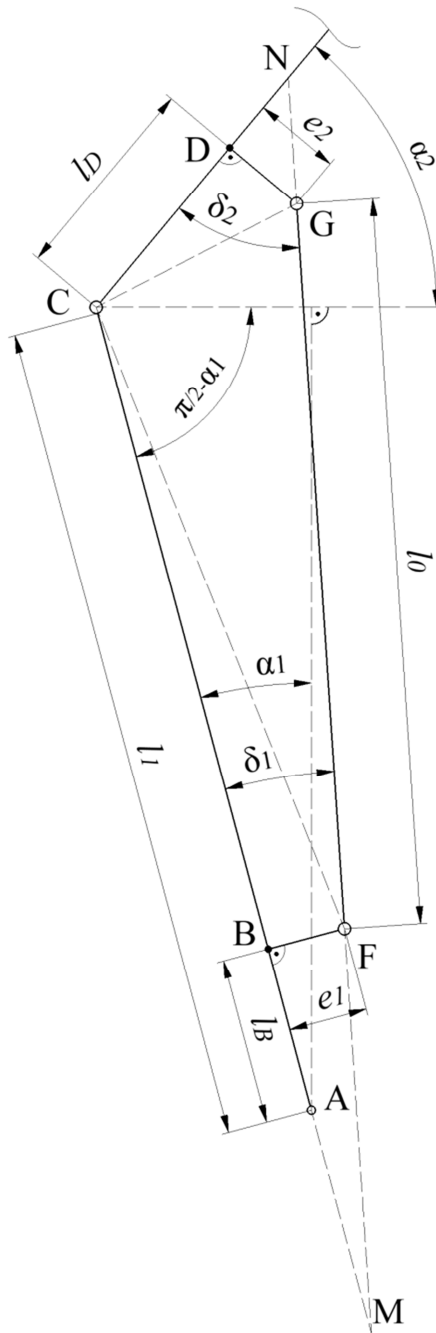
$$\overline{CF}^2 = (l_1 - l_B)^2 + e_1^2$$

$$\cos \sphericalangle(\overline{CG}, \overline{CF}) = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2 - \arctg \frac{e_1}{l_1 - l_B} - \arctg \frac{e_2}{l_D}$$

добивамо коначан израз за слободну дужину опруге у облику

$$l_0 = \sqrt{l_D^2 + e_2^2 + (l_1 - l_B)^2 + e_1^2 - 2\sqrt{(l_D^2 + e_2^2) \left[ (l_1 - l_B)^2 + e_1^2 \right]} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2 - \arctg \frac{e_1}{l_1 - l_B} - \arctg \frac{e_2}{l_D} \right)} \quad (5.10)$$

Израз за синус угла  $\alpha_1$  добијемо применом синусне теореме над троугловима  $\Delta CGM$  и  $\Delta BFM$ .



Слика 5.6 Скица за одређивање зависности углова  $\delta_1$  и  $\delta_2$  у функцији геометријских параметара и конфигурационих углова  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$

Из троугла  $\triangle CGM$  имамо да је

$$\frac{\overline{CG}}{\sin \delta_1} = \frac{l_0 + \overline{FM}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2 - \arctg \frac{e_2}{l_D} \right)}$$

Из троугла  $\Delta BFM$  имамо да је

$$\overline{FM} = \frac{e_1}{\sin \delta_1}$$

Комбиновањем претходна два израза добија се коначан израз

$$\sin \delta_1 = \frac{\sqrt{l_D^2 + e_2^2} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2 - \operatorname{arctg} \frac{e_2}{l_D} \right) - e_1}{l_0} \quad (5.11)$$

Израз за синус угла  $\alpha_2$  добијамо применом синусне теореме над троугловима  $\Delta CFN$  и  $\Delta DGN$ .

Из троугла  $\Delta CFN$  имамо да је

$$\frac{\overline{CF}}{\sin \delta_2} = \frac{l_0 + \overline{GN}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2 - \operatorname{arctg} \frac{e_1}{l_1 - l_B} \right)}$$

Из троугла  $\Delta DGN$  имамо да је

$$\overline{GN} = \frac{e_2}{\sin \delta_2}$$

Комбиновањем претходна два израза добија се коначан израз

$$\sin \delta_2 = \frac{\sqrt{(l_1 - l_B)^2 + e_1^2} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2 - \operatorname{arctg} \frac{e_1}{l_1 - l_B} \right) - e_2}{l_0} \quad (5.12)$$

Косинусе ових углова можемо задржати изражене преко познатих адиционих тригонометријских формула

$$\cos \delta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \delta_1}$$

$$\cos \delta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \delta_2}$$

## 5.4 Моделирање функционалне зависности између силе у хидроцилиндру и померања карактеристичних тачака на тежишним линијама стуба и полуге

Полазна једначина за одређивање силе у хидроцилиндру  $F_c$  је

$$F_c = c(l - l_0) = c\Delta l \quad (5.13)$$

где је  $c$  подужна крутост хидроцилиндра и  $\Delta l$  промена растојања упоришних тачака хидроцилиндра F и G, тј. промена дужине опруге у динамичком моделу. Крутост преставља унутрашњи конструкциони параметар самог хидроцилиндра и њена вредност ће бити један од варијабилних параметара при испитивању модела на конкретном нумеричком примеру.

Приликом моделирања ове зависности, уводе се следеће претпоставке:

- угао који описује осна линија хидроцилиндра приликом кретања је занемарљиво мали, односно, оса хидроцилиндра приближно задржава свој правац при осциловању структуре;
- нагиб еластичних линија стуба и полуге у тачкама B и D је много пута мањи у односу на углове које оса хидроцилиндра заклапа са тежишним линијама у равнотежном положају.

С обзиром да су обе упоришне тачке хидроцилиндра F и G покретне, укупна промена дужине опруге се може представити као збир одговарајућих парцијалних доприноса код обе наведене тачке

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_G \quad (5.14)$$

Уважавајући наведене претпоставке и апроксимације, шематски приказ за дефинисање парцијалне зависности промене дужине опруге од угиба и нагиба код доње вешајне тачке, изражене преко генералисаних координата померања карактеристичних тачака, дат је на слици 5.7.

На овом месту се уводи претпоставка о линеарној зависности међусобног растојања тачака H и J и ексцентрицитета вешајне тачке  $e_1$ :

$$h_1 = r_1 \cdot e_1 \quad (5.15)$$

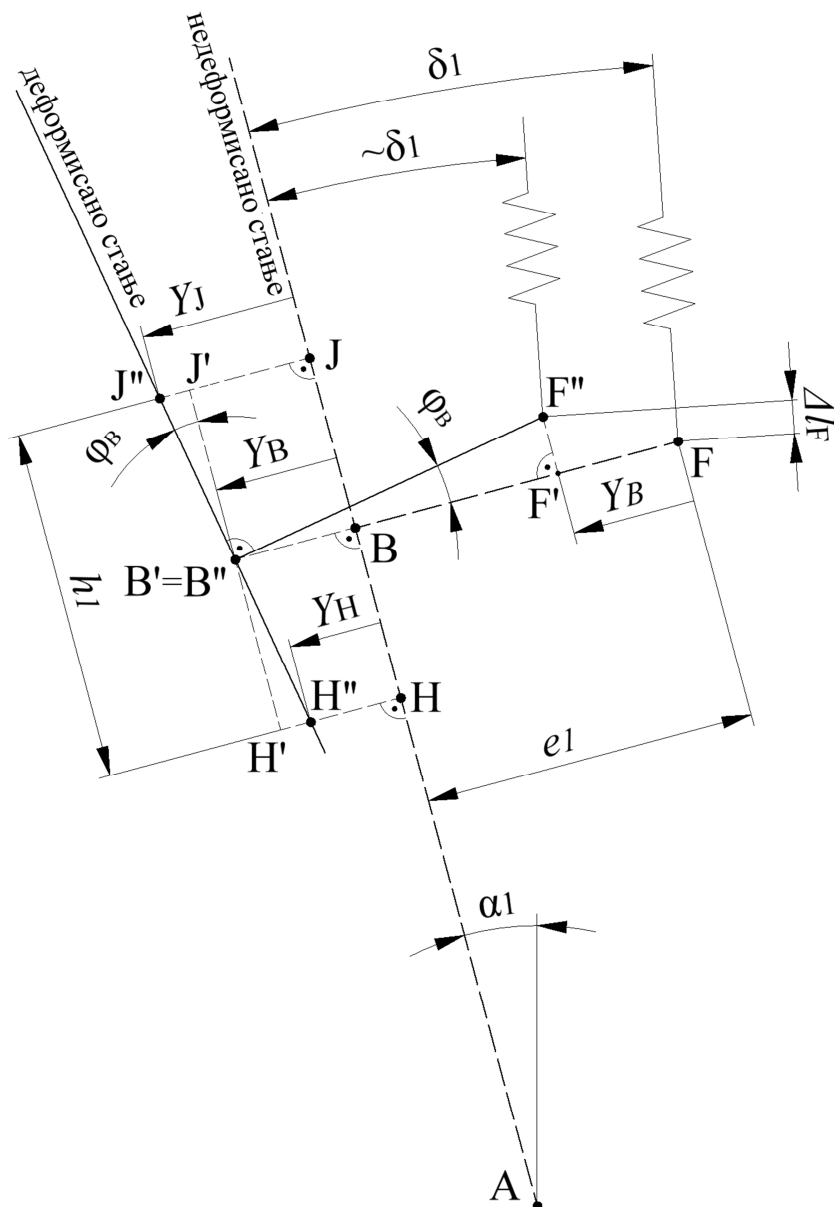
У циљу прегледности, са слике су изостављене линије симетрично постављених штапова FJ и FH. При томе, претпостављена су померања тачака у позитивном смеру локалних координатних оса.

При кретању, тачке H, B и J врше померања  $Y_H$ ,  $Y_B$  и  $Y_J$  која су приближно управна на неутралну линију равнотежног положаја.

Претпоставимо да се укупно деформисање дела стуба стреле код доње вешајне тачке хидроцилиндра може посматрати као суперпозиција translације и ротације око чвора B.

Наиме, претпоставимо да се најпре изврши транслирање тачака  $H$ ,  $B$ ,  $J$  и  $F$  у међуположаје  $H'$ ,  $B'$ ,  $J'$  и  $F'$  а након тога, услед постојања нагиба у тачки  $B$ , њихово ротирање око чвора  $B$  у коначне положаје  $H''$ ,  $B''$ ,  $J''$  и  $F''$ , при чему се позиције  $B'$  и  $B''$  подударају.

Пошто је тачка  $F$  везана аксијално крутим штапом за тачку  $B$ , следи да ће њихова померања после транслације бити једнака. За померање тачке  $F$  током ротирања усваја се иста претпоставка као за померања тачака  $H$ ,  $B$  и  $J$ , према којој је померање из  $F'$  у  $F''$  управно на правац  $F-B$ .



Слика 5.7 Шематски приказ утицаја угиба и нагиба еластичне линије код доње вешајне тачке на промену дужине опруге динамичког модела

Дакле, као резултат деформисања стуба имамо две међусобно управне компоненте померања вешајне тачке F:

- померање F-F' по правцу F-B и
- померање F'-F'' управно на њега.

Померање у правцу F-B је једнако померању чвора B на неутралној линији:

$$\overline{FF'} = Y_B \quad (5.16)$$

Друга компонента померања вешајне тачке хидроцилиндра приближно гласи

$$\overline{FF''} \approx e_1 \cdot \text{tg} \varphi_B \quad (5.17)$$

Сада је потребно изразити нагиб еластичне линије у тачки B преко померања карактеристичних тачака H и J. Уводи се апроксимација за нагиб у облику

$$\text{tg} \varphi_B = \frac{\partial y_2 \left( x_2 = \frac{h_1}{2}, t \right)}{\partial x_2} \approx \frac{1}{e_1} \left[ y_3 \left( x_3 = \frac{h_1}{2}, t \right) - y_1 \left( x_1 = l_B - \frac{h_1}{2}, t \right) \right] \quad (5.18)$$

односно, у дискретизованом облику

$$\text{tg} \varphi_B \approx \frac{Y_J - Y_H}{h_1} = \frac{Y_J - Y_H}{r_1 e_1} \quad (5.19)$$

Заменом израза (5.19) у израз (5.17) добија се и друга компонента померања вешајне тачке у функцији померања чворова дискретизоване структуре као

$$\overline{FF''} \approx \frac{Y_J - Y_H}{r_1} \quad (5.20)$$

Промена дужине опруге услед померања вешајне тачке хидроцилиндра F добија се као збир пројекција компонентних померања на правац осе опруге

$$\Delta l_F = \overline{FF'} \sin \delta_1 + \overline{FF''} \cos \delta_1$$

односно

$$\Delta l_F = Y_B \sin \delta_1 + \frac{\cos \delta_1}{r_1} (Y_H - Y_J) \quad (5.21)$$

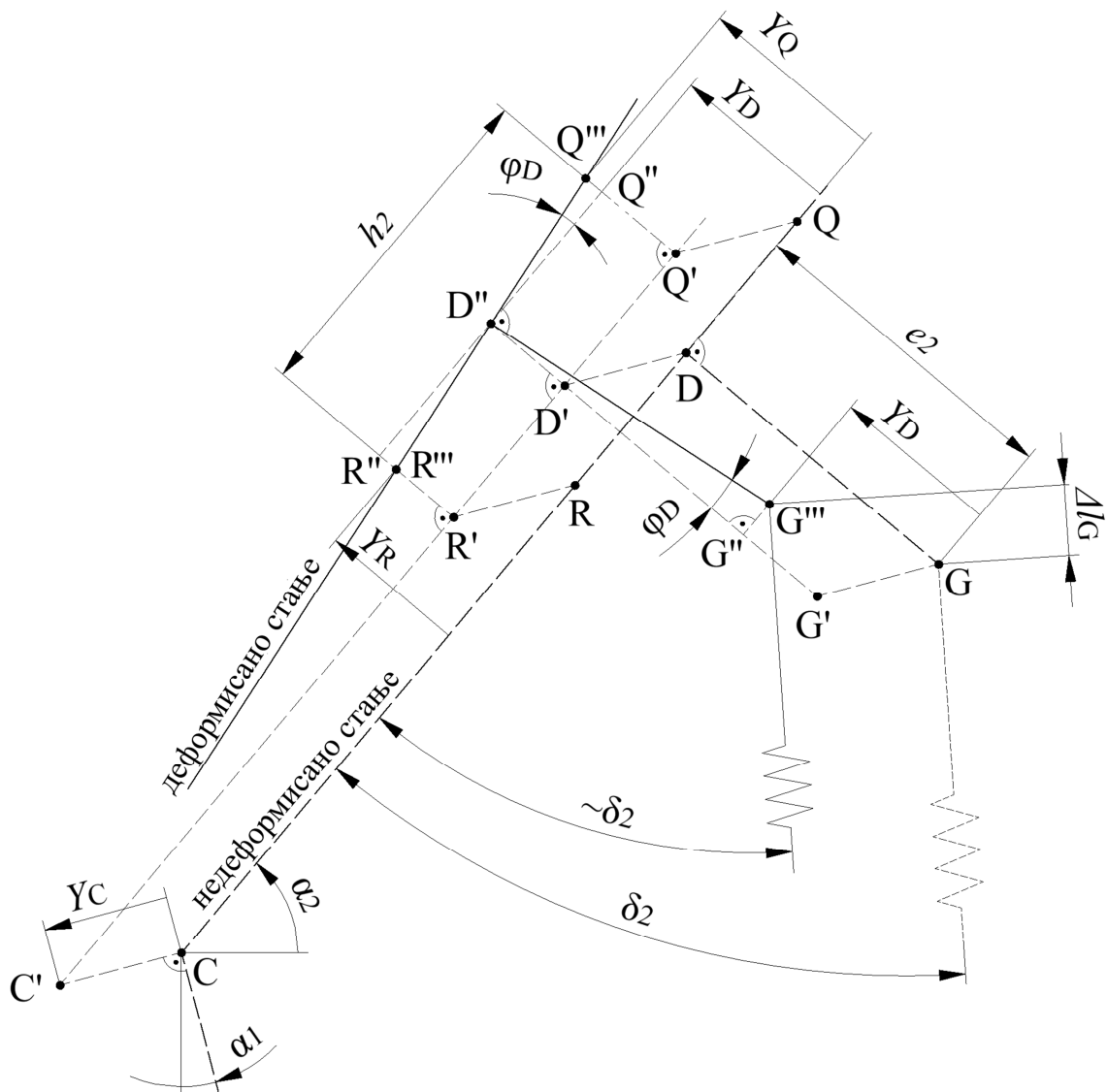
Користећи исти манир у обележавању, формиран је шематски приказ за дефинисање парцијалне зависности промене дужине опруге од померања полуге као крутог тела и угиба и нагиба код горње вешајне тачке, изражене преко генералисаних координата померања карактеристичних тачака, слика 5.8.

Поред померања чворова структуре услед деформисања, код горње вешајне тачке имамо и компоненту почетног померања целе полуге као крутог тела за величину померања згоба C.

Аналогно претходном, уводи се претпоставка о линеарној зависности међусобног растојања тачака R и Q и ексцентрицитета вешајне тачке  $e_2$ :

$$h_2 = r_2 \cdot e_2 \quad (5.22)$$

У циљу прегледности, са слике су изостављене линије симетрично постављених штапова GR и GQ. При томе, претпостављена су померања тачака у позитивном смеру локалних координатних оса.



Слика 5.8 Шематски приказ утицаја почетног померања, угиба и нагиба еластичне линије код горње вешајне тачке на промену дужине опруге динамичког модела

Претпоставимо да полуга, услед почетног померања чвора С, најпре врши translацију као круто тело за померање  $Y_C$ , а да се након тога одвијају деформабилна померања услед угиба и нагиба.

Аналогно претходном разматрању, претпоставимо да се укупно деформабилно кретање дела полуге стреле код горње вешајне тачке хидроцилиндра може посматрати као суперпозиција translације и ротације око чвора D.

Такође, као и код доње вешајне тачке, при деформисању полуге се узима да тачке R, D и Q врше померања која су приближно управна на неутралну линију након translације полуге као крутог тела.

Наиме, претпоставимо да се најпре изврши транслирање тачака R, D, Q и G у међуположаје R', D', Q' и G' за померање чвора C, које је, према усвојеној претпоставци, управно на неутралну линију стуба у недеформисаном стању. Након тога се одвијају деформабилна померања чворова полуге на идентичан начин као код стуба. Дакле, прво наступа транслација услед угиба, при којој поменуте тачке прелазе у положаје R'', D'', Q'' и G''. На крају имамо ротацију услед нагиба у тачки D и заузимање коначних положаја R''', D''', Q''' и G''', при чему се позиције D'' и D''' подударају.

Пошто је тачка G везана аксијално крутим штапом за тачку D, следи да ће њихова померања после транслације услед угиба бити једнака. За померање тачке G током ротирања усваја се иста претпоставка као за померања тачака R, D и Q, према којој је померање из G'' у G''' управно на правац G'-D'.

Дакле, као крајњи резултат имамо три компоненте померања вешајне тачке G:

- померање G-G' у правцу управном на неутралну линију стуба за  $Y_C$ ,
- померање G'-G'' по правцу G'-D' и
- померање G''-G''' управно на правас G'-D'.

Померање G-G' је једнако померању чвора C, као последњег чвора стуба и почетног чвора полуге

$$\overline{GG'} = Y_C \quad (5.23)$$

Генералисана координата дискретизованог модела за тачку D је њено померање управно на тежишну линију недеформисаног стања  $Y_D$ , које обухвата и одговарајућу пројекцију транслације полуге као крутог тела. Истовремено, то је и укупна компонента померања вешајне тачке G у том правцу, односно:

$$Y_G = Y_D \quad (5.24)$$

Друга компонента померања вешајне тачке хидроцилиндра G, у правцу локалне подужне осе полуге x, добија се као збир пројекција свих парцијалних помераја. Дакле имамо да је

$$X_G \approx -Y_C \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + e_2 \cdot tg\varphi_D \quad (5.25)$$

Сада је потребно изразити нагиб еластичне линије у тачки D преко померања карактеристичних тачака R и Q.

Уводи се апроксимација за нагиб у облику

$$tg\varphi_D = \frac{\partial y_6 \left( x_6 = \frac{h_2}{2}, t \right)}{\partial x_6} \approx \frac{1}{e_2} \left[ y_7 \left( x_7 = \frac{h_2}{2}, t \right) - y_5 \left( x_1 = l_D - \frac{h_2}{2}, t \right) \right] \quad (5.26)$$

односно, у дискретизованом облику

$$tg\varphi_D \approx \frac{Y_Q - Y_R}{h_2} = \frac{Y_Q - Y_R}{r_2 e_2} \quad (5.27)$$

Заменом израза (5.27) у израз (5.25) добија се и друга компонента померања вешајне тачке G у функцији померања чворова дискретизоване структуре као



$$X_G \approx -Y_C \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{Y_Q - Y_R}{r_2} \quad (5.28)$$

Промена дужине опруге услед померања вешајне тачке хидроцилиндра G добија се као збир пројекција компонентних померања на правац осе опруге

$$\Delta l_G = X_G \cos \delta_2 + Y_G \sin \delta_2$$

односно

$$\Delta l_G = \left( -Y_C \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{Y_Q - Y_R}{r_2} \right) \cos \delta_2 + Y_D \sin \delta_2 \quad (5.29)$$

Након дефинисања парцијалних прираштаја, можемо написати израз за укупну промену дужине опруге заменом израза (5.21) и (5.29) у израз (5.14)

$$\Delta l \approx Y_B \sin \delta_1 + \frac{\cos \delta_1}{r_1} (Y_H - Y_J) + \left( -Y_C \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{Y_Q - Y_R}{r_2} \right) \cos \delta_2 + Y_D \sin \delta_2 \quad (5.30)$$

Коначно, после извесног сређивања, тражена функционална зависност силе хидроцилиндра од генералисаних координата, односно, померања карактеристичних чворова дискретизоване структуре манипулатора, има следећи облик:

$$F_C \approx c \left[ \begin{array}{c} \frac{Y_H \cos \delta_1}{r_1} + Y_B \sin \delta_1 - \frac{Y_J \cos \delta_1}{r_1} - \\ -Y_C \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 - \frac{Y_R \cos \delta_2}{r_2} + Y_D \sin \delta_2 + \frac{Y_Q \cos \delta_2}{r_2} \end{array} \right] \quad (5.31)$$

Одређивањем аналитичких израза за силу у хидроцилиндру  $F_C$  и углове које он заклапа са подужним осама стуба и полуге у функцији генералисаних и конфигурационих координата, стекли су се услови за дефинисање граничних услова на крајевима секција структуре зглобног механизма.

## 5.5 Дефинисање граничних услова у карактеристичним тачкама зглобног дела стреле у аналитичком и дискретизованом облику

Карактеристичне тачке, у које улазе еластични ослонац, крајеви лакких штапова код вешајних тачака, зглоб и врх стреле, деле целу целу структуру зглобног манипулатора на укупно осам секција, у оквиру којих су функције динамичких еластичних еластичних линија диференцијабилне. Свака од секција има сопствени локални координатни систем  $x_i y_i$ ,  $i=, \dots, 8$ , где су осе  $x_i$  подужне, са координатним почетком у крајњој тачки претходне секције, идући од ослонца ка врху стреле, слика 5.2.

Прорачунски модел зглобног манипулатора, допуњен претпостављеним утицајима силе хидроцилиндра у карактеристичним тачкама дат је на слици 5.9. Дужина целе структуре се дискретизује кораком дужине  $s$  на укупно  $N$  елементарних делова, при чему настаје исто толико покретних тачака (чворова). Дакле, имамо да је

$$s = \frac{L}{N} = \frac{l_1 + l_2}{N} \quad (5.32)$$

У циљу прегледности будућих израза, усвојиће се да редни бројеви граничних чворова носе ознаку самих чворова:

$$H = \frac{l_b - \frac{h_1}{2}}{s}; B = \frac{l_b}{s}; J = \frac{l_b + \frac{h_1}{2}}{s}; C = \frac{l_1}{s}; R = \frac{l_1 + l_D - \frac{h_2}{2}}{s}; D = \frac{l_1 + l_D}{s}; Q = \frac{l_1 + l_D + \frac{h_2}{2}}{s}; P = N = \frac{L}{s} = \frac{l_1 + l_2}{s}. \quad (5.33)$$

### 5.5.1 Гранични услови у еластичном ослонцу

На ослоњеном крају, функција померања прве секције  $y_1(x_1, t)$  има вредност нула за све време кретања, док нагиб еластичне линије произилази из односа између момента савијања и крутости ослонца, односно, крутости флексионе опруге. У аналитичком облику то је

$$y_1(x_1, t) = 0, x_1 = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial y_1(x_1, t)}{\partial x_1} = \frac{M(x_1, t)}{k} = \frac{E}{k} I_1 \frac{\partial^2 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^2}, x_1 = 0 \quad (5.35)$$

односно

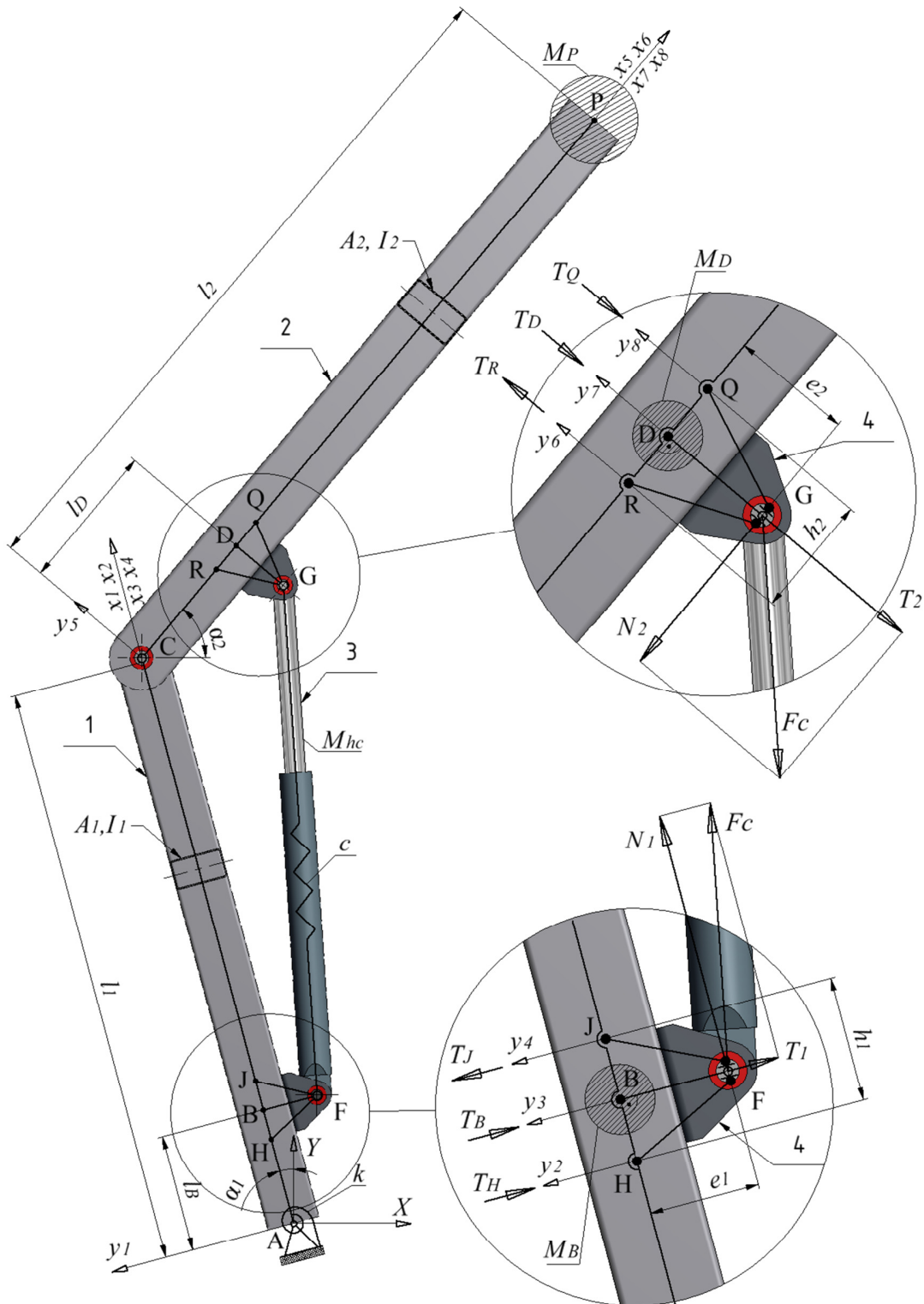
$$Y_1(0) = 0 \quad (5.36)$$

$$Y_1'(0) = \frac{EI_1}{k} Y_1''(0) \quad (5.37)$$

Користећи апроксимативне изразе (5.4) и (5.5), дискретизован облик ових граничних услова гласе

$$Y_0 = 0 \quad (5.38)$$

$$Y_{-1}^f = -\frac{2EI_1 - ks}{2EI_1 + ks} Y_1 \quad (5.39)$$



Слика 5.9 Прорачунски модел дво-полужног флексибилног манипулатора са сведеним утицајем силе у хидроцилиндру у карактеристичним тачкама

## 5.5.2 Гранични услови у тачки Н

Тачка Н је граница домена за парцијалне функције  $y_1(x_1)$  и  $y_2(x_2)$  динамичке еластичне линије. Угиб, нагиб и момент савијања пре и после тачке Н остају исти, при чему имамо скок трансверзалне силе која је настала разлагањем концентрисаног момента савијања.

Наведени момент савијања се јавља дејством аксијалне компоненте силе хидроцилиндра на потегу ексцентрицитета вешајне тачке F у односу на тежишну линију стуба. Интезитет ове трансверзалне силе износи

$$T_H = \frac{N_1 \cdot e_1}{h_1} = \frac{F_c \cos \delta_1 e_1}{r_1 e_1} = \frac{F_c \cos \delta_1}{r_1} \quad (5.40)$$

Поштујући конвенцију о позитивним смеровима пресечних величина елементарног делића греде код савијања датих на слици 5.5а, гранични услови за тачку Н у погледу угиба, нагиба, момента савијања и трансверзалне силе у аналитичком облику гласе респективно

$$Y_1 \left( l_B - \frac{h_1}{2} \right) = Y_2 (0) \quad (5.41)$$

$$Y_1' \left( l_B - \frac{h_1}{2} \right) = Y_2' (0) \quad (5.42)$$

$$M_1 \left( l_B - \frac{h_1}{2} \right) = M_2 (0) \quad (5.43)$$

$$T_1 \left( l_B - \frac{h_1}{2} \right) = T_2 (0) - T_H \quad (5.44)$$

Имајући у виду познате аналитичке зависности између момента савијања и трансверзалне силе и одговарајућих извода функције еластичне линије, услови по моменту и сили добијају следећи облик респективно

$$EI_1 Y_1'' \left( l_B - \frac{h_1}{2} \right) = EI_1 Y_2'' (0) \quad (5.45)$$

$$-EI_1 Y_1''' \left( l_B - \frac{h_1}{2} \right) = -EI_1 Y_2''' (0) - T_H \quad (5.46)$$

Након замене одговарајућих апроксимативних израза за изводе функције еластичне линије (5.4), (5.5) и (5.6), изведених применом методе централних коначних разлика, уз означавање фиктивних померања сагласно слици 5.4, гранични услови за нагиб, момент и силу попримају дискретизован облик респективно

$$\frac{-Y_{H-1}^f + Y_{H+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{H-1}^f + Y_{H+1}^f}{2s} \quad (5.47)$$

$$EI_1 \frac{Y_{H-1} - 2Y_H + Y_{H+1}^f}{s^2} = EI_1 \frac{Y_{H-1}^f - 2Y_H + Y_{H+1}}{s^2} \quad (5.48)$$

$$\frac{-Y_{H-2} + 2Y_{H-1} - 2Y_{H+1}^f + Y_{H+2}^f}{2s^3} = \frac{-Y_{H-2}^f + 2Y_{H-1}^f - 2Y_{H+1} + Y_{H+2}}{2s^3} + \frac{T_H}{EI_1} \quad (5.49)$$

Комбиновањем последње три дискретизована гранична услова, добијају се следеће једначине

$$Y_{H+1}^f = Y_{H+1} \quad (5.50)$$

$$Y_{H-1}^f = Y_{H-1} \quad (5.51)$$

$$-Y_{H-2} + Y_{H+2}^f = -Y_{H-2}^f + Y_{H+2} + \frac{2T_H s^3}{EI_1} \quad (5.52)$$

Да би фиктивна померања  $Y_{H+2}^f$  и  $Y_{H-2}^f$  изразили преко померања реалних чворова, поред израза (5.52), неопходна је још једна једначина која их повезује. Ову везу добијамо развијањем првог услова по угибу у дискретизованом облику. Другим речима, та веза проистиче из чињенице да домени функција  $Y_1(x_1)$  и  $Y_2(x_2)$  деле граничну тачку Н, односно, да је њено померање исто за оба локална координатна система.

Дискретизоване једначине за померање чвора Н, изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{H-2} - 4Y_{H-1} + 6Y_H - 4Y_{H+1}^f + Y_{H+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_H \quad (5.53)$$

$$Y_{H-2}^f - 4Y_{H-1}^f + 6Y_H - 4Y_{H+1} + Y_{H+2} = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_H \quad (5.54)$$

Изједначавањем левих страна ових једначина, добија се неопходна веза која затвара локални систем једначина

$$Y_{H-2} + Y_{H+2}^f = Y_{H-2}^f + Y_{H+2} \quad (5.55)$$

Комбиновањем израза (5.52) и (5.55) решавају се и преостала два фиктивна померања.

Ако се усвоји правило да се приликом формирања система једначина граничног проблема за целу структуру дискретизована једначина за померање граничног чвора формира преко функције еластичне линије претходне секције (са леве стране), онда је неопходан само израз за фиктивно померање и  $Y_{H+2}^f$ , које гласи

$$Y_{H+2}^f = Y_{H+2} + \frac{T_H s^3}{EI_1} \quad (5.56)$$

### 5.5.3 Гранични услови у тачки В

Тачка В је граница домена за парцијалне функције  $y_2(x_2)$  и  $y_3(x_3)$  динамичке еластичне линије. Угиб, нагиб и момент савијања пре и после тачке В остају исти, при чему имамо скок трансверзалне силе која представља суперпозицију трансверзалне компоненте силе хидроцилиндра и инерцијалне силе концентрисане масе  $M_B$ .

Трансверзална компонента силе хидроцилиндра у вешајној тачки F, која се посредством крутог штапа F-B преноси у тачку В на стуб, има интезитет

$$T_B = F_c \sin \delta_1 \quad (5.57)$$

Поштујући конвенцију о позитивним смеровима пресечних величина елементарног делића греде код савијања датих на слици 5.5а, гранични услови за тачку В у погледу угиба, нагиба, момента савијања и трансверзалне силе у аналитичком облику гласе респективно

$$Y_2\left(\frac{h_1}{2}\right) = Y_3(0) \quad (5.58)$$

$$Y_2'\left(\frac{h_1}{2}\right) = Y_3'(0) \quad (5.59)$$

$$M_2\left(\frac{h_1}{2}\right) = M_3(0) \quad (5.60)$$

$$T_2\left(\frac{h_1}{2}\right) = T_3(0) - T_B + M_B Y_2\left(\frac{h_1}{2}\right) \omega^2 \quad (5.61)$$

Имајући у виду познате аналитичке зависности између момента савијања и трансверзалне силе и одговарајућих извода функције еластичне линије, услови по моменту и сили добијају следећи облик респективно

$$EI_1 Y_2''\left(\frac{h_1}{2}\right) = EI_1 Y_3''(0) \quad (5.62)$$

$$-EI_1 Y_2'''\left(\frac{h_1}{2}\right) = -EI_1 Y_3'''(0) - T_B + M_B Y_2\left(\frac{h_1}{2}\right) \omega^2 \quad (5.63)$$

Након замене одговарајућих апроксимативних израза за изводе функције еластичне линије (5.4), (5.5) и (5.6), изведених применом методе централних коначних разлика, уз означавање фиктивних померања сагласно слици 5.4, гранични услови за нагиб, момент и силу попримају дискретизован облик респективно

$$\frac{-Y_{B-1}^f + Y_{B+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{B-1}^f + Y_{B+1}^f}{2s} \quad (5.64)$$

$$EI_1 \frac{Y_{B-1} - 2Y_B + Y_{B+1}}{s^2} = EI_1 \frac{Y_{B-1}^f - 2Y_B + Y_{B+1}}{s^2} \quad (5.65)$$

$$\frac{-Y_{B-2} + 2Y_{B-1} - 2Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f}{2s^3} = \frac{-Y_{B-2}^f + 2Y_{B-1}^f - 2Y_{B+1} + Y_{B+2}}{2s^3} + \frac{T_B}{EI_1} - M_B \omega^2 Y_B \quad (5.66)$$

Комбиновањем последње три дискретизована гранична услова, добијају се следеће једначине

$$Y_{B+1}^f = Y_{B+1} \quad (5.67)$$

$$Y_{B-1}^f = Y_{B-1} \quad (5.68)$$

$$-Y_{B-2} + Y_{B+2}^f = -Y_{B-2}^f + Y_{B+2} + \frac{2T_B s^3}{EI_1} - \frac{2M_B \omega^2 s^3}{EI_1} Y_B \quad (5.69)$$

Да би фиктивна померања  $Y_{B+2}^f$  и  $Y_{B-2}^f$  изразили преко померања реалних чворова, поред израза (5.69), неопходна је још једна једначина која их повезује. Ову везу добијамо развијањем првог услова по угибу у дискретизованом облику. Другим речима, та веза проистиче из чињенице да домени функција  $Y_2(x_2)$  и  $Y_3(x_3)$  деле граничну тачку В, односно, да је њено померање исто за оба локална координатна система.

Дискретизоване једначине за померање чвора В, изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_B \quad (5.70)$$

$$Y_{B-2}^f - 4Y_{B-1}^f + 6Y_B - 4Y_{B+1} + Y_{B+2} = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_B \quad (5.71)$$

Изједначавањем левих страна ових једначина, добија се неопходна веза која затвара локални систем једначина

$$Y_{B-2} + Y_{B+2}^f = Y_{B-2}^f + Y_{B+2} \quad (5.72)$$

Комбиновањем израза (5.69) и (5.72) решавају се и преостала два фиктивна померања.

Ако се усвоји правило да се приликом формирања система једначина граничног проблема за целу структуру дискретизована једначина за померање граничног чвора формира преко функције еластичне линије претходне секције (са леве стране), онда је неопходан само израз за фиктивно померање и  $Y_{B+2}^f$ , које гласи

$$Y_{B+2}^f = Y_{B+2} + \frac{T_B s^3}{EI_1} - \frac{M_B \omega^2 s^3}{EI_1} Y_B \quad (5.73)$$

### 5.5.4 Гранични услови у тачки Ј

Дефинисање граничних услова у тачки Ј се изводи на аналоган начин као што је то урађено код тачке Н, с тим што је смер трансверзалне силе супротан.

Тачка Ј је граница домена за парцијалне функције  $y_3(x_3)$  и  $y_4(x_4)$  динамичке еластичне линије. Угиб, нагиб и момент савијања пре и после тачке Ј остају исти, при чему имамо скок трансверзалне силе која је настала разлагањем концентрисаног момента савијања.

Наведени момент савијања се јавља дејством аксијалне компоненте силе хидроцилиндра на потегу ексцентрицитета вешајне тачке F у односу на тежишну линију стуба. Интезитет ове трансверзалне силе износи

$$T_J = \frac{N_1 \cdot e_1}{h_1} = \frac{F_c \cos \delta_1 e_1}{r_1 e_1} = \frac{F_c \cos \delta_1}{r_1} \quad (5.74)$$

Поштујући конвенцију о позитивним смеровима пресечних величина елементарног делића греде код савијања датих на слици 5.5а, гранични услови за тачку Ј у погледу угиба, нагиба, момента савијања и трансверзалне силе у аналитичком облику гласе респективно

$$Y_3 \left( \frac{h_1}{2} \right) = Y_4(0) \quad (5.75)$$

$$Y_3' \left( \frac{h_1}{2} \right) = Y_4'(0) \quad (5.76)$$

$$M_3 \left( \frac{h_1}{2} \right) = M_4(0) \quad (5.77)$$

$$T_3 \left( \frac{h_1}{2} \right) = T_4(0) + T_J \quad (5.78)$$

Имајући у виду познате аналитичке зависности између момента савијања и трансверзалне силе и одговарајућих извода функције еластичне линије, услови по моменту и сили добијају следећи облик респективно

$$EI_1 Y_3'' \left( \frac{h_1}{2} \right) = EI_1 Y_4''(0) \quad (5.79)$$

$$-EI_1 Y_3''' \left( \frac{h_1}{2} \right) = -EI_1 Y_4'''(0) + T_J \quad (5.80)$$

Након замене одговарајућих апроксимативних израза за изводе функције еластичне линије (5.4), (5.5) и (5.6), изведених применом методе централних коначних разлика, уз означавање фиктивних померања сагласно слици 5.4, гранични услови за нагиб, момент и силу попримају дискретизован облик респективно



$$\frac{-Y_{J-1} + Y_{J+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{J-1}^f + Y_{J+1}}{2s} \quad (5.81)$$

$$EI_1 \frac{Y_{J-1} - 2Y_J + Y_{J+1}^f}{s^2} = EI_1 \frac{Y_{J-1}^f - 2Y_J + Y_{J+1}}{s^2} \quad (5.82)$$

$$\frac{-Y_{J-2} + 2Y_{J-1} - 2Y_{J+1}^f + Y_{J+2}^f}{2s^3} = \frac{-Y_{J-2}^f + 2Y_{J-1}^f - 2Y_{J+1} + Y_{J+2}}{2s^3} - \frac{T_J}{EI_1} \quad (5.83)$$

Комбиновањем последње три дискретизована гранична услова, добијају се следеће једначине

$$Y_{J+1}^f = Y_{J+1} \quad (5.84)$$

$$Y_{J-1}^f = Y_{J-1} \quad (5.85)$$

$$-Y_{J-2} + Y_{J+2}^f = -Y_{J-2}^f + Y_{J+2} - \frac{2T_J s^3}{EI_1} \quad (5.86)$$

Да би фиктивна померања  $Y_{J+2}^f$  и  $Y_{J-2}^f$  изразили преко померања реалних чворова, поред израза (5.86), неопходна је још једна једначина која их повезује. Ову везу добијамо развијањем првог услова по угибу у дискретизованом облику. Другим речима, та веза проистиче из чињенице да домени функција  $Y_3(x_3)$  и  $Y_4(x_4)$  деле граничну тачку J, односно, да је њено померање исто за оба локална координатна система.

Дискретизоване једначине за померање чвора J, изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{J-2} - 4Y_{J-1} + 6Y_J - 4Y_{J+1}^f + Y_{J+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_J \quad (5.87)$$

$$Y_{J-2}^f - 4Y_{J-1}^f + 6Y_J - 4Y_{J+1} + Y_{J+2} = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_J \quad (5.88)$$

Изједначавањем левих страна ових једначина, добија се неопходна веза која затвара локални систем једначина

$$Y_{J-2} + Y_{J+2}^f = Y_{J-2}^f + Y_{J+2} \quad (5.89)$$

Комбиновањем израза (5.86) и (5.89) решавају се и преостала два фиктивна померања.

Ако се усвоји правило да се приликом формирања система једначина граничног проблема за целу структуру дискретизована једначина за померање граничног чвора формира преко функције еластичне линије претходне секције (са леве стране), онда је неопходан само израз за фиктивно померање и  $Y_{J+2}^f$ , које гласи

$$Y_{J+2}^f = Y_{J+2} - \frac{T_J s^3}{EI_1} \quad (5.90)$$

### 5.5.5 Гранични услови у зглобу С

Тачка С је граница домена за парцијалне функције  $y_4(x_4)$  и  $y_5(x_5)$  динамичке еластичне линије. Дефинисање граничних услова у овој тачки унеколико се разликује од изложених поступака за претходне карактеристичне тачке из два разлога:

- веза између секција је зглобна;
- координатни системи секција су под углом који је одређен разликом конфигурационих угловних координата  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Наведене специфичности овог чвора дискретизоване структуре фундаментално одређују природу граничних услова.

Најпре, можемо написати везу између померања у локалним координатним системима, тј. гранични услов по угибу по којем се померање зглобне тачке у координатном систему  $x_5y_5$  добија као одговарајућа компонента укупног померања у координатном систему  $x_4y_4$

$$Y_5(0) = Y_4 \left( l_1 - l_B - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5.91)$$

Уместо граничног услова по нагибу еластичних линија, који мора бити искључен услед природе зглобне везе, постављају се два гранична услова по моменту савијања и то за оба координатна система

$$M_4 \left( l_1 - l_B - \frac{h_1}{2} \right) = 0 \quad (5.92)$$

$$M_5(0) = 0 \quad (5.93)$$

Код услова по трансверзалној сили, имамо да је укупна трансверзална сила у чвору С, као крајњем чвору стуба, једнака суперпозицији пројекција свих сила на полузи на правац управан на подужну осу стуба. Другачије речено, укупна трансверзална сила у крајњој тачки стуба зглобног манипулатора једнака је збиру пројекција трансверзалне и аксијалне силе полуге у њеној почетној тачки. Аксијална сила полуге у тачки С обухвата силу  $N_2$ , која је добијена разлагањем силе хидроцилиндра у горњој вешајној тачки G, и пројекцију инерцијалне силе од свих маса на полузи услед аксијалног убрзања полуге као крутог тела.

Поштујући конвенцију о позитивним смеровима пресечних величина елементарног делића греде код савијања датих на слици 5.5а и за претпостављене смерове померања, гранични услов за тачку С за трансверзалну силу у аналитичком облику гласи

$$\begin{aligned} T_4 \left( l_1 - l_B - \frac{h_1}{2} \right) = & T_5(0) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + N_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \\ & + MY_4 \left( l_1 - l_B - \frac{h_1}{2} \right) \omega^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (5.94)$$

где је

$$M = M_p + M_D + m_2 l_2 \quad (5.95)$$

укупна маса на полузи, која се састоји од масе корисног терета  $M_p$ , концентрисане масе у тачки D -  $M_D$  и сопствене масе полуге  $m_2 l_2$ .

Имајући у виду познате аналитичке зависности између момента савијања и трансверзалне силе и одговарајућих извода функције еластичне линије, услови по моментима и трансверзалној сили добијају следећи облик респективно

$$Y_4'''' \left( l_1 - l_B - \frac{h_1}{2} \right) = 0 \quad (5.96)$$

$$Y_5''(0) = 0 \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 Y_4'''' \left( l_1 - l_B - \frac{h_1}{2} \right) &= -EI_2 Y_5''''(0) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + N_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \\ &+ M Y_4 \left( l_1 - l_B - \frac{h_1}{2} \right) \omega^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (5.98)$$

С обзром на усвојено правило да се дискретизована једначина померања граничног чвора изражава преко функције еластичне линије у претходном координатном систему, померање зглобне тачке у координатном систему  $x_5 y_5$  ћемо, у циљу разграничења, прогласити фиктивним.

Након замене одговарајућих апроксимативних израза за изводе функције еластичне линије (5.4), (5.5) и (5.6), изведених применом методе централних коначних разлика, уз означавање фиктивних померања сагласно слици 5.4, гранични услови за померање, моменте и силу попримају дискретизован облик респективно

$$Y_C^f = Y_C \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5.99)$$

$$\frac{Y_{C-1} - 2Y_C + Y_{C+1}^f}{s^2} = 0 \quad (5.100)$$

$$\frac{Y_{C-1}^f - 2Y_C^f + Y_{C+1}}{s^2} = 0 \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} -EI_1 \frac{-Y_{C-2} + 2Y_{C-1} - 2Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f}{2s^3} &= -EI_2 \frac{-Y_{C-2}^f + 2Y_{C-1}^f - 2Y_{C+1} + Y_{C+2}}{2s^3} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \\ &+ N_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + M Y_C \omega^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (5.102)$$

Из једначина (5.99), (5.100) и (5.101) се добијају једначине за следећа фиктивна померања

$$Y_{C+1}^f = 2Y_C - Y_{C-1} \quad (5.103)$$

$$Y_{C-1}^f = 2Y_C \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - Y_{C+1} \quad (5.104)$$

Заменом последња два израза у услов (5.102) добија се прва веза друга два фиктивна померања у облику

$$\begin{aligned}
& EI_2 \left[ -Y_{C-2}^f + 4Y_C \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - 4Y_{C+1} + Y_{C+2} \right] \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \\
& = EI_1 \left( -Y_{C-2} + 4Y_{C-1} - 4Y_C + Y_{C+2}^f \right) + 2s^3 N_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2s^3 M Y_C \omega^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)
\end{aligned} \quad (5.105)$$

Као и у претходним случајевима, друга веза се добија из дискретизованих једначина еластичне линије за исти зглоб у оба локална координатна система.

Имајући у виду једначину (5.99) имамо да је

$$EI_1 \frac{Y_{C-2} - 4Y_{C-1} + 6Y_C - 4Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f}{s^4} = m_1 \omega^2 Y_C \quad (5.106)$$

$$EI_2 \frac{Y_{C-2}^f - 4Y_{C-1}^f + 6Y_C \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - 4Y_{C+1} + Y_{C+2}}{s^4} = m_2 \omega^2 Y_C \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5.107)$$

Изражавањем померања  $Y_C$  из претходна два израза и изједначавањем те две једначине, добијамо други услов који затвара овај локални систем једначина у следећем облику

$$Y_{C-2}^f = \frac{I_1 m_2}{I_2 m_1} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) (Y_{C-2} - 2Y_C + Y_{C+2}^f) + 2Y_C \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - Y_{C+2} \quad (5.108)$$

Према усвојеном правилу да се приликом формирања система једначина граничног проблема за целу структуру дискретизована једначина за померање граничног чвора формира преко функције еластичне линије претходне секције (са леве стране), онда је непходан само израз за фиктивно померање и  $Y_{C+2}^f$  у функцији померања реалних чворова које гласи

$$\begin{aligned}
Y_{C+2}^f &= \frac{m_1 - m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} Y_{C-2} - \frac{4m_1}{m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} Y_{C-1} + \\
&+ \frac{m_1}{I_1 [m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)]} \left[ \frac{2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) (I_1 m_2 + I_2 m_1)}{m_1} + 4I_1 \right] Y_C - \\
&- \frac{m_1}{EI_1 [m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)]} \left[ 4EI_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) Y_{C+1} - 2EI_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) Y_{C+2} + \right. \\
&\quad \left. + 2s^3 N_D \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2s^3 M Y_C \omega^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \right]
\end{aligned} \quad (5.109)$$

### 5.5.6 Гранични услови у тачки R

Тачка R је граница домена за парцијалне функције  $y_5(x_5)$  и  $y_6(x_6)$  динамичке еластичне линије. Угиб, нагиб и момент савијања пре и после тачке R остају исти, при чему имамо скок трансверзалне силе која је настала разлагањем концентрисаног момента савијања.

Наведени момент савијања се јавља дејством аксијалне компоненте силе хидроцилиндра на потегу ексцентрицитета вешајне тачке G у односу на тежишну линију полуге. Интезитет ове трансверзалне силе износи

$$T_R = \frac{N_2 \cdot e_2}{h_2} = \frac{F_c \cos \delta_2 e_2}{r_2 e_2} = \frac{F_c \cos \delta_2}{r_2} \quad (5.110)$$

Поштујући конвенцију о позитивним смеровима пресечних величина елементарног делића греде код савијања датих на слици 5.5а, гранични услови за тачку R у погледу угиба, нагиба, момента савијања и трансверзалне силе у аналитичком облику гласе респективно

$$Y_5 \left( l_D - \frac{h_2}{2} \right) = Y_6(0) \quad (5.111)$$

$$Y_5' \left( l_D - \frac{h_2}{2} \right) = Y_6'(0) \quad (5.112)$$

$$M_5 \left( l_D - \frac{h_2}{2} \right) = M_6(0) \quad (5.113)$$

$$T_5 \left( l_D - \frac{h_2}{2} \right) = T_6(0) + T_R \quad (5.114)$$

Имајући у виду познате аналитичке зависности између момента савијања и трансверзалне силе и одговарајућих извода функције еластичне линије, услови по моменту и сили добијају следећи облик респективно

$$EI_2 Y_5'' \left( l_D - \frac{h_2}{2} \right) = EI_2 Y_6''(0) \quad (5.115)$$

$$-EI_1 Y_5''' \left( l_D - \frac{h_2}{2} \right) = -EI_2 Y_6'''(0) + T_R \quad (5.116)$$

Након замене одговарајућих апроксимативних израза за изводе функције еластичне линије (5.4), (5.5) и (5.6), изведених применом методе централних коначних разлика, уз означавање фиктивних померања сагласно слици 5.4, гранични услови за нагиб, момент и силу попримају дискретизован облик респективно

$$\frac{-Y_{R-1}^f + Y_{R+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{R-1}^f + Y_{R+1}^f}{2s} \quad (5.117)$$

$$EI_2 \frac{Y_{R-1} - 2Y_R + Y_{R+1}^f}{s^2} = EI_2 \frac{Y_{R-1}^f - 2Y_R + Y_{R+1}}{s^2} \quad (5.118)$$

$$\frac{-Y_{R-2} + 2Y_{R-1} - 2Y_{R+1}^f + Y_{R+2}^f}{2s^3} = \frac{-Y_{R-2}^f + 2Y_{R-1}^f - 2Y_{R+1} + Y_{R+2}}{2s^3} - \frac{T_R}{EI_2} \quad (5.119)$$

Комбиновањем последње три дискретизована гранична услова, добијају се следеће једначине

$$Y_{R+1}^f = Y_{R+1} \quad (5.120)$$

$$Y_{R-1}^f = Y_{R-1} \quad (5.121)$$

$$-Y_{R-2} + Y_{R+2}^f = -Y_{R-2}^f + Y_{R+2} - \frac{2T_R s^3}{EI_2} \quad (5.122)$$

Да би фиктивна померања  $Y_{R+2}^f$  и  $Y_{R-2}^f$  изразили преко померања реалних чворова, поред израза (5.122), неопходна је још једна једначина која их повезује. Ову везу добијамо развијањем првог услова по угибу у дискретизованом облику. Другим речима, та веза проистиче из чињенице да домени функција  $Y_5(x_5)$  и  $Y_6(x_6)$  деле граничну тачку R, односно, да је њено померање исто за оба локална координатна система.

Дискретизоване једначине за померање чвора R, изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{R-2} - 4Y_{R-1} + 6Y_R - 4Y_{R+1}^f + Y_{R+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_R \quad (5.123)$$

$$Y_{R-2}^f - 4Y_{R-1}^f + 6Y_R - 4Y_{R+1} + Y_{R+2} = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_R \quad (5.124)$$

Изједначавањем левих страна ових једначина, добија се непходна веза која затвара локални систем једначина

$$Y_{R-2} + Y_{R+2}^f = Y_{R-2}^f + Y_{R+2} \quad (5.125)$$

Комбиновањем израза (5.122) и (5.125) решавају се и преостала два фиктивна померања.

Ако се усвоји правило да се приликом формирања система једначина граничног проблема за целу структуру дискретизована једначина за померање граничног чвора формира преко функције еластичне линије претходне секције (са леве стране), онда је непходан само израз за фиктивно померање и  $Y_{R+2}^f$ , које гласи

$$Y_{R+2}^f = Y_{R+2} + \frac{T_R s^3}{EI_2} \quad (5.126)$$

### 5.5.7 Гранични услови у тачки D

Тачка D је граница домена за парцијалне функције  $y_6(x_6)$  и  $y_6(x_6)$  динамичке еластичне линије. Угиб, нагиб и момент савијања пре и после тачке D остају исти, при чему имамо скок трансверзалне силе која представља суперпозицију трансверзалне компоненте силе хидроцилиндра и инерцијалне силе концентрисане масе  $M_D$ .

Трансверзална компонента силе хидроцилиндра у вешајној тачки G, која се посредством крутог штапа G-D преноси у тачку D на  $\text{polugu}$ , има интезитет

$$T_D = F_c \sin \delta_2 \quad (5.127)$$

Поштујући конвенцију о позитивним смеровима пресечних величина елементарног делића греде код савијања датих на слици 5.5а, гранични услови за тачку D у погледу угиба, нагиба, момента савијања и трансверзалне силе у аналитичком облику гласе респективно

$$Y_6\left(\frac{h_2}{2}\right) = Y_7(0) \quad (5.128)$$

$$Y_6'\left(\frac{h_2}{2}\right) = Y_7'(0) \quad (5.129)$$

$$M_6\left(\frac{h_2}{2}\right) = M_7(0) \quad (5.130)$$

$$T_6\left(\frac{h_2}{2}\right) = T_7(0) - T_D + M_D Y_6\left(\frac{h_2}{2}\right) \omega^2 \quad (5.131)$$

Имајући у виду познате аналитичке зависности између момента савијања и трансверзалне силе и одговарајућих извода функције еластичне линије, услови по моменту и сили добијају следећи облик респективно

$$EI_2 Y_6''\left(\frac{h_2}{2}\right) = EI_2 Y_7''(0) \quad (5.132)$$

$$-EI_2 Y_6'''\left(\frac{h_2}{2}\right) = -EI_2 Y_7'''\left(0\right) - T_D + M_D Y_6\left(\frac{h_2}{2}\right) \omega^2 \quad (5.133)$$

Након замене одговарајућих апроксимативних израза за изводе функције еластичне линије (5.4), (5.5) и (5.6), изведених применом методе централних коначних разлика, уз означавање фиктивних померања сагласно слици 5.4, гранични услови за нагиб, момент и силу попримају дискретизован облик респективно

$$\frac{-Y_{D-1}^f + Y_{D+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{D-1}^f + Y_{D+1}^f}{2s} \quad (5.134)$$

$$EI_2 \frac{Y_{D-1} - 2Y_D + Y_{D+1}}{s^2} = EI_2 \frac{Y_{D-1}^f - 2Y_D + Y_{D+1}}{s^2} \quad (5.135)$$

$$\frac{-Y_{D-2} + 2Y_{D-1} - 2Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f}{2s^3} = \frac{-Y_{D-2}^f + 2Y_{D-1}^f - 2Y_{D+1} + Y_{D+2}}{2s^3} + \frac{T_D}{EI_2} - M_D \omega^2 Y_D \quad (5.136)$$

Комбиновањем последње три дискретизована гранична услова, добијају се следеће једначине

$$Y_{D+1}^f = Y_{D+1} \quad (5.137)$$

$$Y_{D-1}^f = Y_{D-1} \quad (5.138)$$

$$-Y_{D-2} + Y_{D+2}^f = -Y_{D-2}^f + Y_{D+2} + \frac{2T_D s^3}{EI_2} - \frac{2M_D \omega^2 s^3}{EI_2} Y_D \quad (5.139)$$

Да би фиктивна померања  $Y_{D+2}^f$  и  $Y_{D-2}^f$  изразили преко померања реалних чворова, поред израза (5.139), неопходна је још једна једначина која их повезује. Ову везу добијамо развијањем првог услова по угибу у дискретизованом облику. Другим речима, та веза проистиче из чињенице да домени функција  $Y_6(x_6)$  и  $Y_7(x_7)$  деле граничну тачку D, односно, да је њено померање исто за оба локална координатна система.

Дискретизоване једначине за померање чвора D, изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_D \quad (5.140)$$

$$Y_{D-2}^f - 4Y_{D-1}^f + 6Y_D - 4Y_{D+1} + Y_{D+2} = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_D \quad (5.141)$$

Изједначавањем левих страна ових једначина, добија се непходна веза која затвара локални систем једначина

$$Y_{D-2} + Y_{D+2}^f = Y_{D-2}^f + Y_{D+2} \quad (5.142)$$

Комбиновањем израза (5.139) и (5.142) решавају се и преостала два фиктивна померања.

Ако се усвоји правило да се приликом формирања система једначина граничног проблема за целу структуру дискретизована једначина за померање граничног чвора формира преко функције еластичне линије претходне секције (са леве стране), онда је непходан само израз за фиктивно померање и  $Y_{D+2}^f$ , које гласи

$$Y_{D+2}^f = Y_{D+2} + \frac{T_D s^3}{EI_2} - \frac{M_D \omega^2 s^3}{EI_2} Y_D \quad (5.143)$$



### 5.5.8 Гранични услови у тачки Q

Дефинисање граничних услова у тачки Q се изводи на аналоган начин као што је то урађено код тачке R, с тим што је смер трансверзалне силе супротан.

Тачка Q је граница домена за парцијалне функције  $y_7(x_7)$  и  $y_8(x_8)$  динамичке еластичне линије. Угиб, нагиб и момент савијања пре и после тачке Q остају исти, при чему имамо скок трансверзалне силе која је настала разлагањем концентрисаног момента савијања.

Наведени момент савијања се јавља дејством аксијалне компоненте силе хидроцилиндра на потегу ексцентрицитета вешајне тачке G у односу на тежишну линију полуге. Интезитет ове трансверзалне силе износи

$$T_Q = \frac{N_2 \cdot e_2}{h_2} = \frac{F_c \cos \delta_2 e_2}{r_2 e_2} = \frac{F_c \cos \delta_2}{r_2} \quad (5.144)$$

Поштујући конвенцију о позитивним смеровима пресечних величина елементарног делића греде код савијања датих на слици 5.5а, гранични услови за тачку Q у погледу угиба, нагиба, момента савијања и трансверзалне силе у аналитичком облику гласе респективно

$$Y_7 \left( \frac{h_2}{2} \right) = Y_8(0) \quad (5.145)$$

$$Y_7' \left( \frac{h_2}{2} \right) = Y_8'(0) \quad (5.146)$$

$$M_7 \left( \frac{h_2}{2} \right) = M_8(0) \quad (5.147)$$

$$T_7 \left( \frac{h_2}{2} \right) = T_8(0) - T_Q \quad (5.148)$$

Имајући у виду познате аналитичке зависности између момента савијања и трансверзалне силе и одговарајућих извода функције еластичне линије, услови по моменту и сили добијају следећи облик респективно

$$EI_2 Y_7'' \left( \frac{h_2}{2} \right) = EI_2 Y_8''(0) \quad (5.149)$$

$$-EI_2 Y_7''' \left( \frac{h_2}{2} \right) = -EI_2 Y_8'''(0) - T_Q \quad (5.150)$$

Након замене одговарајућих апроксимативних израза за изводе функције еластичне линије (5.4), (5.5) и (5.6), изведених применом методе централних коначних разлика, уз означавање фиктивних померања сагласно слици 5.4, гранични услови за нагиб, момент и силу попримају дискретизован облик респективно

$$\frac{-Y_{Q-1} + Y_{Q+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{Q-1}^f + Y_{Q+1}}{2s} \quad (5.151)$$

$$EI_2 \frac{Y_{Q-1} - 2Y_Q + Y_{Q+1}^f}{s^2} = EI_2 \frac{Y_{Q-1}^f - 2Y_Q + Y_{Q+1}}{s^2} \quad (5.152)$$

$$\frac{-Y_{Q-2} + 2Y_{Q-1} - 2Y_{Q+1}^f + Y_{Q+2}^f}{2s^3} = \frac{-Y_{Q-2}^f + 2Y_{Q-1}^f - 2Y_{Q+1} + Y_{Q+2}}{2s^3} + \frac{T_R}{EI_2} \quad (5.153)$$

Комбиновањем последње три дискретизована гранична услова, добијају се следеће једначине

$$Y_{Q+1}^f = Y_{Q+1} \quad (5.154)$$

$$Y_{Q-1}^f = Y_{Q-1} \quad (5.155)$$

$$-Y_{Q-2} + Y_{Q+2}^f = -Y_{Q-2}^f + Y_{Q+2} + \frac{2T_Q s^3}{EI_2} \quad (5.156)$$

Да би фиктивна померања  $Y_{Q+2}^f$  и  $Y_{Q-2}^f$  изразили преко померања реалних чворова, поред израза (5.156), неопходна је још једна једначина која их повезује. Ову везу добијамо развијањем првог услова по угибу у дискретизованом облику. Другим речима, та веза проистиче из чињенице да домени функција  $Y_7(x_8)$  и  $Y_8(x_8)$  деле граничну тачку Q, односно, да је њено померање исто за оба локална координатна система.

Дискретизоване једначине за померање чвора Q, изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{Q-2} - 4Y_{Q-1} + 6Y_Q - 4Y_{Q+1}^f + Y_{Q+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_Q \quad (5.157)$$

$$Y_{Q-2}^f - 4Y_{Q-1}^f + 6Y_Q - 4Y_{Q+1} + Y_{Q+2} = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_Q \quad (5.158)$$

Изједначавањем левих страна ових једначина, добија се неопходна веза која затвара локални систем једначина

$$Y_{Q-2} + Y_{Q+2}^f = Y_{Q-2}^f + Y_{Q+2} \quad (5.159)$$

Комбиновањем израза (5.156) и (5.159) решавају се и преостала два фиктивна померања.

Ако се усвоји правило да се приликом формирања система једначина граничног проблема за целу структуру дискретизована једначина за померање граничног чвора формира преко функције еластичне линије претходне секције (са леве стране), онда је неопходан само израз за фиктивно померање и  $Y_{Q+2}^f$ , које гласи

$$Y_{Q+2}^f = Y_{Q+2} + \frac{T_Q s^3}{EI_2} \quad (5.160)$$

### 5.5.9 Гранични услови на врху полуге у тачки $P$

Под претпоставком да је терет, укупне масе  $M_P$ , директно везан за врх стреле, гранични услови за теоријску вешајну тачку  $P$  тичу се момента савијања и трансверзалне силе.

Ако се занемари сопствени обртни момент инерције ове концентрисане масе око осе нормалне на раван осциловања, имамо да је момент савијања у тачки  $P$  једнак нули:

$$M_8 \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2} \right) = 0 \quad (5.161)$$

Користећи познату везу момента савијања и извода функције еластичне линије имамо

$$EI_2 Y_8'' \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2} \right) = 0$$

што у дискретизованом облику гласи

$$Y_{P+1}^f = 2Y_P - Y_{P-1} \quad (5.162)$$

Трансверзална сила у вешајној тачки  $P$  потиче од пројекције инерцијалне силе концентрисане масе терета  $M_P$  на правац управан на неутралну линију полуге. Поштујући раније изложену знаковну конвенцију, имамо да је

$$T_8 \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2}, t \right) = -M_P \frac{\partial^2 y_8 \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2}, t \right)}{\partial t^2} \quad (5.163)$$

Разлагајући функције трансверзалне силе и функције померања на производ подфункције која зависи од положаја и подфункције времена, након сређивања добијамо једнакост

$$T_8 \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2} \right) = M \omega^2 Y_8 \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2} \right) \quad (5.164)$$

Користећи познату везу трансверзалне силе и извода функције померања, имамо израз

$$-EI_2 Y_8''' \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2} \right) = M \omega^2 Y_8 \left( l_2 - l_D - \frac{h_2}{2} \right) \quad (5.165)$$

чији је дискретизован облик

$$\frac{-Y_{P-2} + 2Y_{P-1} - 2Y_{P+1}^f + Y_{P+2}^f}{2s^3} = -\frac{M \omega^2}{EI_2} Y_P \quad (5.166)$$

Конечан израз за фиктивно померање  $Y_{P+2}^f$  у функцији реалних померања око теоријске вешајне тачке гласи

$$Y_{P+2}^f = Y_{P-2} - 4Y_{P-1} + \left( 4 - \frac{2M_P \omega^2 s^3}{EI_2} \right) Y_P \quad (5.167)$$

Закључно са једначином (6.75), дефинисана су сва фиктивна померања која ће фигурирати у једначинама за померања реалних чворова структуре.

## 5.6 Формирање система алгебарских једначина по померањима реалних чворова зглобног манипулатора

Након дефинисања свих фиктивних померања око карактеристичних тачака структуре зглобног манипулатора као граничних тачака секција, може се приступити формирању система линеарних алгебарских једначина по померањима реалних чворова  $Y_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Ова померања формирају сопствене облике осциловања, при чему  $\lambda = \omega^2 s^4$  представља сопствену (карактеристичну) вредност и игра улогу параметра.

За сваки реалан чвор структуре треба написати дискретизоване једначине еластичне линије у облику

$$Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2} = \frac{m_i \lambda}{EI_i} Y_i, \quad i=1, \dots, N$$

и елиминисати фиктивна померања који фигуришу у њима, помоћу израза изведених у претходном излагању.

Дискретизована једначина за први чвор структуре гласи

$$Y_{-1}^f - 4Y_0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3 = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_1$$

Заменом једначина (5.38) и (5.39)

$$Y_0 = 0$$

$$Y_{-1}^f = -\frac{2EI_1 - ks}{2EI_1 + ks} Y_1$$

у израз (5.168) добија се коначан облик за први чвор

$$B_1 \left[ \left( 6 - \frac{2EI_1 - ks}{2EI_1 + ks} \right) Y_1 - 4Y_2 + Y_3 \right] = \lambda Y_1 \quad (5.168)$$

где је  $B_1 = \frac{EI_1}{m_1}$ .

За  $i=2$  имамо полазну једначину

$$Y_0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4 = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_2$$

која, после замене израза за  $Y_0$  добија коначан облик

$$B_1 (-4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4) = \lambda Y_2 \quad (5.169)$$

За интервал чворова  $i=3 \div H-1$  имамо исти облик дискретизоване једначине без фиктивних померања

$$B_1 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.170)$$

За  $i = H$  имамо полазну једначину

$$Y_{H-2} - 4Y_{H-1} + 6Y_H - 4Y_{H+1}^f + Y_{H+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_H$$

Позивајући изразе за фиктивна померања (5.50) и (5.56)

$$Y_{H+1}^f = Y_{H+1}$$

$$Y_{H+2}^f = Y_{H+2} + \frac{T_H s^3}{EI_1}$$

израз за трансверзалну силу (5.40)

$$T_H = \frac{F_c \cos \delta_1}{r_1}$$

и укупну силу у хидроцилиндру у функцији померања карактеристичних тачака структуре (5.31)

$$F_C \approx c \left[ \begin{array}{c} \frac{Y_H \cos \delta_1}{r_1} + Y_B \sin \delta_1 - \frac{Y_J \cos \delta_1}{r_1} - \\ -Y_C \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 - \frac{Y_R \cos \delta_2}{r_2} + Y_D \sin \delta_2 + \frac{Y_Q \cos \delta_2}{r_2} \end{array} \right]$$

добила се коначан облик

$$B_1 \left[ \begin{array}{c} Y_{H-2} - 4Y_{H-1} + (6 + \frac{B_2 \cos \delta_1}{r_1}) Y_H - 4Y_{H+1} + Y_{H+2} + B_2 \sin \delta_1 Y_B - \frac{B_2 \cos \delta_1}{r_1} Y_J - \\ -B_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 Y_C - \frac{B_2 \cos \delta_2}{r_2} Y_R + B_2 \sin \delta_2 Y_D + \frac{B_2 \cos \delta_2}{r_2} Y_Q \end{array} \right] = \lambda Y_H \quad (5.171)$$

За интервал чворова  $i = H + 1 \div B - 1$  имамо исти облик дискретизоване једначине

$$B_1 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.172)$$

За  $i = B$  имамо полазну једначину

$$Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_B$$

Након замене израза за фиктивна померања (5.67) и (5.73)

$$Y_{B+1}^f = Y_{B+1}$$

$$Y_{B+2}^f = Y_{B+2} + \frac{T_B s^3}{EI_1} - \frac{M_B \omega^2 s^3}{EI_1} Y_B$$

и израза за трансверзалну силу (5.57)

$$T_B = F_c \sin \delta_1$$

добила се коначан израз

$$B_4 \left[ \begin{array}{l} \frac{B_3 \cos \delta_1}{r_1} Y_H + Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + (6 + B_3 \sin \delta_1) Y_B - 4Y_{B+1} + Y_{B+2} - \frac{B_3 \cos \delta_1}{r_1} Y_J - \\ - B_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 Y_C - \frac{B_3 \cos \delta_2}{r_2} Y_R + B_3 \sin \delta_2 Y_D + \frac{B_3 \cos \delta_2}{r_2} Y_Q \end{array} \right] = \lambda Y_B \quad (5.173)$$

где је  $B_3 = \frac{c \sin \delta_1 s^3}{EI_1}$  и  $B_4 = \frac{sEI_1}{m_1 s + M_B}$ .

За интервал чворова  $i = B + 1 \div J - 1$  имамо исти облик дискретизоване једначине

$$B_1 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.174)$$

За чвор  $i = J$  имамо полазну једначину

$$Y_{J-2} - 4Y_{J-1} + 6Y_J - 4Y_{J+1}^f + Y_{J+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_J$$

Позивајући изразе за фиктивна померања (5.84) и (5.90)

$$Y_{J+1}^f = Y_{J+1}$$

$$Y_{J+2}^f = Y_{J+2} - \frac{T_J s^3}{EI_1}$$

и израза за трансверзалну силу (5.74)

$$T_J = \frac{F_c \cos \delta_1}{r_1}$$

добија се коначан израз

$$B_1 \left[ \begin{array}{l} -\frac{B_2 \cos \delta_1}{r_1} Y_H - B_2 \sin \delta_1 Y_B + Y_{J-2} - 4Y_{J-1} + (6 + \frac{B_2 \cos \delta_1}{r_1}) Y_J - 4Y_{J+1} + \\ + Y_{J+2} + B_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 Y_C + \frac{B_2 \cos \delta_2}{r_2} Y_R - B_2 \sin \delta_2 Y_D - \frac{B_2 \cos \delta_2}{r_2} Y_Q \end{array} \right] = \lambda Y_J \quad (5.175)$$

За интервал чворова  $i = J + 1 \div C - 2$  имамо исти облик дискретизоване једначине

$$B_1 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.176)$$

Дискретизована једначина за чвор  $i = C - 1$  гласи

$$Y_{C-3} - 4Y_{C-2} + 6Y_{C-1} - 4Y_C + Y_{C+1}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_{C-1}$$

Позивајући израз за фиктивно померање (5.103), добија се коначан облик

$$B_1 (Y_{C-3} - 4Y_{C-2} + 5Y_{C-1} - 2Y_C) = \lambda Y_{C-1} \quad (5.177)$$

Имајући у виду усвојено правило да се дискретизована једначина граничног чвора изражава преко функције претходне секције, полазна једначина за зглобни чвор манипулатора  $i = C$  гласи

$$Y_{C-2} - 4Y_{C-1} + 6Y_C - 4Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_C$$

На основу већ наведеног израза (5.103) и израза (5.109)

$$Y_{C+2}^f = \frac{m_1 - m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} Y_{C-2} - \frac{4m_1}{m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} Y_{C-1} +$$

$$+ \frac{m_1}{I_1 [m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)]} \left[ \frac{2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) (I_1 m_2 + I_2 m_1)}{m_1} + 4I_1 \right] Y_C -$$

$$- \frac{m_1}{EI_1 [m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)]} \left[ 4EI_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) Y_{C+1} - 2EI_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) Y_{C+2} + \right.$$

$$\left. + 2s^3 N_D \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2s^3 M Y_C \omega^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \right]$$

добиамо коначну једначину померања зглоба манипулатора у облику

$$B_7 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{B_6 \cos \delta_1}{r_1} Y_H - B_6 \sin \delta_1 Y_B + \frac{B_6 \cos \delta_1}{r_1} Y_J + \left( 1 + \frac{2m_1 - B_5}{B_5} \right) Y_{C-2} - 4 \frac{m_1}{B_5} Y_{C-1} + \\ & + [B_8 + B_6 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 - 2] Y_C - \frac{4I_2 m_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{I_1 B_5} Y_{C+1} + \\ & + \frac{2I_2 m_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{I_1 B_5} Y_{C+2} + \frac{B_6 \cos \delta_2}{r_2} Y_R - B_6 \sin \delta_2 Y_D - \frac{B_6 \cos \delta_2}{r_2} Y_Q \end{aligned} \right\} = \lambda Y_C \quad (5.178)$$

где је

$$B_5 = m_1 + m_2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$B_6 = \frac{2cm_1 s^3 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2}{EI_1 B_5}$$

$$B_7 = \frac{sEI_1 B_5}{m_1 s B_5 + 2Mm_1 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$B_8 = \frac{2(I_1 m_2 + I_2 m_1) \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) + 4I_1 m_1}{I_1 B_5}$$

За први чвор полуге  $i = C + 1$  имамо да је

$$Y_{C-1}^f - 4Y_C^f + 6Y_{C+1} - 4Y_{C+2} + Y_{C+3} = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_{C+1}$$

Позивајући изразе (5.99) и (5.104)

$$Y_C^f = Y_C \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$Y_{C-1}^f = 2Y_C \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - Y_{C+1}$$

добиа се коначан облик једначине

$$B_9 [-2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) Y_C + 5Y_{C+1} - 4Y_{C+2} + Y_{C+3}] = \lambda Y_{C+1} \quad (5.179)$$

где је  $B_9 = \frac{EI_2}{m_2}$ .

За следећи чвор полуге  $i = C + 2$  имамо да је

$$Y_C^f - 4Y_{C+1} + 6Y_{C+2} - 4Y_{C+3} + Y_{C+4} = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_{C+2}$$

После замене већ наведеног израза (5.99), имамо коначан израз

$$B_9 [\sin(\alpha_2 - \alpha_1)Y_C - 4Y_{C+1} + 6Y_{C+2} - 4Y_{C+3} + Y_{C+4}] = \lambda Y_{C+2} \quad (5.180)$$

За интервал чворова  $i = C + 3 \div R - 1$  имамо исти облик дискретизоване једначине

$$B_9 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.181)$$

Дискретизована једначина еластичне линије за чвор  $i = R$  гласи

$$Y_{R-2} - 4Y_{R-1} + 6Y_R - 4Y_{R+1}^f + Y_{R+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_R$$

Заменом једначина фиктивних померања (5.120) и (5.126)

$$Y_{R+1}^f = Y_{R+1}$$

$$Y_{R+2}^f = Y_{R+2} + \frac{T_R s^3}{EI_2}$$

и израза за трансверзалну силу (5.110)

$$T_J = \frac{F_c \cos \delta_2}{r_2}$$

добија се коначан израз

$$B_9 \left[ \begin{aligned} & -\frac{B_{10} \cos \delta_1}{r_1} Y_H - B_{10} \sin \delta_1 Y_B + \frac{B_{10} \cos \delta_1}{r_1} Y_J + B_{10} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 Y_C + \\ & + Y_{R-2} - 4Y_{R-1} + \left(6 + \frac{B_{10} \cos \delta_2}{r_2}\right) Y_R - 4Y_{R+1} + Y_{R+2} - B_{10} \sin \delta_2 Y_D - \frac{B_{10} \cos \delta_2}{r_2} Y_Q \end{aligned} \right] = \lambda Y_R \quad (5.182)$$

где је  $B_{10} = \frac{c \cos \delta_2 s^3}{r_2 EI_2}$ .

За интервал чворова  $i = R + 1 \div D - 1$  имамо исти облик дискретизоване једначине

$$B_9 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.183)$$

Код чвора  $i = D$  имамо полазну једначину

$$Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_D$$

Заменом једначина за фиктивна померања (5.137) и (5.143)

$$Y_{D+1}^f = Y_{D+1}$$

$$Y_{D+2}^f = Y_{D+2} + \frac{T_D s^3}{EI_2} - \frac{M_D \omega^2 s^3}{EI_2} Y_D$$



и израза за трансверзалну силу (5.127)

$$T_D = F_c \sin \delta_2$$

добија се коначан израз

$$B_{12} \left[ \begin{array}{l} \frac{B_{11} \cos \delta_1}{r_1} Y_H + B_{11} \sin \delta_1 Y_B - \frac{B_{11} \cos \delta_1}{r_1} Y_J - B_{11} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 Y_C - \\ - \frac{B_{11} \cos \delta_2}{r_2} Y_R + Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + (6 + B_{11} \sin \delta_2) Y_D - 4Y_{D+1} + Y_{D+2} + \frac{B_{11} \cos \delta_2}{r_2} Y_Q \end{array} \right] = \lambda Y_D \quad (5.184)$$

За интервал чворова  $i = D + 1 \div Q - 1$  имамо исти облик дискретизоване једначине

$$B_9 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.185)$$

Дискретизована једначина за чвор  $i = Q$  гласи

$$Y_{Q-2} - 4Y_{Q-1} + 6Y_Q - 4Y_{Q+1}^f + Y_{Q+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_Q$$

Заменом израза фиктивних померања (5.154) и (5.160)

$$Y_{Q+1}^f = Y_{Q+1}$$

$$Y_{Q+2}^f = Y_{Q+2} + \frac{T_Q s^3}{EI_2}$$

као и израза за трансверзалну силу (5.144)

$$T_Q = \frac{F_c \cos \delta_2}{r_2}$$

добијамо коначан израз

$$B_9 \left[ \begin{array}{l} \frac{B_{10} \cos \delta_1}{r_1} Y_H + B_{10} \sin \delta_1 Y_B - \frac{B_{10} \cos \delta_1}{r_1} Y_J - B_{10} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_2 Y_C - \\ - \frac{B_{10} \cos \delta_2}{r_2} Y_R + B_{10} \sin \delta_2 Y_D + Y_{Q-2} - 4Y_{Q-1} + (6 + \frac{B_{10} \cos \delta_2}{r_2}) Y_Q - 4Y_{Q+1} + Y_{Q+2} \end{array} \right] = \lambda Y_Q \quad (5.186)$$

За интервал чворова  $i = Q + 1 \div P - 2$  имамо исти облик дискретизоване једначине

$$B_9 (Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}) = \lambda Y_i \quad (5.187)$$

За чвор  $i = P - 1$  имамо полазну једначину

$$Y_{P-3} - 4Y_{P-2} + 6Y_{P-1} - 4Y_P + Y_{P+1}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_{P-1}$$

Заменом једначине за фиктивно померање (5.162)

$$Y_{P+1}^f = 2Y_P - Y_{P-1}$$

добија се коначан израз

$$B_9 (Y_{P-3} - 4Y_{P-2} + 5Y_{P-1} - 2Y_P) = \lambda Y_{P-1} \quad (5.188)$$

За последњи чвор зглобног манипулатора, полазна једначина гласи

$$Y_{P-2} - 4Y_{P-1} + 6Y_P - 4Y_{P+1}^f + Y_{P+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_P$$

Позивајући претходно наведен израз (5.162) и израз (5.167)

$$Y_{P+2}^f = Y_{P-2} - 4Y_{P-1} + \left(4 - \frac{2M_P \omega^2 s^3}{EI_2}\right) Y_P$$

добиамо коначан израз

$$B_{13} (2Y_{P-2} - 4Y_{P-1} + 2Y_P) = \lambda Y_P \quad (5.189)$$

где је  $B_{13} = \frac{sEI_2}{m_2 s + 2M_P}$ .

Формирани изрази (5.168÷5.189) по померањима дефинишу систем од  $N = P = \frac{L}{s} = \frac{l_1 + l_2}{s}$  линеарних алгебарских једначина, чија је форма прилагођена за генерисање алгорита и писање програмског кода за израчунавање природних фреквенција структуре зависно од геометријских карактеристика зглобног манипулатора, конфигурационих координата, еластичности ослањања, карактеристике хидроцилиндра и масе терета.

Формирани систем једначина по непознатим померањима чворова, може се написати у матричном облику

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y}$$

односно

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{Y} = 0$$

где је  $\mathbf{A}$  квазидијагонална матрица система,  $\mathbf{I}_n$  је јединична матрица реда  $N$ ,  $\lambda$  је карактеристична вредност а  $\mathbf{Y}$  је матрица-колона померања која одговара датој сопственој учестаности.

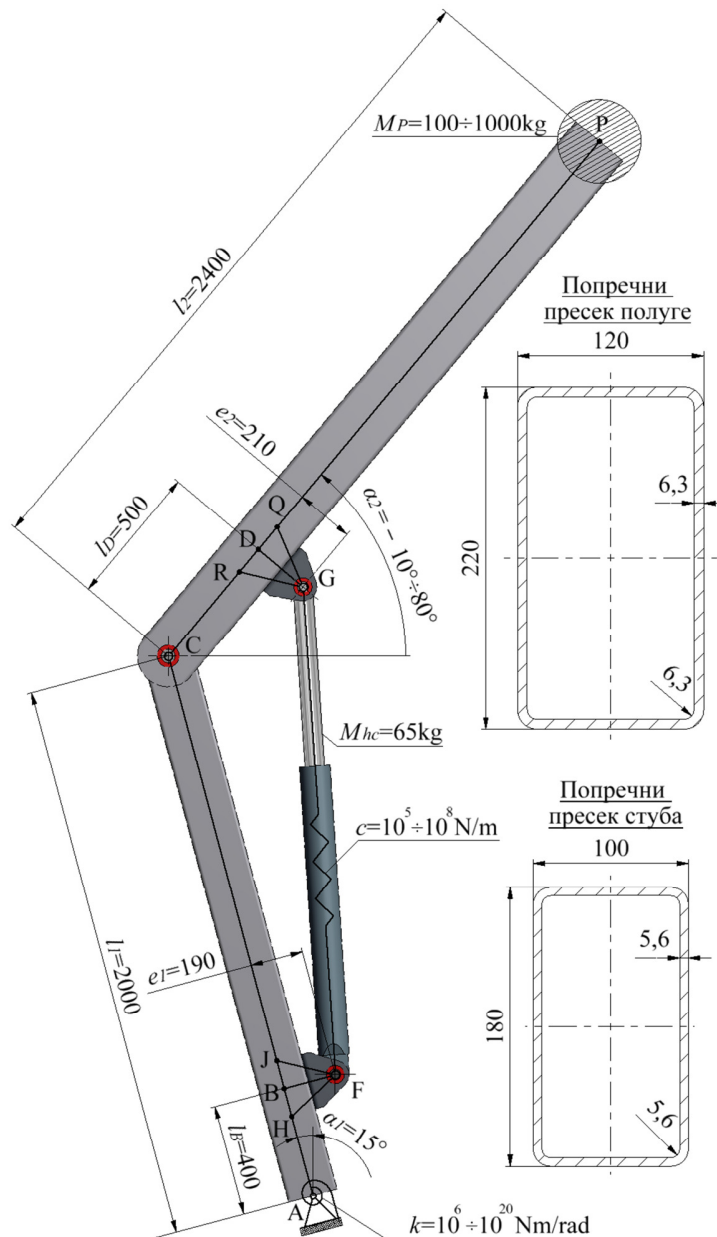
Карактеристична једначина гласи

$$\Delta(\lambda) = \det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n] = 0$$

одакле добијамо природне кружне учестаности  $\omega_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{s^2} = \frac{N^2 \sqrt{\lambda_i}}{L^2}, i = 1, \dots, N$ .

## 5.7 Нумерички пример и упоредни коначно-елементни модел структуре зглобног дела стреле

За потребе израчунавања нумеричких вредности природних учестаности на бази изложеног динамичког модела структуре телескопа при савојним осцилацијама коришћен је конкретан пример чије су дужине и попречни пресеци сегмената приказани на слици 5.10. Геометријске карактеристике попречних пресека стуба и полуге дати су табелом 5.1.



Слика 5.10 Нумерички пример структуре дво-полужног флексибилног манипулатора

Табела 5.1 Геометријске карактеристике попречних пресека стуба и полуга

Геометријска карактеристика попречног пресека	стуб	полуга
$A [m^2]$	0,004025	0,003025
$I [m^4]$	$284,973 \cdot 10^{-7}$	$178,807 \cdot 10^{-7}$

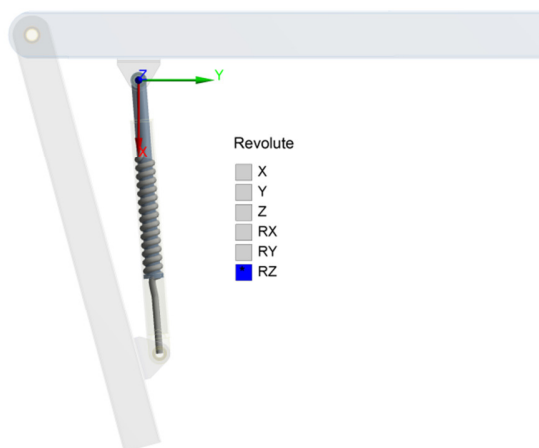
Током испитивања изведеног модела на приказаном нумеричком примеру, варирани су следећи параметри у интервалима

- конфигурациона координата  $\alpha_2$  у интервалу  $-10^\circ \div 80^\circ$ ,
- крутост ослонца  $k$  у интервалу  $10^6 \div 10^{20} \text{ Nm/rad}$ ,
- крутост хидроцилиндра  $c$   $10^5 \div 10^8 \text{ N/m}$ ,
- маса терета  $M_P$  у интервалу  $100 \div 1000 \text{ kg}$ ,

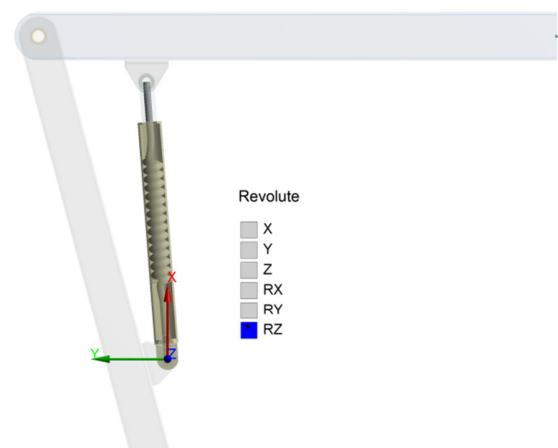
при чему је конфигурациона координата  $\alpha_1$  фиксирана на  $15^\circ$  а укупна маса хидроцилиндра са вешајним склоповима ушки износи  $M_{hc}=65\text{kg}$ .

Тродимензионални модел структуре зглобног манипулатора је послужио за креирање коначно-елементног модела за фреквентну анализу у програмском пакету *Ansys*.

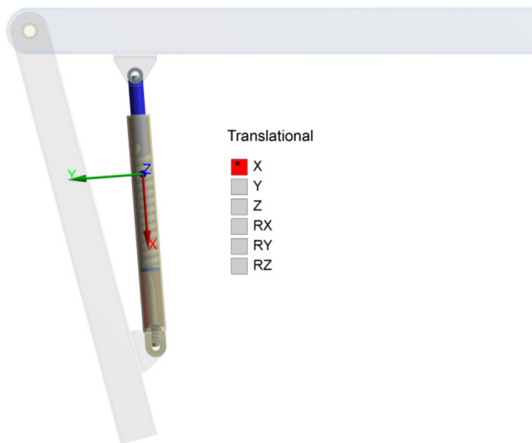
Гранични и контактни услови који су примењени приликом генерисања коначно-елементног модела са параметрима из једног од многобројних случајева испитивања су приказани на сликама 5.11÷5.17, а изглед мреже коначних елемената на слици 5.18. На сликама 5.11÷5.14 приказани су одговарајући кинематички парови са означеним степенима слободе релативног кретања у датим локалним координатним системима. На слици 5.15 дат је параметар подужне крутости хидроцилиндра а на слици 5.16 приказан је кинематички пар стуба и ослонца, при чему је дефинисан параметар крутости који дефинише почетни нагиб зглобног манипулатора. Слика 5.17 приказује положај концентрисане масе а слика 5.18 мрежу коначних елемената структуре.



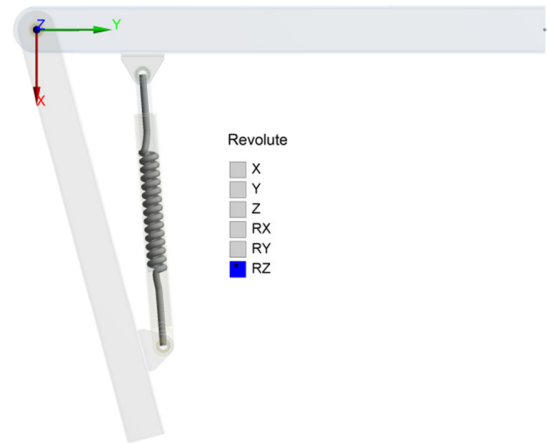
Слика 5.11 Ротациони кинематички пар клипњаче и осовинице горње ушке



Слика 5.12 Ротациони кинематички пар цилиндра и осовинице доње ушке



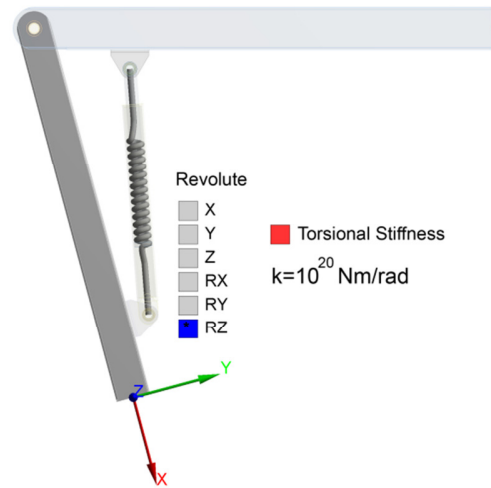
Слика 5.13 Транслаторни кинематички пар цилиндра и клипњаче



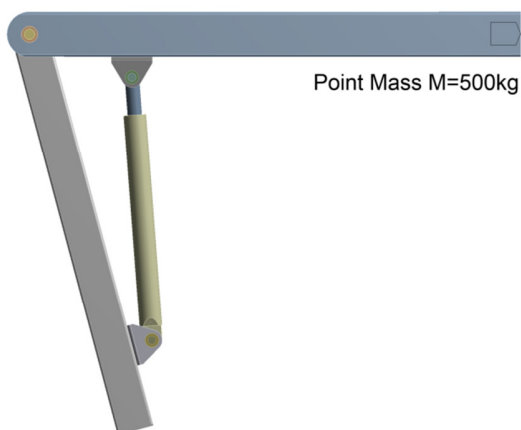
Слика 5.14 Ротациони кинематички пар стуба и полуѓе



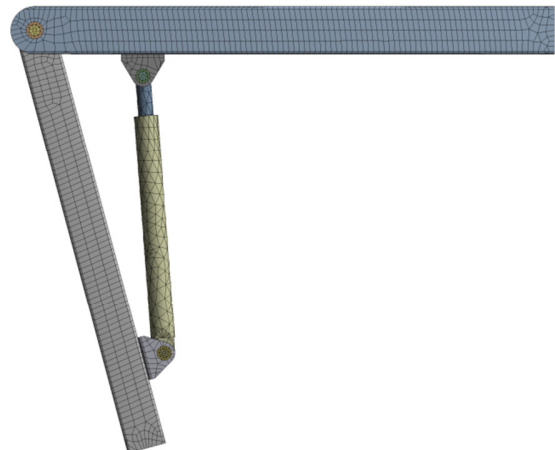
Слика 5.15 Еластична карактеристика хидроцилиндра



Слика 5.16 Еластична карактеристика ослонца

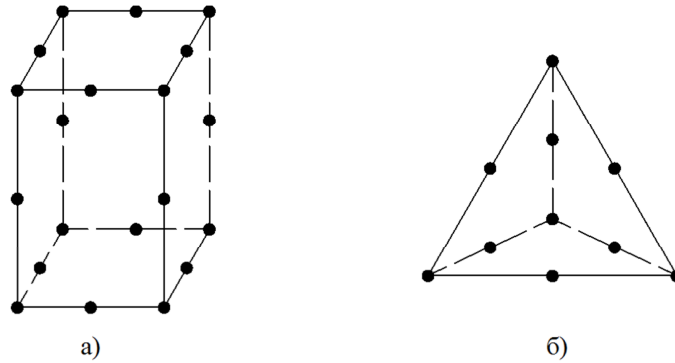


Слика 5.17 Концентрисана маса на врху манипулатора



Слика 5.18 Мрежа коначних елемената

Тродимензионални модел структуре је дискретизован мешовитом мрежом од 44262 чворова и укупно 13075 хексагоналних и тетраедарских запреминских коначних елемената са по 20 чворова, односно, 10 чворова на теменима и срединама ивица, респективно, слика 5.19.



Слика 5.19 Типови коначних елемената са чворовима у теменима и срединама ивица  
а) хексагонални б) тетраедарски

Код испитивања математичког модела, усвојено је да су концентрисане масе у тачкама В и D, којима се моделира утицај укупне масе хидроцилиндра са подсклоповима ушки  $M_{hc}$  на формирање природних облика осциловања, једнаке и износе

$$M_B = M_D = 0,5M_{hc}$$

Поред тога, уведена је и претпоставка о положају утицајних тачака на неутралној линији стуба (тачке Н и J) и полуге (тачке R и Q) у зонама вешајних подсклопова хидроцилиндра (деталји на слици 5.2), према којој је њихово међусобно растојање једнако ексцентрицитету одговарајуће вешајне тачке у односу на неутралну линију. То значи да коефицијенти пропорционалности из једначина (5.15) и (5.22) узимају јединичне вредности  $r_1 = 1$  и  $r_2 = 1$ .

При израчунавању нумеричких вредности природних учестаности из математичког модела и изградњи коначно-елементног модела, усвојен је Young-ов модул еластичности  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$  и специфична маса материјала  $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ .

Анализа резултата математичког модела и компарација са резултатима из коначно-елементног модела, из практичних разлога, ће бити спроведени на нивоу природних учестаности:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, \quad i = 1, \dots, N.$$

## 5.8 Резултати математичког модела и компарација са резултатима из коначно-елементног модела зглобног манипулатора

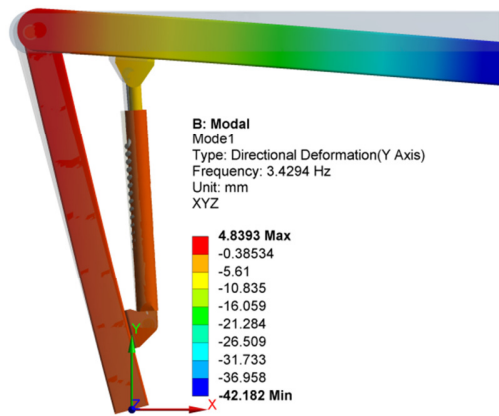
На основу система дискретизованих једначина (5.168÷5.189) је формиран програмски код у софтверу за инжењерске прорачуне *MatLab* за израчунавање сопствених учестаности. С обзиром на то да су природни облици осциловања који одговарају вишим сопственим фреквенцијама мало вероватни и од мале важности, анализирани су вредности прве три сопствене фреквенције. Случајеви за тестирање су формирано варирањем конфигурационе координате  $\alpha_2$ , крутости хидроцилиндра  $c$ , крутости ослонца  $k$  и масе терета  $M_P$ . Први сет испитивања, чији су упоредни резултати дати таблицом 5.2, је спроведен варирањем конфигурационе координате угла полуге  $\alpha_2$  у интервалу  $-10^\circ \div 80^\circ$  са кораком од  $5^\circ$ , при чему остале три променљиве имају фиксне следеће вредности:

- крутост ослонца  $k = 10^{20} \text{ Nm/rad}$ ,
- крутост хидроцилиндра  $c = 10^7 \text{ N/m}$ ,
- маса терета  $M_P = 500 \text{ kg}$ .

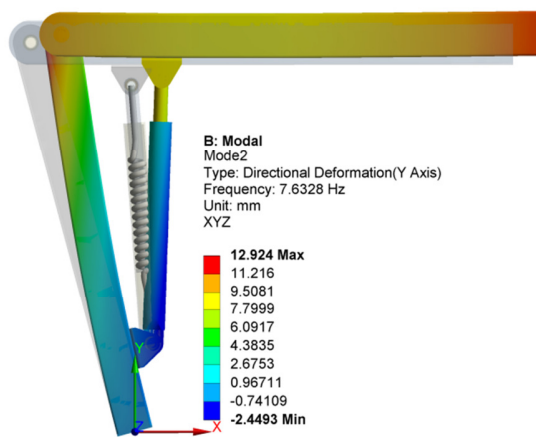
Табела 5.2 Резултати испитивања при варирању угла полуге

$\alpha_2$ [ $^\circ$ ]	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_1$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_2$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_3$
-10	3.286	3.253	1.01%	7.372	7.511	-1.85%	105.965	102.080	3.81%
-5	3.397	3.378	0.58%	7.416	7.527	-1.48%	106.767	102.620	4.04%
0	3.434	3.429	0.14%	7.555	7.633	-1.02%	107.475	103.060	4.28%
5	3.417	3.428	-0.32%	7.763	7.817	-0.69%	108.065	103.400	4.51%
10	3.368	3.388	-0.61%	8.021	8.052	-0.38%	108.523	103.600	4.75%
15	3.300	3.328	-0.86%	8.315	8.330	-0.18%	108.850	103.710	4.96%
20	3.223	3.258	-1.07%	8.639	8.642	-0.04%	109.054	103.710	5.15%
25	3.142	3.181	-1.24%	8.990	8.980	0.11%	109.149	103.600	5.36%
30	3.061	3.100	-1.27%	9.369	9.350	0.20%	109.153	103.380	5.58%
35	2.982	3.016	-1.14%	9.779	9.747	0.33%	109.090	103.060	5.85%
40	2.905	2.937	-1.07%	10.225	10.182	0.43%	108.987	102.680	6.14%
45	2.831	2.861	-1.06%	10.715	10.664	0.48%	108.879	102.230	6.50%
50	2.759	2.786	-0.96%	11.259	11.199	0.54%	108.805	101.680	7.01%
55	2.689	2.718	-1.09%	11.870	11.803	0.56%	108.818	101.030	7.71%
60	2.619	2.638	-0.74%	12.564	12.485	0.63%	108.989	100.280	8.68%
65	2.548	2.562	-0.54%	13.364	13.276	0.66%	109.417	99.365	10.12%
70	2.476	2.485	-0.38%	14.297	14.191	0.75%	110.251	98.346	12.10%
75	2.399	2.401	-0.09%	15.397	15.279	0.77%	111.719	97.114	15.04%
80	2.315	2.309	0.29%	16.698	16.556	0.86%	114.190	95.481	19.59%

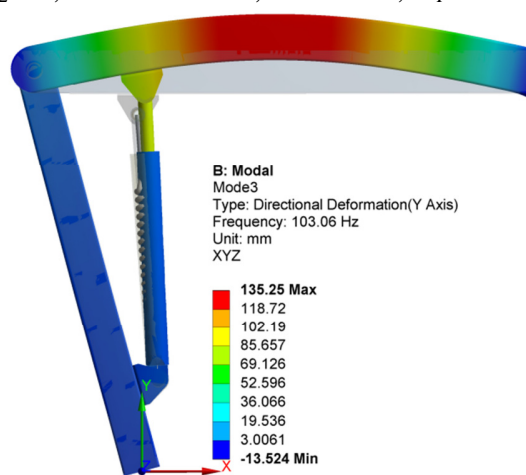
На сликама 5.20÷5.22 приказани су упоредни резултати природних фреквенција, који су добијени из коначно-елементног модела, за случај  $\alpha_2=0^\circ$  (осенчена поља у табели 5.2).



Слика 5.20 Прва сопствена учестаност и облик осциловања за случај  $\alpha_2=0^\circ$ ,  $k=10^{20}$  Nm/rad,  $c=10^7$  N/m,  $M_P=500$  kg.



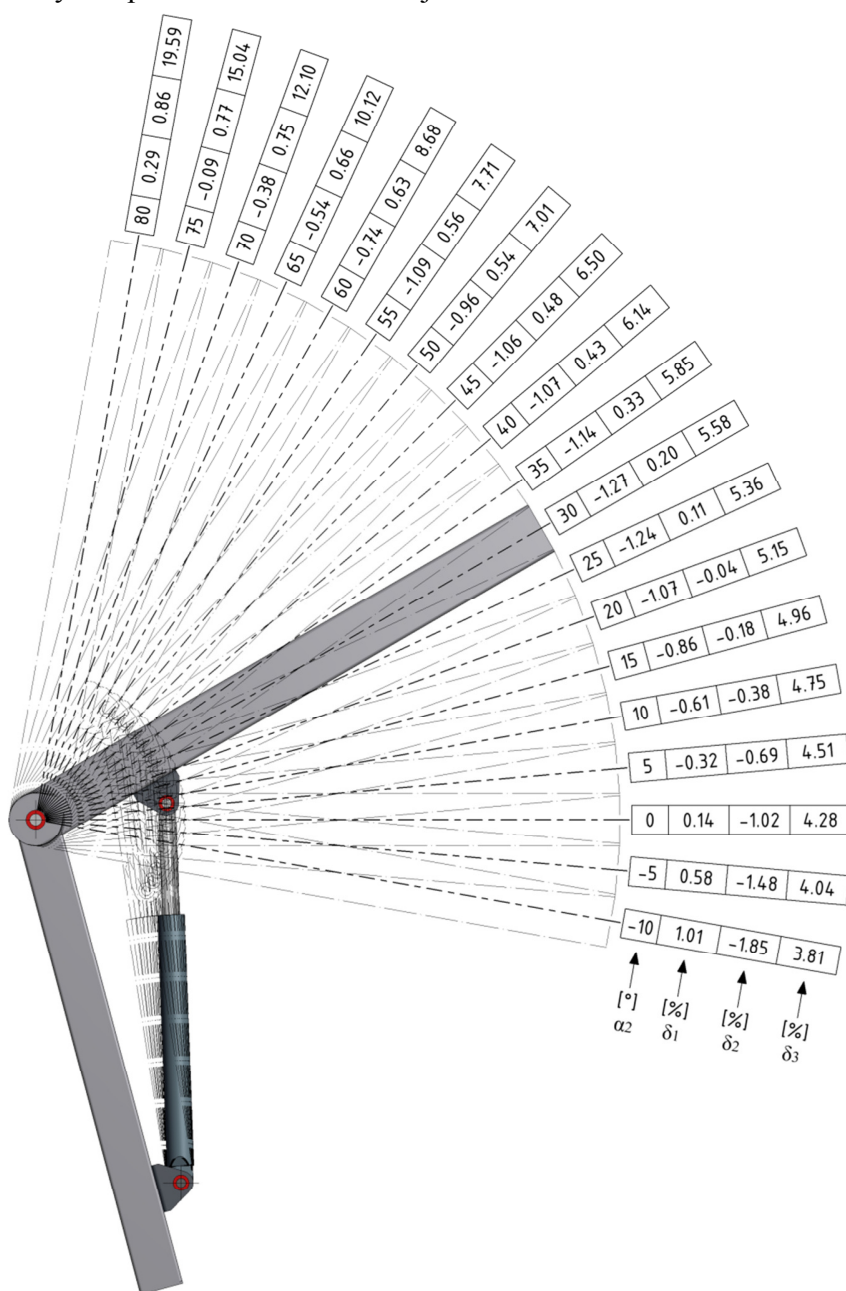
Слика 5.21 Друга сопствена учестаност и облик осциловања за случај  $\alpha_2=0^\circ$ ,  $k=10^{20}$  Nm/rad,  $c=10^7$  N/m,  $M_P=500$  kg.



Слика 5.22 Трећа сопствена учестаност и облик осциловања за случај  $\alpha_2=0^\circ$ ,  $k=10^{20}$  Nm/rad,  $c=10^7$  N/m,  $M_P=500$  kg.



Графичка презентација релативних одступања сопствених учестаности математичког модела у односу на вредности из МКЕ дата је сликом 5.23.



Слика 5.23 Графичка интерпретација одступања сопствених учестаности при варирању положаја полуге

Релативна грешка за прву и другу природну учестаност код већине положаја полуге не прелази 1% док за трећу постепено расте са повећањем угла полуге од 3,81% за  $\alpha_2 = -10^\circ$  до 19,59% за  $\alpha_2 = 80^\circ$ . Већа одступања треће учестаности при великим угловима полуге су последица одступања од претпоставке да је нагиб код вешајне тачке хидроцилиндра занемарљив према углу између хидроцилиндра и полуге и стуба.

Други сет испитивања је спроведен варирањем крутости ослонца  $k$  у интервалу  $10^6 \div 10^{20} \text{ Nm/rad}$ , при чему остале три променљиве имају фиксне следеће вредности:

- конфигурациона координата угла полуге  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,
- крутост хидроцилиндра  $c = 10^7 \text{ N/m}$ ,
- маса терета  $M_P = 500 \text{ kg}$ .

Упоредни резултати из математичког модела и симулационог модела са релативним одступањима за прве три сопствене учестаности из ове групе испитивања су дати таблицом 5.3.

Табела 5.3 Резултати испитивања при варирању крутости ослонца

$k \left[ \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_1$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_2$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_3$
$10^6$	1.635	1.648	-0.78%	7.887	7.746	1.82%	109.001	102.920	5.91%
$2.0 \cdot 10^6$	2.046	2.064	-0.88%	8.132	8.002	1.64%	109.080	103.070	5.83%
$3.0 \cdot 10^6$	2.269	2.291	-0.97%	8.309	8.189	1.48%	109.105	103.150	5.77%
$4.0 \cdot 10^6$	2.411	2.436	-1.02%	8.443	8.331	1.34%	109.117	103.190	5.74%
$5.0 \cdot 10^6$	2.510	2.537	-1.06%	8.546	8.442	1.24%	109.124	103.220	5.72%
$7.5 \cdot 10^6$	2.661	2.691	-1.12%	8.727	8.638	1.03%	109.134	103.270	5.68%
$1.0 \cdot 10^7$	2.747	2.779	-1.16%	8.842	8.764	0.90%	109.139	103.300	5.65%
$2.0 \cdot 10^7$	2.893	2.928	-1.21%	9.063	9.008	0.62%	109.146	103.340	5.62%
$3.0 \cdot 10^7$	2.946	2.983	-1.23%	9.154	9.108	0.50%	109.148	103.350	5.61%
$4.0 \cdot 10^7$	2.974	3.011	-1.24%	9.203	9.163	0.43%	109.149	103.360	5.60%
$5.0 \cdot 10^7$	2.991	3.028	-1.24%	9.234	9.198	0.39%	109.150	103.360	5.60%
$10^8$	3.025	3.064	-1.26%	9.299	9.271	0.30%	109.151	103.370	5.59%
$10^{10}$	3.061	3.100	-1.27%	9.369	9.349	0.21%	109.153	103.380	5.58%
$10^{20}$	3.061	3.100	-1.27%	9.369	9.350	0.20%	109.153	103.380	5.58%

Дакле, код ових случајева је истраживана осетљивост математичког модела на промену еластичности ослањања зглобног манипулатора при произвољном положају полуге од  $\alpha_2 = 30^\circ$ .

На основу упоредних резултата, показало се да математички модел базиран на методи централних коначних разлика даје веома тачне резултате за веома широк опсег вредности за крутост опруге ослонца.

Наиме, ако се случај максималне крутости од  $10^{20} \text{ Nm/rad}$ , која практично одговара укљештењу стуба, узме као референтан, може се констатовати да нема значајних промена у погледу релативних одступања резултата предложеног модела од резултата из МКЕ, за све три природне учестаности.

Трећи сет испитивања је спроведен варирањем крутост хидроцилиндра  $c$  у интервалу  $10^5 \div 10^7 \text{ N/m}$ , при чему остале три променљиве имају фиксне следеће вредности:

- конфигурациона координата угла полуге  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,
- крутост ослонца  $k = 10^{20} \text{ Nm/rad}$ ,
- маса терета  $M_P = 500 \text{ kg}$ .

Упоредни резултати из математичког модела и симулационог модела са релативним одступањима за прве три сопствене учестаности из ове групе испитивања су дати таблицом 5.4.

Табела 5.4 Резултати испитивања при варирању крутости хидроцилиндра

$c \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_1$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_2$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_3$
$10^5$	0.490	0.519	-5.45%	6.556	6.726	-2.53%	98.781	93.560	5.58%
$2.5 \cdot 10^5$	0.768	0.786	-2.32%	6.607	6.775	-2.47%	98.950	93.726	5.57%
$5.0 \cdot 10^5$	1.069	1.082	-1.25%	6.692	6.856	-2.38%	99.232	94.001	5.57%
$7.5 \cdot 10^5$	1.288	1.300	-0.90%	6.778	6.937	-2.29%	99.513	94.275	5.56%
$10^6$	1.465	1.476	-0.75%	6.863	7.018	-2.20%	99.793	94.547	5.55%
$2.5 \cdot 10^6$	2.119	2.133	-0.66%	7.363	7.488	-1.68%	101.447	96.147	5.51%
$5.0 \cdot 10^6$	2.635	2.659	-0.90%	8.127	8.203	-0.92%	104.117	98.694	5.49%
$7.5 \cdot 10^6$	2.901	2.933	-1.11%	8.793	8.820	-0.30%	106.683	101.100	5.52%
$10^7$	3.061	3.100	-1.27%	9.369	9.350	0.20%	109.153	103.380	5.58%

Дакле, код ових случајева је истраживана осетљивост математичког модела на промену крутости хидроцилиндра зглобног манипулатора при произвољном положају полуге од  $\alpha_2 = 30^\circ$ .

На основу упоредних резултата, показало се да математички модел базиран на методи централних коначних разлика даје веома тачне резултате чак и за екстремно мале вредности за крутост опруге  $c$ . Такође, испитивањем је утврђена доња граница овог параметра при којој предложени математички модел даје резултате са прихватљивом тачношћу, са аспекта инжењерске примене. Конкретно, тек при екстремно малој крутости хидроцилиндра од  $10^5 \text{ N/m}$ , релативно одступање резултата за прву сопствену учестаност у односу на симулациони модел прелази границу од 5%.

Ако се случај максималне крутости од  $10^7 \text{ N/m}$  узме као референтан, може се констатовати благи пораст релативног одступања код друге и стагнацију релативног одступања код треће сопствене учестаности.

Показало се да математички модел одржава веома високу тачност и при варирању вредности за крутост хидроцилиндра.

Код четвртог сета испитивања је варирана маса терета  $M_p$  у интервалу  $100\div 1000\text{kg}$  са кораком  $100\text{kg}$ , при чему остале три променљиве имају фиксне следеће вредности:

- конфигурациона координата угла полуге  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,
- крутост ослонца  $k = 10^{20} \text{ Nm/rad}$ ,
- крутост хидроцилиндра  $c = 10^7 \text{ N/m}$ .

Упоредни резултати из математичког модела и симулационог модела са релативним одступањима за прве три сопствене учестаности из ове групе испитивања су дати таблицом 5.5.

Табела 5.5 Резултати испитивања при варирању масе терета

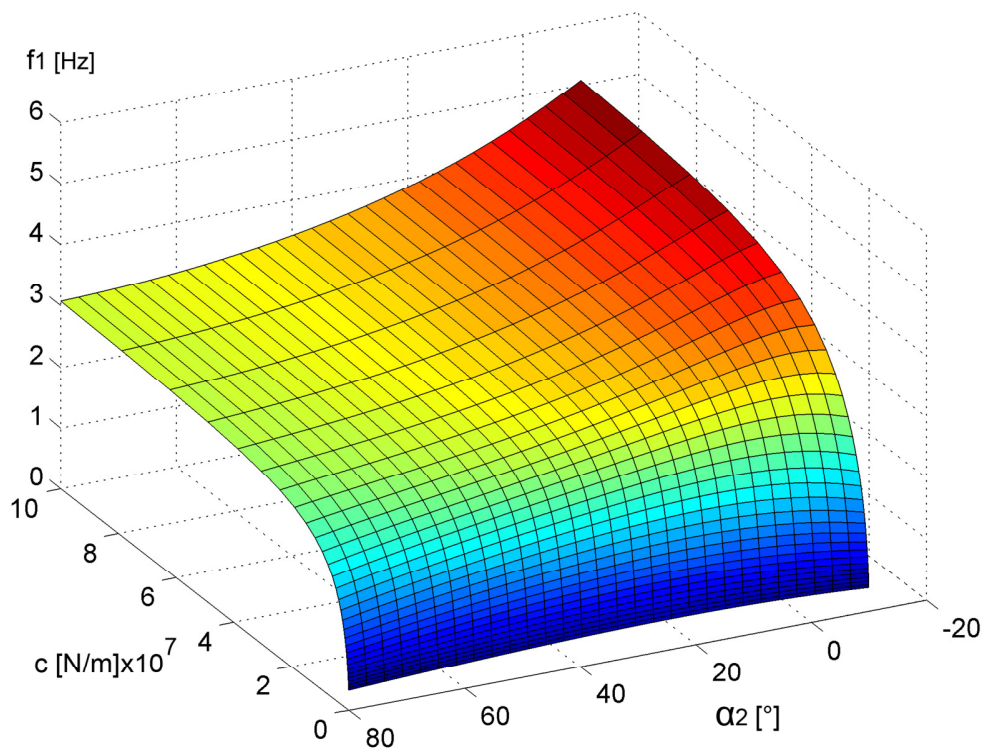
$M_p$ [kg]	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_1$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_2$	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Релативна грешка $\delta_3$
100	6.018	6.139	-1.97%	16.347	16.221	0.78%	114.468	107.900	6.09%
200	4.596	4.669	-1.57%	13.240	13.186	0.41%	111.370	105.230	5.84%
300	3.860	3.915	-1.41%	11.460	11.427	0.29%	110.183	104.230	5.71%
400	3.392	3.437	-1.32%	10.256	10.232	0.24%	109.549	103.710	5.63%
500	3.061	3.100	-1.27%	9.369	9.350	0.20%	109.153	103.380	5.58%
600	2.811	2.846	-1.23%	8.680	8.664	0.19%	108.882	103.160	5.55%
700	2.614	2.646	-1.20%	8.124	8.110	0.17%	108.684	103.000	5.52%
800	2.453	2.483	-1.19%	7.663	7.650	0.16%	108.534	102.880	5.50%
900	2.319	2.346	-1.17%	7.273	7.261	0.16%	108.416	102.790	5.47%
1000	2.204	2.230	-1.16%	6.937	6.926	0.15%	108.320	102.710	5.46%

Дакле, код ових случајева је истраживана осетљивост математичког модела на промену вредности масе на врху зглобног манипулатора при произвољном положају полуге од  $\alpha_2 = 30^\circ$ .

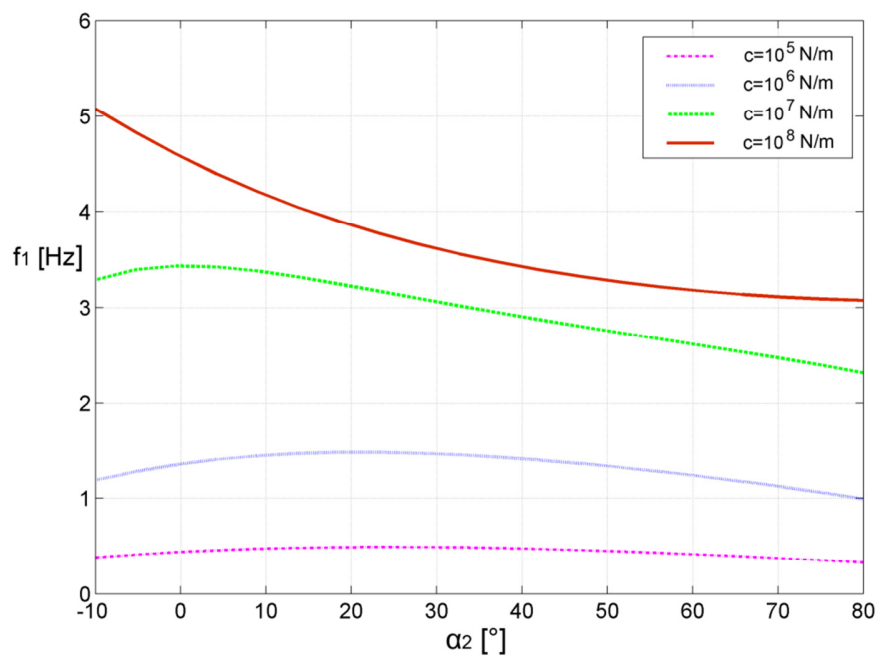
На основу упоредних резултата, показало се да математички модел базиран на методи централних коначних разлика даје веома тачне резултате за широк опсег вредности масе терета  $M_p$ .

Наиме, ако се случај са  $M_p = 500\text{kg}$  узме као референтан (коришћен код прве три групе тестова), види се да нема великих промена код релативних одступања за све три сопствене учестаности.

Утицаји промена параметара на границама зглобног манипулатора у погледу крутости ослонца и масе терета, као и утицај промена унутрашњих параметара у виду аксијалне крутости хидроцилиндра и положаја полуге на природне учестаности, приказани су дијаграмима на сликама 5.24÷5.29.

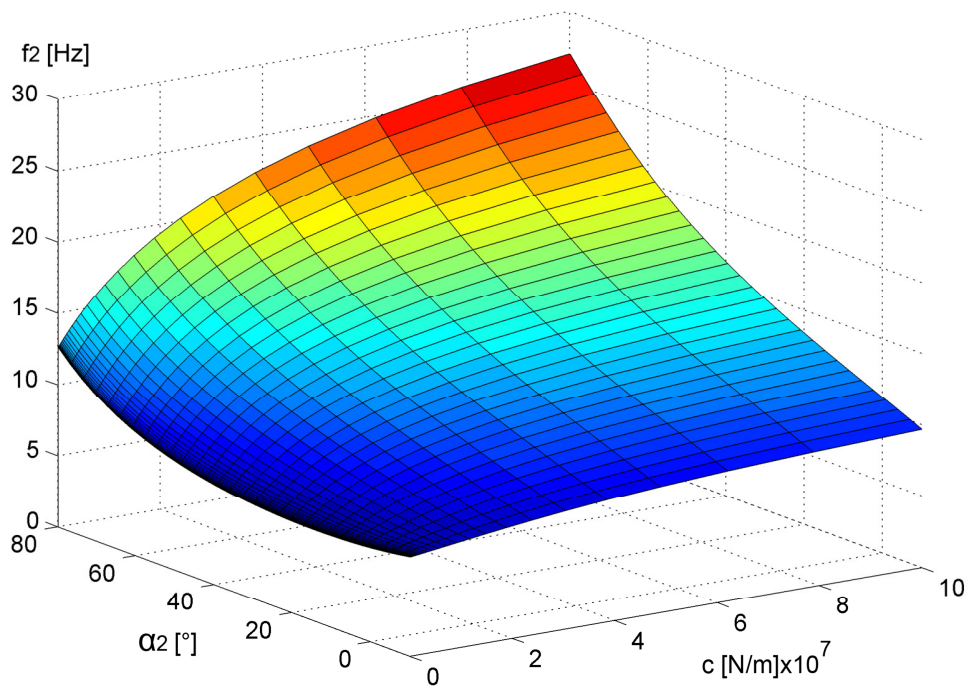


a)

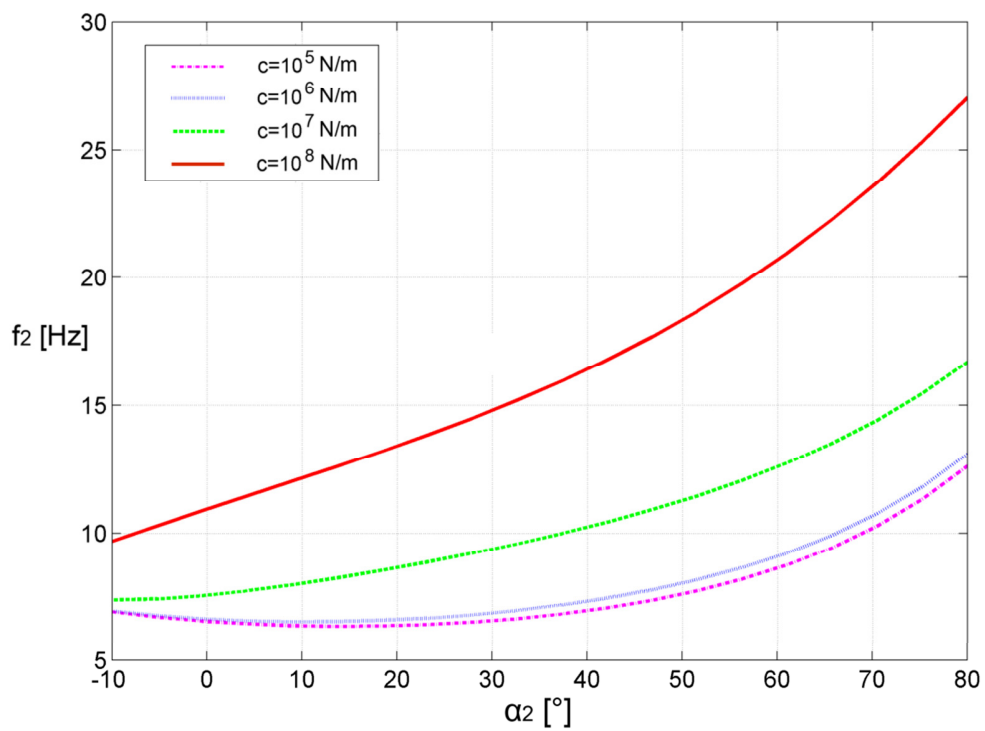


б)

Слика 5.24 Зависност прве сопствене учестаности од положаја полуге и крутости хидроцилиндра: а)3Д дијаграм б)2Д дијаграм

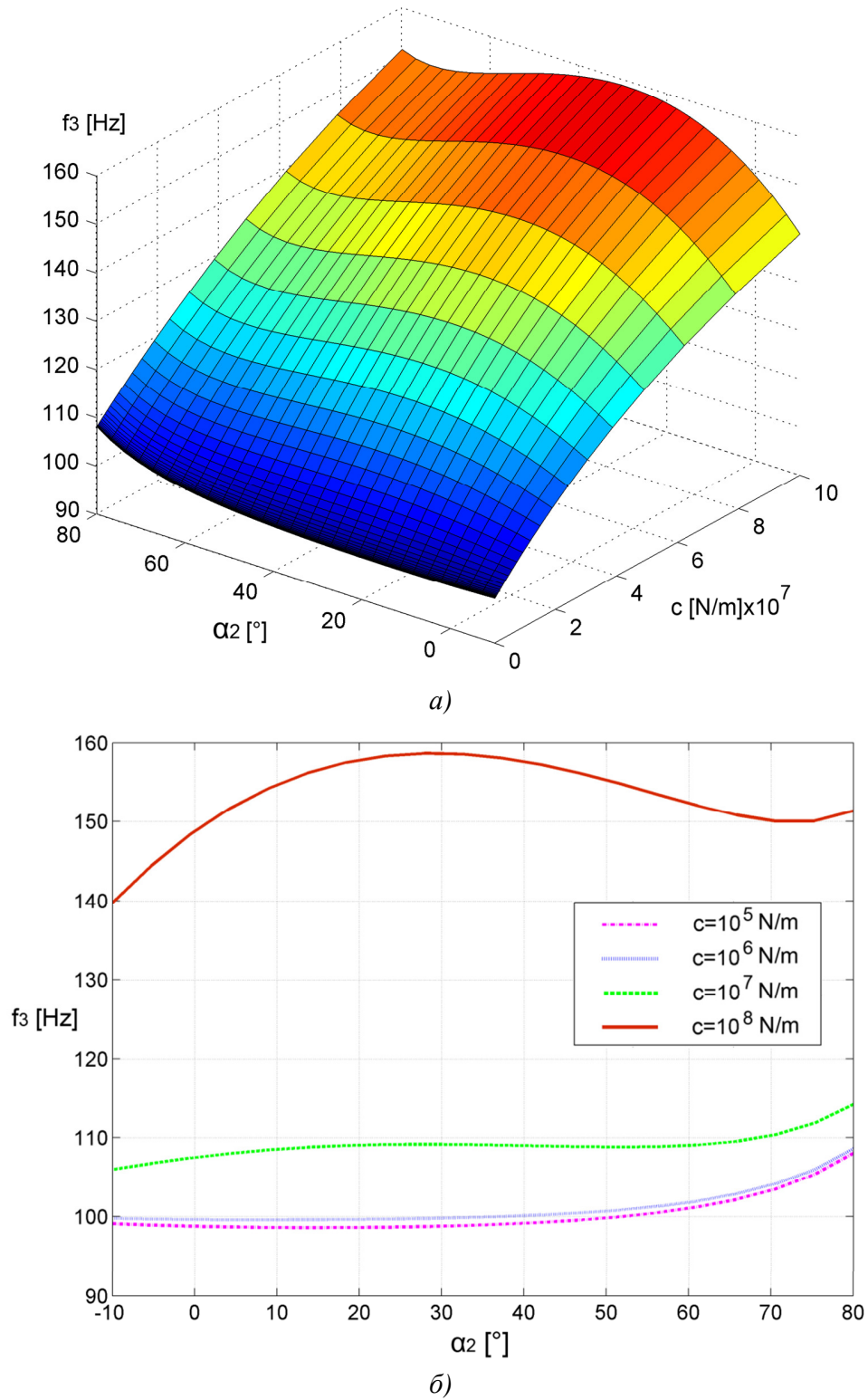


a)

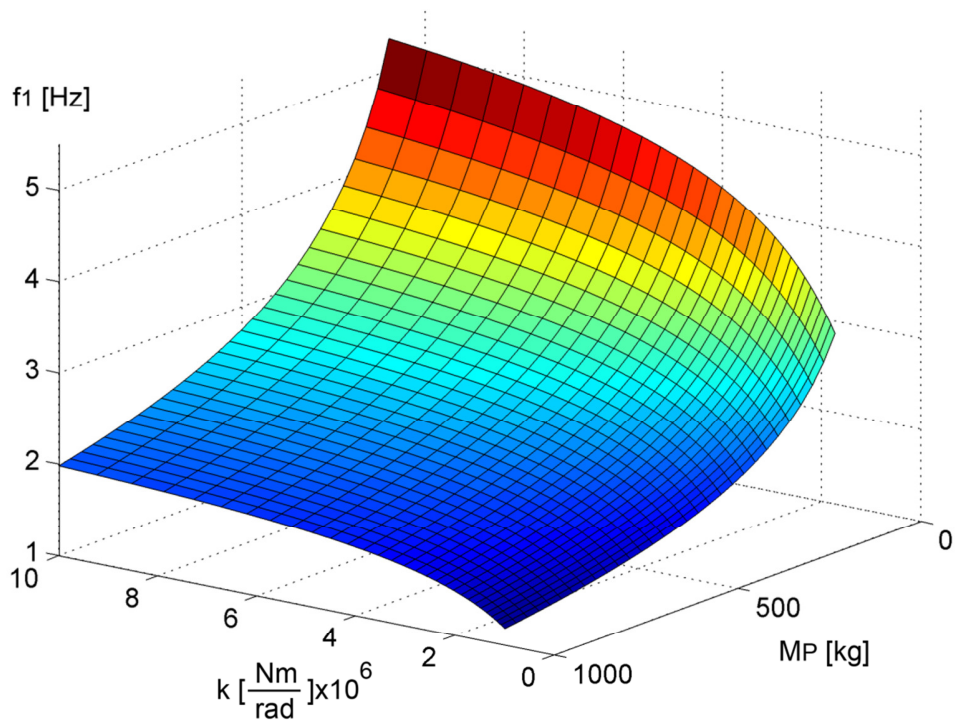


б)

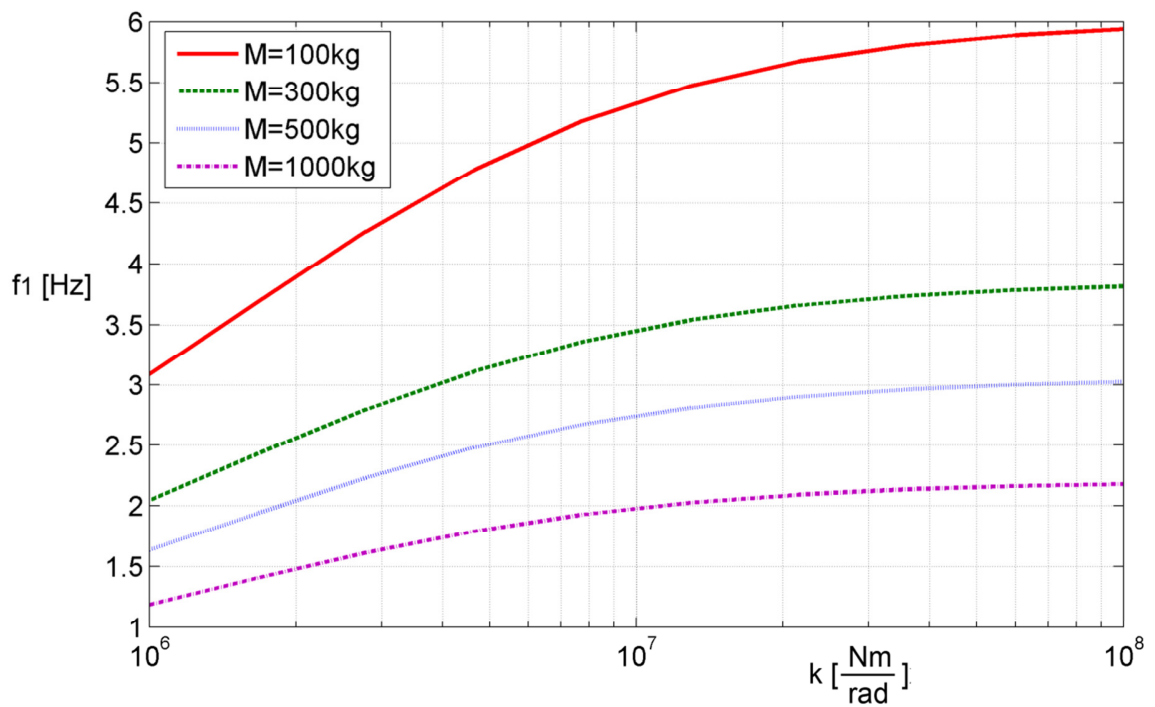
Слика 5.25 Зависност друге сопствене учестаности од положаја полуге и крутости хидроцилиндра: а)3Д дијаграм б)2Д дијаграм



Слика 5.26 Зависност треће сопствене учестаности од положаја полуге и крутости хидроцилиндра: а)3Д дијаграм б)2Д дијаграм



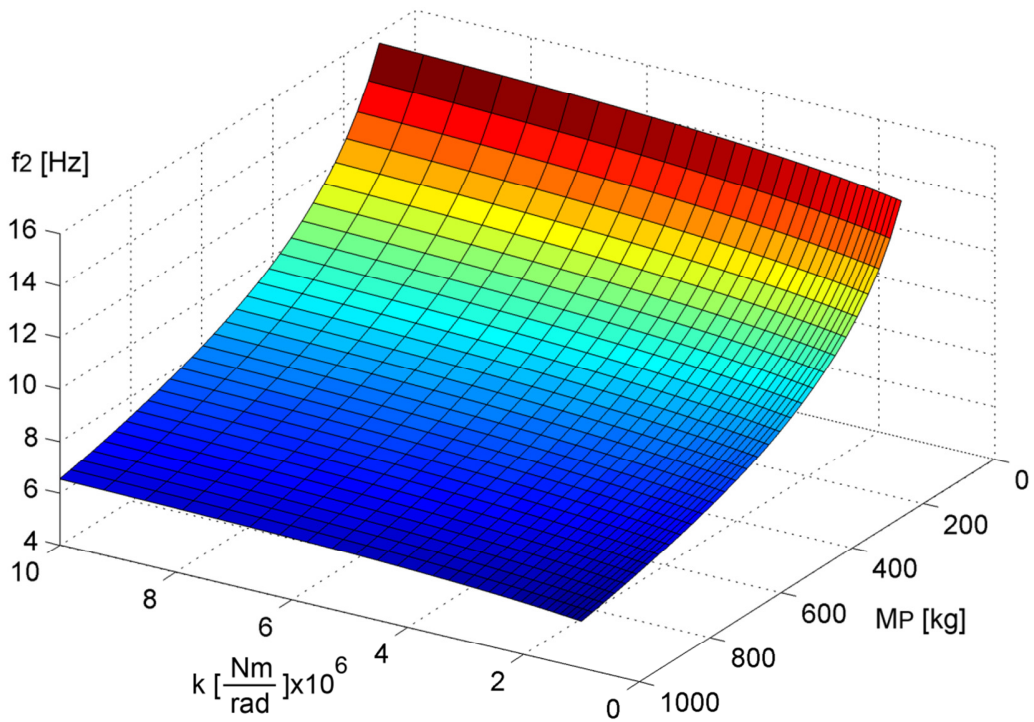
a)



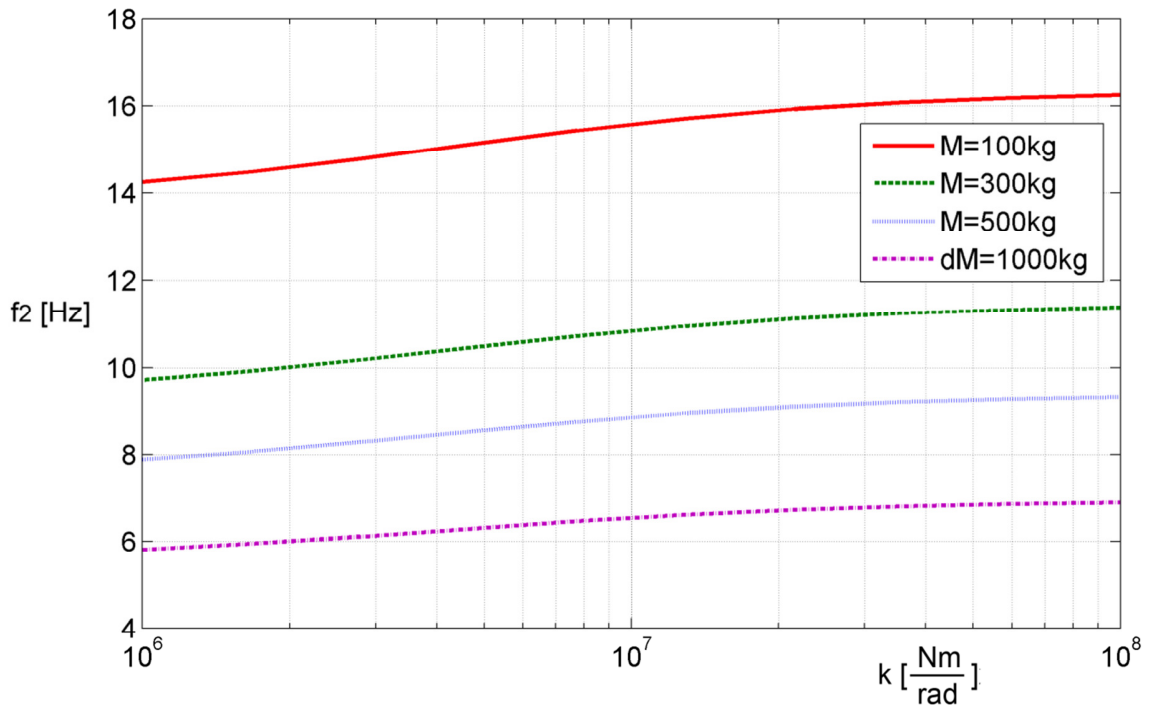
б)

Слика 5.27 Зависност прве сопствене учестаности од крутости ослонца и масе терета: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм



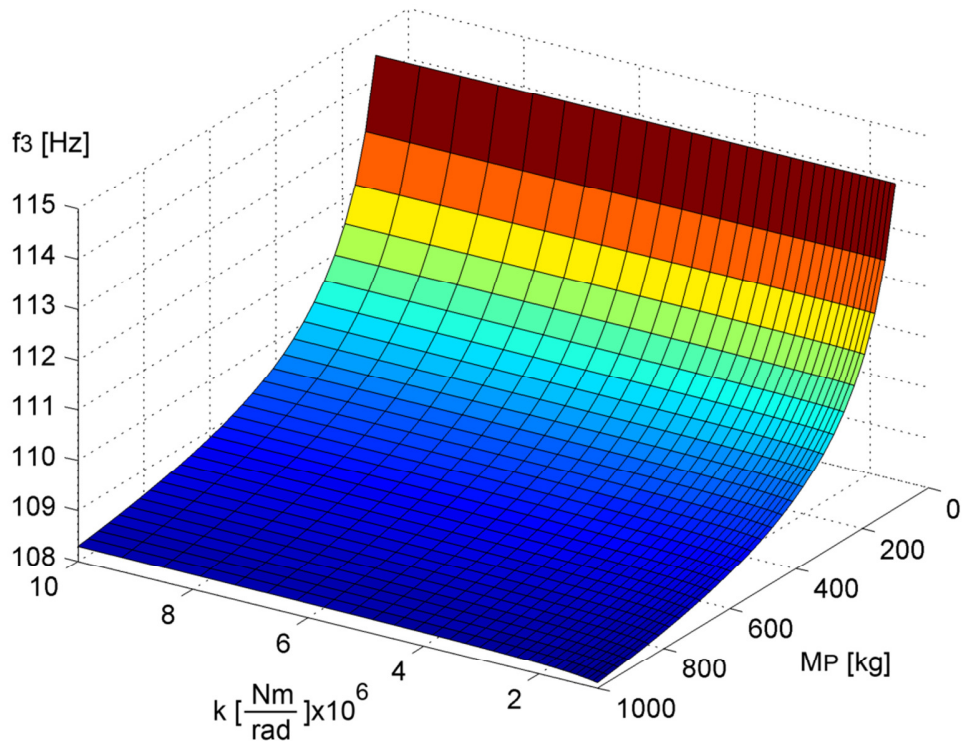


a)

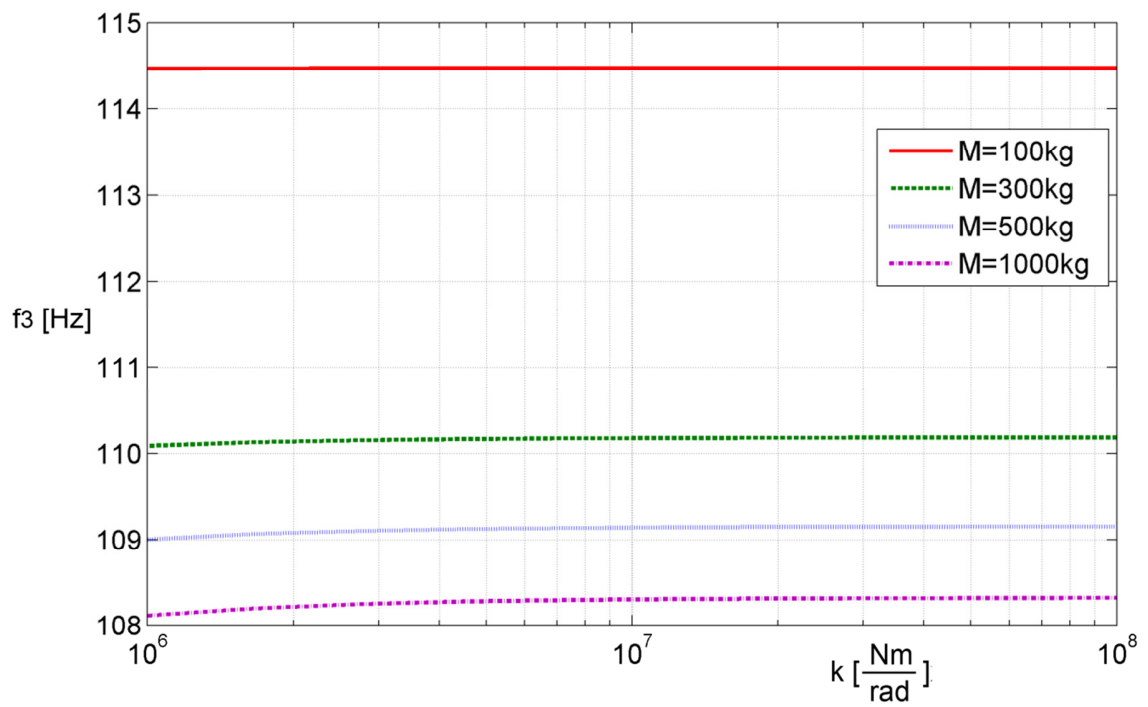


б)

Слика 5.28 Зависност друге сопствене учестаности од крутости ослонца и масе терета: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм



a)



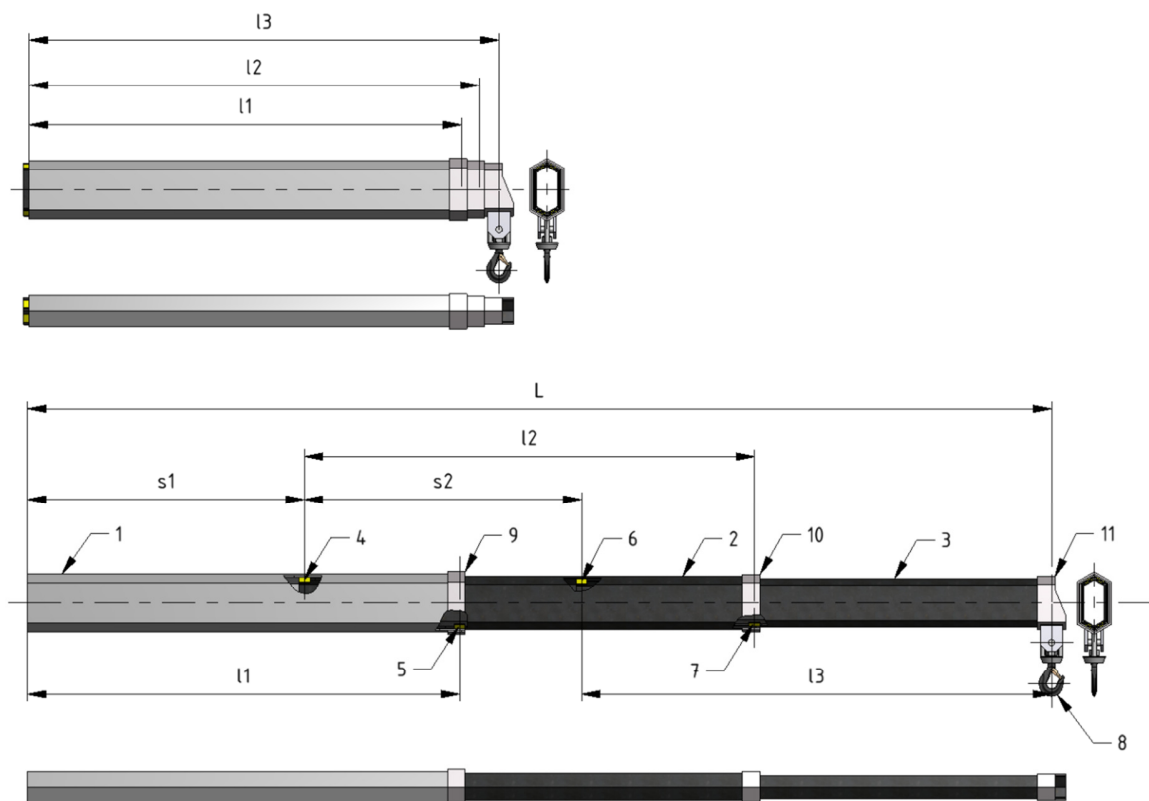
b)

Слика 5.29 Зависност треће сопствене учестаности од крутости ослонца и масе терета: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм

## 6. Фреквентна анализа телескопског дела стреле код савојних осцилација применом методе централних коначних разлика

### 6.1. Опис структуре телескопа

Телескопски део стреле се структурно надовезује на доњи, зглобни део и даје кључни допринос у погледу промене дохвата у оквиру радног поља ауто-дизалице. Поједностављена конструкција телескопског дела једног од најчешћих решења зглобне стреле ауто-дизалице приказана је на слици 6.1.



Слика 6.1 Телескопски део стреле у потпуно увученој и произвољно извученој конфигурацији: 1-први сегмент, 2-други сегмент, 3-трећи сегмент, 4-задњи клизачи другог сегмента, 5-предњи клизачи другог сегмента, 6- задњи клизачи трећег сегмента, 7-предњи клизачи трећег сегмента, 8-вешајни склоп куке, 9-ојачање врха првог сегмента, 10-ојачање врха другог сегмента, 11-ојачање врха трећег сегмента

Структура телескопског дела се састоји из два или више сегмената, различитих правоугаоних или шестоугаоних танкозидних попречних пресека, који се међусобно могу извлачити и увлачити. Релативна покретљивост између сегмената се остварује помоћу хидроцилиндара, при чему је цилиндар везан за претходни а клипњача са наредни сегмент. С обзиром да су хидроцилиндри осетљиви на појаву сопственог савијања, које може угрозити њихово правилно функционисање, они се везују за сегменте на начин који их искључује из савијања целе структуре, те су због тога изузети са претходне скице и разматрања које следи.

Веза између самих сегмената се остварује преко клизних плочица или клизача, који имају улогу вођења сегмената при извлачењу, односно, извлачењу. Задњи клизачи унутрашњег сегмента су покретни и везани су са спољне стране за његов задњи крај, док се предњи клизачи везују са унутрашње стране краја спољашњег сегмента и стога су непокретни. С обзиром функцију коју обављају, клизачи су изложени хабању, па се обично везују за сегменте демонтажно у циљу замене.

На местима непокретних предњих клизача, са спољне стране спољашњих сегмената заварују се ојачања по обиму у циљу спречавања локалних деформација зидова попречних пресека услед деловања концентрисаног оптерећења. Слично ојачање се налази и на крају стреле, код вешајног склопа са куком, ради равномернијег преношења оптерећења на све делове пресека.

У радном режиму, телескоп, као целина, представља носећу структуру степенасто променљивог попречног пресека са изменљивом геометријом, при чему се та изменљивост огледа у, теоријски гледано, бесконачно много конфигурација међусобних положаја сегмената. Прецизније речено, свакој конфигурацији телескопа, зависно од извучености сегмената, одговара засебна комбинација положаја задњих (покретних) клизача сегмената, као и интезитет унутрашњих оптерећења, која се преко њих преносе кроз структуру. Као последица наведеног, долази и до промене динамичких карактеристика структуре као целине.

На слици 6.1 приказана је упрошћена конструкција телескопа са три сегмента у конфигурацијама са потпуно увученим и произвољно извученим сегментима.

Као рачунска дужина првог сегмента  $l_1$  означено је растојање од краја до средине предњег клизача другог сегмента, за други сегмент то је растојање између оса клизача  $l_2$ , док је за трећи сегмент то растојање од задњих клизача до осе терета,  $l_3$ . Конфигурационе координате  $s_1$  и  $s_2$  означавају извученост другог сегмента у односу на први, односно, трећег у односу на други, при чему се узима да се осе задњих клизача у потпуно увученој конфигурацији поклапају са левим крајем првог сегмента. Сходно томе, дужина наредног сегмента је већа од дужине претходног. Променљива укупна дужина телескопа је означена са  $L$ .

## 6.2 Основне претпоставке, прорачунски модел и полазне једначине

Приликом дефинисања прорачунског модела, као основа су узете следеће претпоставке:

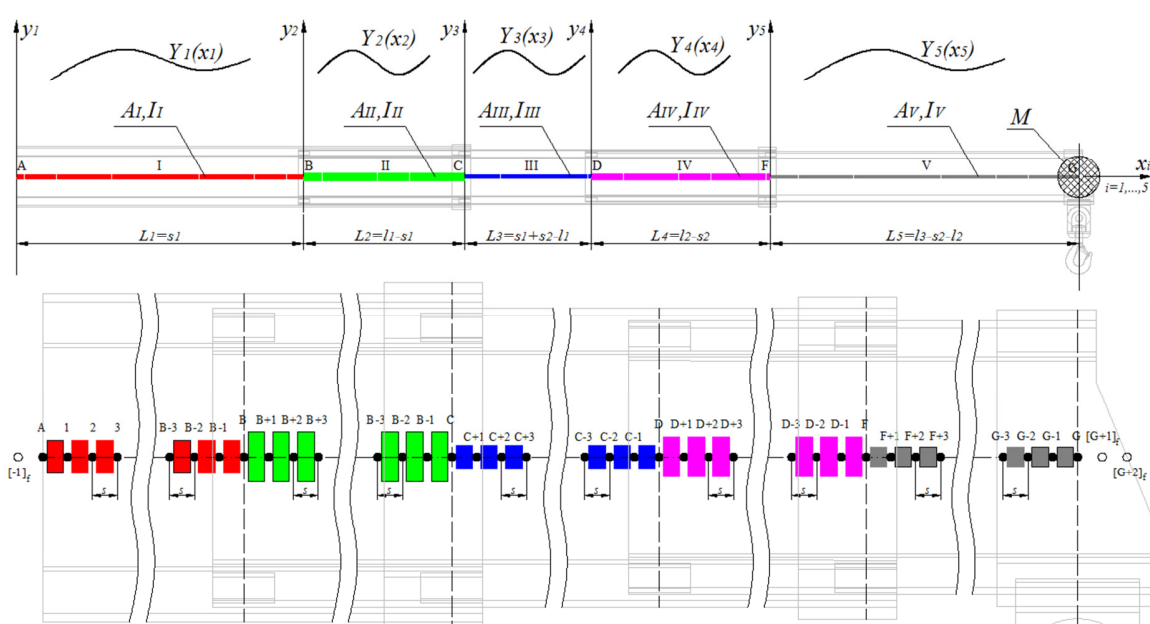
- Разлике у померањима елементарних делића унутрашњег и спољашњег сегмента у истом глобалном пресеку телескопа су занемарљиво мале; другим речима, ово подразумева да су динамичке еластичне линије увучених делова сегмената идентичне са динамичким еластичним линијама одговарајућих делова спољашњих сегмената;
- Утицаји смицајних сила и ротације елементарних делова сегмената су занемарљиви, односно, усвојен је *Euler-Bernoulli*-јев модел носача при савојним осцилацијама;
- Не постоје зазори у контактима клизача и сегмената телескопа;
- Занемарује се утицај локалних деформација зидова сегмената услед деловања локалних контактних оптерећења у односу на глобална померања тежишта попречних пресека

Претпоставка о једнакости еластичних линија делова сегмената увучених један у другога, имплицира приступ који телескоп третира као јединствени носач степенасто променљивих инерцијалних и еластичних својстава. Наиме, теоријске контактне тачке на срединама клизних плочица деле целу структуру на секције, и оквиру којих имамо константно расподељене масе и крутости. То значи да свакој секцији одговара сопствена функција динамичке еластичне линије. Парцијалне функције еластичних линија се сустичу у границама секција и формирају глобалну динамичку еластичну линију телескопа. Повезивање парцијалних функција по секцијама се одвија кроз граничне услове у граничним тачкама, односно, померања елементарних делића секција су спрегнута преко граничних услова који се дефинишу на местима клизних плочица, као и на крајевима структуре, у ослонцу и на слободном крају.

С обзиром да природа ослањања зависи од зглобног дела стреле, овде ће се, ради поједностављења, узети да је леви крај телескопа укљештен, при чему ова произвољност не утиче на природу и ток поступка који ће бити изложен. При изради динамичког модела целе стреле у конкретној ситуацији, померања крајње тачке зглобног дела ће уједно бити и померања почетне тачке телескопског дела.

На другом, слободном крају телескопа, посредством вешајног склопа теретне куке или директно (као код хидрауличних подизних платформи), везан је терет, који се састоји од масе корисног терета и, евентуално, масе специјалног захватног уређаја (нпр. грабилице, корпе, и сл.). При даљем разматрању, узео се случај да је укупна маса терета на слободном крају директно везана за крајњи попречни пресек трећег сегмента.

Сагласно изнетим претпоставкама, модел за прорачун сопствених фреквенција телескопског дела приказан је на слици 6.2.



Слика 6.2 Прорачунски модел телескопа

Крајње тачке сегмената, где се налазе клизачи, деле целу структуру на секције, у оквиру којих су функције динамичких еластичних еластичних линија диференцијабилне. Свака од секција има сопствени локални координатни систем  $x_i y_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ .

Дужина целе структуре се дискретизује кораком дужине  $s$  на укупно  $N$  елементарних делова, при чему настаје исто толико покретних тачака (чворова). Дакле, имамо да је

$$s = \frac{s_1 + s_2 + l_3}{N} \quad (6.1)$$

У циљу прегледности будућих израза, усвојиће се да редни бројеви граничних чворова носе ознаку самих чворова:

$$\begin{aligned} B &= \frac{s_1}{s} \\ C &= \frac{l_1}{s} \\ D &= \frac{s_1 + s_2}{s} \\ F &= \frac{s_1 + l_2}{s} \\ G &= N = \frac{s_1 + s_2 + l_3}{s} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Дужине секција телескопа, њихове подужне масе и моменти инерције попречних пресека, изражени преко карактеристика сегмената и конфигурационих координата гласе:

$$\begin{aligned}
L_1 &= s_1 \\
L_2 &= l_1 - s_1 \\
L_3 &= s_1 + s_2 - l_1 \\
L_4 &= l_2 - s_2 \\
L_5 &= l_3 + s_2 - l_2
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
m_I &= m_1 \\
m_{II} &= m_1 + m_2 \\
m_{III} &= m_2 \\
m_{IV} &= m_2 + m_3
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
I_I &= I_1 \\
I_{II} &= I_1 + I_2 \\
I_{III} &= I_2 \\
I_{IV} &= I_2 + I_3 \\
I_V &= I_3
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Полазна једначина је позната диференцијална једначина слободних савојних осцилација за *Euler-Bernoulli*-јев модел гредних носача:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq L \tag{6.6}$$

Ако се усвоји познати облик за решење диференцијалне једначине

$$y(x,t) = CY(x) \cos(\omega t - \varphi), \quad 0 \leq x \leq L \tag{6.7}$$

и уважи чињеница да су крутост и подужна маса константни у оквиру секција, диференцијална једначина еластичне линије за сваку од секција телескопа има облик

$$EI_i \frac{d^4 Y_i(x_i)}{dx_i^4} = m_i \omega^2 Y_i(x_i), \quad 0 < x_i \leq L_i, \quad i = 1, \dots, 5 \tag{6.8}$$

Користећи апроксимативне изразе за изводе функције динамичке еластичне линије по подужној координати у произвољној тачки  $n$ , изведене на бази централних коначних разлика

$$\begin{aligned}
\left( \frac{dY}{dx} \right)_n &= Y_n' \approx \frac{-Y_{n-1} + Y_{n+1}}{2s} \\
\left( \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)_n &= Y_n'' \approx \frac{Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1}}{s^2} \\
\left( \frac{d^3 Y}{dx^3} \right)_n &= Y_n''' \approx \frac{-Y_{n-2} + 2Y_{n-1} - 2Y_{n+1} + Y_{n+2}}{2s^3} \\
\left( \frac{d^4 Y}{dx^4} \right)_n &= Y_n^{IV} \approx \frac{Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}}{s^4}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

где величина  $s$  представља корак дискретизације неутралне линије структуре, диференцијална једначина (6.8) се разлаже на низ линеарних алгебарских једначина са померањима дискретних тачака (чворова) као непознатама:

$$EI_n \frac{Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}}{s^4} = m_n \omega^2 Y_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (6.10)$$

Ако се уведе ознака за сопствену вредност

$$\lambda = \omega^2 s^4 \quad (6.11)$$

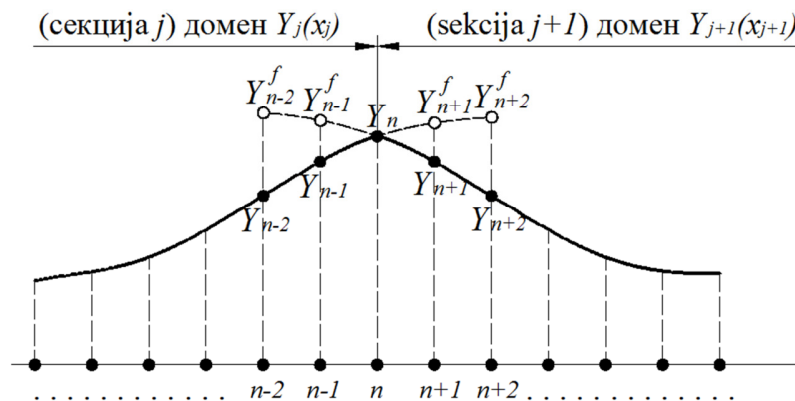
израз (6.10) добија прегледнију форму

$$Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2} = \frac{m_n \lambda}{EI_n} Y_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (6.12)$$

Померања чворова секција су спрегнута преко одређених услова који важе за граничне чворове и који се дефинишу у погледу померања (угиба), нагиба, момента савијања и трансверзалне силе.

Претходни облик дискретизоване једначине функције померања написане за произвољни чвор  $n$ , осим померања номиналног чвора обухвата и померања по два суседна чвора са сваке стране. Ако чвор у ослопцу, у тачки  $A$ , носи “нулти” редни број и ако се прва дискретизована једначина испишује за чвор број  $1$ , у једначини ће фигурирати померање непостојећег чвора са леве стране тачке у ознаци  $[-1]_f$ . Истовремено, на слободном крају телескопа, при писању једначине за крајњу тачку  $G$ , имаћемо померања два непостојећа чвора са десне стране  $[G+1]_f$  и  $[G+2]_f$ , слика 6.2.

Остали фиктивни чворови, односно, фиктивна померања се јављају око граничних чворова између секција, као последица тога што се налазе ван домена парцијалне функције динамичке еластичне линије за дату секцију, слика 6.3. У наредном излагању, померања фиктивних чворова ће, сагласно слици 6.3, бити индексирани са “ $f$ ”.



Слика 6.3 Фиктивни чворови на граници секција



### 6.3 Гранични услови у дискретизованом облику преко централних коначних разлика

#### 6.3.1 Гранични услови у ослонцу $A$

Први услов је да је померање у ослонцу једнако нули

$$Y_1(x_1 = 0) = 0 \quad (6.13)$$

односно, у дискретизованом облику то је

$$Y_0 = 0 \quad (6.14)$$

Такође, нагиб еластичне линије у укљештењу је једнак нули

$$Y_1'(x_1 = 0) = 0 \quad (6.15)$$

односно, у дискретизованом облику имамо да је

$$\frac{-Y_{-1}^f + Y_1}{2s} = 0$$

тј.

$$Y_{-1}^f = Y_1 \quad (6.16)$$

#### 6.3.2 Гранични услови у тачки $B$

Нагиб у граничној тачки  $B$  је једнак са обе стране

$$Y_1'(x_1 = L_1 = s_1) = Y_2'(x_2 = 0) \quad (6.17)$$

односно, у дискретизованом облику овај услов гласи

$$\frac{-Y_{B-1} + Y_{B+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{B-1}^f + Y_{B+1}}{2s}$$

тј.

$$Y_{B-1}^f + Y_{B+1}^f = Y_{B-1} + Y_{B+1} \quad (6.18)$$

С обзиром да у тачки  $B$  не делују спољашња оптерећења, имамо да су трансверзална сила и момент савијања једнаки са леве и десне стране. За момент имамо

$$M_1(x_1 = L_1 = s_1) = M_2(x_2 = 0) \quad (6.19)$$

Користећи познату везу момента савијања и другог извода функције еластичне линије имамо да је

$$EI_I Y_1''(s_1) = EI_{II} Y_2''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$I_1(Y_{B-1} - 2Y_B + Y_{B+1}^f) = (I_1 + I_2)(Y_{B-1}^f - 2Y_B + Y_{B+1}) \quad (6.20)$$

Услов по трансверзалној сили гласи

$$Q_1(x_1 = L_1 = s_1) = Q_2(x_2 = 0) \quad (6.21)$$

Користећи познату везу трансверзалне силе и трећег извода функције еластичне линије имамо да је

$$-EI_I Y_1'''(s_1) = -EI_{II} Y_2'''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$I_1(-Y_{B-2} + 2Y_{B-1} - 2Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f) = (I_1 + I_2)(-Y_{B-2}^f + 2Y_{B-1}^f - 2Y_{B+1} + Y_{B+2}) \quad (6.22)$$

Ако се усвоји правило да се дискретизована једначина за померање граничних чворова формира преко функције еластичне линије претходног сегмента (са леве стране), онда у њој фигуришу фиктивна померања два фиктивна чвора са десне стране. На пример, код чвора  $B$  имаћемо фиктивна померања  $Y_{B+1}^f$  и  $Y_{B+2}^f$ .

С обзиром да имамо формирана три гранична услова за тачку  $B$  а четири фиктивна померања која се морају елиминисати  $Y_{B-1}^f$ ,  $Y_{B+1}^f$ ,  $Y_{B-2}^f$  и  $Y_{B+2}^f$ , недостаје нам још један услов да би затворили овај локални систем једначина. Тај услов проистиче из чињенице да домени функција  $Y_1(x_1)$  и  $Y_2(x_2)$  деле граничну тачку  $B$ , односно, да је њено померање исто, без обзира коју функцију користимо. Дискретизоване једначине за померање чвора  $B$ , изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_B \quad (6.23)$$

$$Y_{B-2}^f - 4Y_{B-1}^f + 6Y_B - 4Y_{B+1} + Y_{B+2} = \frac{(m_1 + m_2) \lambda}{E(I_1 + I_2)} Y_B \quad (6.24)$$

Изједначавањем израза за  $Y_B$ , добијених из претходних једначина добијамо недостајућу везу

$$\frac{EI_1}{m_1 \lambda} (Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f) = \frac{E(I_1 + I_2)}{(m_1 + m_2) \lambda} (Y_{B-2}^f - 4Y_{B-1}^f + 6Y_B - 4Y_{B+1} + Y_{B+2})$$

односно, након сређивања

$$Y_{B-2}^f = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{I_1}{I_1 + I_2} (Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f) + 4Y_{B-1}^f - 6Y_B + 4Y_{B+1} - Y_{B+2} \quad (6.25)$$

Уведимо бездимензионе коефицијенте крутости и маса секција

$$a = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad b = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

Користећи уведене бездимензионе коефицијенте и комбиновањем услова (6.18) и (6.20) добијамо коначне изразе за фиктивна померања  $Y_{B-1}^f$  и  $Y_{B+1}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре:

$$Y_{B+1}^f = \frac{1-a}{1+a} Y_{B-1} - 2 \frac{1-a}{1+a} Y_B + \frac{2}{1+a} Y_{B+1} \quad (6.26)$$

$$Y_{B-1}^f = 2 \frac{a}{1+a} Y_{B-1} + 2 \frac{1-a}{1+a} Y_B - \frac{1-a}{1+a} Y_{B+1} \quad (6.27)$$

Из услова (6.22) добија се

$$Y_{B+2}^f = \frac{1}{a}(-Y_{B-2}^f + 2Y_{B-1}^f - 2Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f) + Y_{B-2} - 2Y_{B-1} + 2Y_{B+1}^f \quad (6.28)$$

Замењујући једначине фиктивних померања (6.25), (6.26) и (6.27) у израз (6.28), добија се израз за фиктивно померање  $Y_{B+2}^f$  у функцији реалних чворова дискретизоване структуре. Дакле, имамо да је

$$Y_{B+2}^f = \frac{1}{a}[-ab(Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f) - 4Y_{B-1}^f + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f + 2Y_{B-1}^f - 2Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f] + Y_{B-2} - 2Y_{B-1} + 2Y_{B+1}^f$$

односно

$$(1+b)Y_{B+2}^f = b(4Y_{B-1} + 4Y_{B+1}^f - Y_{B-2} - 6Y_B) + \frac{1}{a}(-2Y_{B-1}^f + 6Y_B - 6Y_{B+1} + 2Y_{B+2}^f) + Y_{B-2} - 2Y_{B-1} + 2Y_{B+1}^f$$

Заменом израза за фиктивна померања  $Y_{B-1}^f$  и  $Y_{B+1}^f$  у претходни добија се:

$$(1+b)Y_{B+2}^f = b[4Y_{B-1} + 4(\frac{1-a}{1+a}Y_{B-1} - 2\frac{1-a}{1+a}Y_B + \frac{2}{1+a}Y_{B+1}) - Y_{B-2} - 6Y_B] + Y_{B-2} - 2Y_{B-1} + 2(\frac{1-a}{1+a}Y_{B-1} - 2\frac{1-a}{1+a}Y_B + \frac{2}{1+a}Y_{B+1}) + \frac{1}{a}[-2(2\frac{a}{1+a}Y_{B-1} + 2\frac{1-a}{1+a}Y_B - \frac{1-a}{1+a}Y_{B+1}) + 6Y_B - 6Y_{B+1} + 2Y_{B+2}^f]$$

Након сређивања добијамо коначан израз за фиктивно померање  $Y_{B+2}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре

$$Y_{B+2}^f = \frac{1-b}{1+b}Y_{B-2} + \frac{8b-4-4a}{(1+b)(1+a)}Y_{B-1} - \frac{14ab-2a^2b-4a^2-2-6a}{a(1+b)(1+a)}Y_B + \frac{8ab-4a-4}{a(1+b)(1+a)}Y_{B+1} + \frac{2}{a(1+b)}Y_{B+2}^f \quad (6.29)$$

### 6.3.3 Гранични услови у тачки C

Нагиб у граничној тачки C је једнак са обе стране

$$Y_2'(x_2 = L_2 = l_1 - s_1) = Y_3'(x_3 = 0) \quad (6.30)$$

односно, у дискретизованом облику овај услов гласи

$$\frac{-Y_{C-1} + Y_{C+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{C-1}^f + Y_{C+1}}{2s}$$

$$Y_{C-1}^f + Y_{C+1}^f = Y_{C-1} + Y_{C+1} \quad (6.31)$$

С обзиром да у тачки C не делују спољашња оптерећења, имамо да су трансверзална сила и момент савијања једнаки са леве и десне стране. За момент имамо

$$M_2(x_2 = L_2 = l_1 - s_1) = M_3(x_3 = 0) \quad (6.32)$$

Користећи познату везу момента савијања и другог извода функције еластичне линије имамо да је

$$EI_{II} Y_2''(l_1 - s_1) = EI_{III} Y_3''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$(I_1 + I_2)(Y_{C-1} - 2Y_C + Y_{C+1}^f) = I_2(Y_{C-1}^f - 2Y_C + Y_{C+1}) \quad (6.33)$$

Услов по трансверзалној сили гласи

$$Q_2(x_2 = L_2 = l_1 - s_1) = Q_3(x_3 = 0) \quad (6.34)$$

Користећи познату везу трансверзалне силе и трећег извода функције еластичне линије имамо да је

$$-EI_{II} Y_2'''(l_1 - s_1) = -EI_{III} Y_3'''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$(I_1 + I_2)(-Y_{C-2} + 2Y_{C-1} - 2Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f) = I_1(-Y_{C-2}^f + 2Y_{C-1}^f - 2Y_{C+1} + Y_{C+2}) \quad (6.35)$$

Ако се усвоји правило да се дискретизована једначина за померање граничних чворова формира преко функције еластичне линије претходног сегмента (са леве стране), онда у њој фигуришу фиктивна померања два фиктивна чвора са десне стране. На пример, код чвора  $C$  имаћемо фиктивна померања  $Y_{C+1}^f$  и  $Y_{C+2}^f$ .

С обзиром да имамо формирана три гранична услова за тачку  $C$  а четири фиктивна померања која се морају елиминисати  $Y_{C-1}^f$ ,  $Y_{C+1}^f$ ,  $Y_{C-2}^f$  и  $Y_{C+2}^f$ , недостаје нам још један услов да би затворили овај локални систем једначина. Тај услов проистиче из чињенице да домени функција  $Y_2(x_2)$  и  $Y_3(x_3)$  деле граничну тачку  $C$ , односно, да је њено померање исто, без обзира коју функцију користимо. Дискретизоване једначине за померање чвора  $C$ , изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{C-2} - 4Y_{C-1} + 6Y_C - 4Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f = \frac{(m_1 + m_2)\lambda}{E(I_1 + I_2)} Y_C \quad (6.36)$$

$$Y_{C-2}^f - 4Y_{C-1}^f + 6Y_C - 4Y_{C+1} + Y_{C+2} = \frac{m_2\lambda}{EI_2} Y_C \quad (6.37)$$

Изједначавањем израза за  $Y_C$ , добијених из претходних једначина добијамо недостајућу везу

$$\frac{E(I_1 + I_2)}{(m_1 + m_2)\lambda} (Y_{C-2} - 4Y_{C-1} + 6Y_C - 4Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f) = \frac{EI_2}{m_2\lambda} (Y_{C-2}^f - 4Y_{C-1}^f + 6Y_C - 4Y_{C+1} + Y_{C+2})$$

односно, након сређивања

$$Y_{C-2}^f = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{I_1 + I_2}{I_2} (Y_{C-2} - 4Y_{C-1} + 6Y_C - 4Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f) + 4Y_{C-1}^f - 6Y_C + 4Y_{C+1} - Y_{C+2} \quad (6.38)$$

Уведимо бездимензионе коефицијенте крутости и маса суседних секција

$$c = \frac{I_1 + I_2}{I_2} \quad d = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Користећи уведене бездимензионе коефицијенте и комбиновањем услова (6.31) и (6.33) добијамо коначне изразе за фиктивна померања  $Y_{C-1}^f$  и  $Y_{C+1}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре. Из израза (6.31) имамо да је

$$Y_{C-1}^f = Y_{C-1} + Y_{C+1} - Y_{C+1}^f$$

Заменом претходног израза у услов (6.33) добија се

$$\frac{I_1 + I_2}{I_2} (Y_{C-1} - 2Y_C + Y_{C+1}^f) = Y_{C-1} + Y_{C+1} - Y_{C+1}^f - 2Y_C + Y_{C+1}$$

односно, након сређивања, коначан израз

$$Y_{C+1}^f = \frac{1-c}{1+c} Y_{C-1} - 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C + \frac{2}{1+c} Y_{C+1} \quad (6.39)$$

Враћањем претходног израза у једначину за  $Y_{C-1}^f$  имамо

$$Y_{C-1}^f = \left(1 - \frac{1-c}{1+c}\right) Y_{C-1} + 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C + \left(1 - \frac{2}{1+c}\right) Y_{C+1}$$

односно, након сређивања, коначан израз

$$Y_{C-1}^f = 2 \frac{c}{1+c} Y_{C-1} + 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C - \frac{1-c}{1+c} Y_{C+1} \quad (6.40)$$

Из услова (6.35) добија се

$$Y_{C+2}^f = \frac{1}{c} (-Y_{C-2}^f + 2Y_{C-1}^f - 2Y_{C+1} + Y_{C+2}) + Y_{C-2} - 2Y_{C-1} + 2Y_{C+1}^f \quad (6.41)$$

Замењујући једначине фиктивних померања (6.38), (6.39) и (6.40) у израз (6.41), добија се израз за фиктивно померање  $Y_{C+2}^f$  у функцији реалних чворова дискретизоване структуре. Дакле, имамо да је

$$Y_{C+2}^f = \frac{1}{c} [-cd(Y_{C-2} - 4Y_{C-1} + 6Y_C - 4Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f) - 4Y_{C-1}^f + 6Y_C - 4Y_{C+1} + Y_{C+2} + 2Y_{C-1}^f - 2Y_{C+1} + Y_{C+2}] + Y_{C-2} - 2Y_{C-1} + 2Y_{C+1}^f$$

односно

$$(1+d)Y_{C+2}^f = d(4Y_{C-1} + 4Y_{C+1}^f - Y_{C-2} - 6Y_C) + \frac{1}{c} (-2Y_{C-1}^f + 6Y_C - 6Y_{C+1} + 2Y_{C+2}) + Y_{C-2} - 2Y_{C-1} + 2Y_{C+1}^f$$

Заменом израза за фиктивна померања  $Y_{C-1}^f$  и  $Y_{C+1}^f$  у претходни добија се:

$$(1+d)Y_{C+2}^f = d[4Y_{C-1} + 4\left(\frac{1-c}{1+c} Y_{C-1} - 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C + \frac{2}{1+c} Y_{C+1}\right) - Y_{C-2} - 6Y_C] + Y_{C-2} - 2Y_{C-1} + 2\left(\frac{1-c}{1+c} Y_{C-1} - 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C + \frac{2}{1+c} Y_{C+1}\right) + \frac{1}{c} [-2\left(2 \frac{c}{1+c} Y_{C-1} + 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C - \frac{1-c}{1+c} Y_{C+1}\right) + 6Y_C - 6Y_{C+1} + 2Y_{C+2}]$$

Након сређивања добијамо коначан израз за фиктивно померање  $Y_{C+2}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре

$$Y_{C+2}^f = \frac{1-d}{1+d} Y_{C-2} + \frac{8d-4-4c}{(1+d)(1+c)} Y_{C-1} - \frac{14cd-2c^2d-4c^2-2-6c}{c(1+d)(1+c)} Y_C + \frac{8cd-4c-4}{c(1+d)(1+c)} Y_{C+1} + \frac{2}{c(1+d)} Y_{C+2} \quad (6.42)$$

### 6.3.4 Гранични услови у тачки $D$

Нагиб у граничној тачки  $D$  је једнак са обе стране

$$Y_3'(x_3 = L_3 = s_1 + s_2 - l_1) = Y_4'(x_4 = 0) \quad (6.43)$$

односно, у дискретизованом облику овај услов гласи

$$\frac{-Y_{D-1} + Y_{D+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{D-1}^f + Y_{D+1}}{2s}$$

тј.

$$Y_{D-1}^f + Y_{D+1}^f = Y_{D-1} + Y_{D+1} \quad (6.44)$$

С обзиром да у тачки  $D$  не делују спољашња оптерећења, имамо да су трансверзална сила и момент савијања једнаки са леве и десне стране. За момент имамо

$$M_3(x_3 = L_3 = s_1 + s_2 - l_1) = M_4(x_4 = 0) \quad (6.45)$$

Користећи познату везу момента савијања и другог извода функције еластичне линије имамо да је

$$EI_{III} Y_3''(s_1 + s_2 - l_1) = EI_{IV} Y_4''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$I_2(Y_{D-1} - 2Y_D + Y_{D+1}^f) = (I_2 + I_3)(Y_{D-1}^f - 2Y_D + Y_{D+1}) \quad (6.46)$$

Услов по трансверзалној сили гласи

$$Q_3(x_3 = L_3 = s_1 + s_2 - l_1) = Q_4(x_4 = 0) \quad (6.47)$$

Користећи познату везу трансверзалне силе и трећег извода функције еластичне линије имамо да је

$$-EI_{III} Y_3'''(s_1 + s_2 - l_1) = -EI_{IV} Y_4'''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$I_2(-Y_{D-2} + 2Y_{D-1} - 2Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f) = (I_2 + I_3)(-Y_{D-2}^f + 2Y_{D-1}^f - 2Y_{D+1} + Y_{D+2}) \quad (6.48)$$

Ако се усвоји правило да се дискретизована једначина за померање граничних чворова формира преко функције еластичне линије претходног сегмента (са леве стране), онда у њој фигуришу фиктивна померања два фиктивна чвора са десне стране.

На пример, код чвора  $D$  имаћемо фиктивна померања  $Y_{D+1}^f$  и  $Y_{D+2}^f$ .

С обзиром да имамо формирана три гранична услова за тачку  $D$  а четири фиктивна померања која се морају елиминисати  $Y_{D-1}^f$ ,  $Y_{D+1}^f$ ,  $Y_{D-2}^f$  и  $Y_{D+2}^f$ , недостаје нам још један услов да би затворили овај локални систем једначина. Тај услов проистиче из чињенице да домени функција  $Y_3(x_3)$  и  $Y_4(x_4)$  деле граничну тачку  $D$ , односно, да је њено померање исто, без обзира коју функцију користимо. Дискретизоване једначине за померање чвора  $D$ , изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f = \frac{m_2 \lambda}{EI_2} Y_D \quad (6.49)$$

$$Y_{D-2}^f - 4Y_{D-1}^f + 6Y_D - 4Y_{D+1} + Y_{D+2} = \frac{(m_2 + m_3) \lambda}{E(I_2 + I_3)} Y_D \quad (6.50)$$

Изједначавањем израза за  $Y_D$ , добијених из претходних једначина добијамо недостајућу везу

$$\frac{EI_2}{m_2 \lambda} (Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f) = \frac{E(I_2 + I_3)}{(m_2 + m_3) \lambda} (Y_{D-2}^f - 4Y_{D-1}^f + 6Y_D - 4Y_{D+1} + Y_{D+2})$$

односно, након сређивања

$$Y_{D-2}^f = \frac{m_2 + m_3}{m_2} \frac{I_2}{I_2 + I_3} (Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f) + 4Y_{D-1}^f - 6Y_D + 4Y_{D+1} - Y_{D+2} \quad (6.51)$$

Уведимо бездимензионе коефицијенте крутости и маса суседних секција

$$e = \frac{I_2}{I_2 + I_3} \quad f = \frac{m_2 + m_3}{m_2}$$

Користећи уведене бездимензионе коефицијенте и комбиновањем услова (6.44) и (6.46) добијамо коначне изразе за фиктивна померања  $Y_{D-1}^f$  и  $Y_{D+1}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре. Из израза (6.44) имамо да је

$$Y_{D-1}^f = Y_{D-1} + Y_{D+1} - Y_{D+1}^f$$

Заменом претходног израза у услов (6.46) добија се

$$\frac{I_2}{I_2 + I_3} (Y_{D-1} - 2Y_D + Y_{D+1}^f) = Y_{D-1} + Y_{D+1} - Y_{D+1}^f - 2Y_D + Y_{D+1}$$

односно, након сређивања, коначан израз

$$Y_{D+1}^f = \frac{1-e}{1+e} Y_{D-1} - 2 \frac{1-e}{1+e} Y_D + \frac{2}{1+e} Y_{D+1} \quad (6.52)$$

Враћањем претходног израза у једначину за  $Y_{D-1}^f$  имамо

$$Y_{D-1}^f = (1 - \frac{1-e}{1+e}) Y_{D-1} + 2 \frac{1-e}{1+e} Y_D + (1 - \frac{2}{1+e}) Y_{D+1}$$

односно, након сређивања, коначан израз

$$Y_{D-1}^f = 2 \frac{e}{1+e} Y_{D-1} + 2 \frac{1-e}{1+e} Y_D - \frac{1-e}{1+e} Y_{D+1} \quad (6.53)$$

Из услова (6.48) добија се

$$Y_{D+2}^f = \frac{1}{e}(-Y_{D-2}^f + 2Y_{D-1}^f - 2Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f) + Y_{D-2} - 2Y_{D-1} + 2Y_{D+1}^f \quad (6.54)$$

Замењујући једначине фиктивних померања (6.51), (6.52) и (6.53) у израз (6.54), добија се израз за фиктивно померање  $Y_{D+2}^f$  у функцији реалних чворова дискретизоване структуре. Дакле, имамо да је

$$Y_{D+2}^f = \frac{1}{e}[-ef(Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f) - 4Y_{D-1}^f + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2} + 2Y_{D-1}^f - 2Y_{D+1}^f + Y_{D+2}] + Y_{D-2} - 2Y_{D-1} + 2Y_{D+1}^f$$

односно

$$(1+f)Y_{D+2}^f = f(4Y_{D-1} + 4Y_{D+1}^f - Y_{D-2} - 6Y_D) + \frac{1}{e}(-2Y_{D-1}^f + 6Y_D - 6Y_{D+1} + 2Y_{D+2}) + Y_{D-2} - 2Y_{D-1} + 2Y_{D+1}^f$$

Заменом израза за фиктивна померања  $Y_{D-1}^f$  и  $Y_{D+1}^f$  у претходни добија се:

$$(1+f)Y_{D+2}^f = f[4Y_{D-1} + 4\left(\frac{1-e}{1+e}Y_{D-1} - 2\frac{1-e}{1+e}Y_D + \frac{2}{1+e}Y_{D+1}\right) - Y_{D-2} - 6Y_D] + Y_{D-2} - 2Y_{D-1} + 2\left(\frac{1-e}{1+e}Y_{D-1} - 2\frac{1-e}{1+e}Y_D + \frac{2}{1+e}Y_{D+1}\right) + \frac{1}{e}\left[-2\left(2\frac{e}{1+e}Y_{D-1} + 2\frac{1-e}{1+e}Y_D - \frac{1-e}{1+e}Y_{D+1}\right) + 6Y_D - 6Y_{D+1} + 2Y_{D+2}\right]$$

Након сређивања добијамо коначан израз за фиктивно померање  $Y_{D+2}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре

$$Y_{D+2}^f = \frac{1-f}{1+f}Y_{D-2} + \frac{8f-4-4e}{(1+f)(1+e)}Y_{D-1} - \frac{14ef-2e^2f-4e^2-2-6e}{e(1+f)(1+e)}Y_D + \frac{8ef-4e-4}{e(1+f)(1+e)}Y_{D+1} + \frac{2}{e(1+f)}Y_{D+2} \quad (6.55)$$

### 6.3.5 Гранични услови у тачки $F$

Нагиб у граничној тачки  $F$  је једнак са обе стране

$$Y_4'(x_4 = L_4 = l_2 - s_2) = Y_5'(x_5 = 0) \quad (6.56)$$

односно, у дискретизованом облику овај услов гласи

$$\frac{-Y_{F-1} + Y_{F+1}^f}{2s} = \frac{-Y_{F-1}^f + Y_{F+1}}{2s}$$

$$Y_{F-1}^f + Y_{F+1}^f = Y_{F-1} + Y_{F+1} \quad (6.57)$$

С обзиром да у тачки  $F$  не делују спољашња оптерећења, имамо да су трансверзална сила и момент савијања једнаки са леве и десне стране. За момент имамо

$$M_4(x_4 = L_4 = l_2 - s_2) = M_5(x_5 = 0) \quad (6.58)$$



Користећи познату везу момента савијања и другог извода функције еластичне линије имамо да је

$$EI_{IV} Y_4''(l_2 - s_2) = EI_V Y_5''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$(I_2 + I_3)(Y_{F-1} - 2Y_F + Y_{F+1}^f) = I_3(Y_{F-1}^f - 2Y_F + Y_{F+1}) \quad (6.59)$$

Услов по трансверзалној сили гласи

$$Q_4(x_4 = L_4 = l_2 - s_2) = Q_5(x_5 = 0) \quad (6.60)$$

Користећи познату везу трансверзалне силе и трећег извода функције еластичне линије имамо да је

$$-EI_{IV} Y_4'''(l_2 - s_2) = -EI_V Y_5'''(0)$$

Након замене момената инерције и дискретизације овај услов добија форму

$$(I_2 + I_3)(-Y_{F-2} + 2Y_{F-1} - 2Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f) = I_3(-Y_{F-2}^f + 2Y_{F-1}^f - 2Y_{F+1} + Y_{F+2}) \quad (6.61)$$

Ако се усвоји правило да се дискретизована једначина за померање граничних чворова формира преко функције еластичне линије претходног сегмента (са леве стране), онда у њој фигуришу фиктивна померања два фиктивна чвора са десне стране. На пример, код чвора  $F$  имаћемо фиктивна померања  $Y_{F+1}^f$  и  $Y_{F+2}^f$ .

С обзиром да имамо формирана три гранична услова за тачку  $F$  а четири фиктивна померања која се морају елиминисати  $Y_{F-1}^f$ ,  $Y_{F+1}^f$ ,  $Y_{F-2}^f$  и  $Y_{F+2}^f$ , недостаје нам још један услов да би затворили овај локални систем једначина. Тај услов проистиче из чињенице да домени функција  $Y_4(x_4)$  и  $Y_5(x_5)$  деле граничну тачку  $F$ , односно, да је њено померање исто, без обзира коју функцију користимо. Дискретизоване једначине за померање чвора  $F$ , изражене преко поменутих функција, гласе:

$$Y_{F-2} - 4Y_{F-1} + 6Y_F - 4Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f = \frac{(m_2 + m_3)\lambda}{E(I_2 + I_3)} Y_F \quad (6.62)$$

$$Y_{F-2}^f - 4Y_{F-1}^f + 6Y_F - 4Y_{F+1} + Y_{F+2} = \frac{m_3\lambda}{EI_3} Y_F \quad (6.63)$$

Изједначавањем израза за  $Y_F$ , добијених из претходних једначина добијамо недостајућу везу

$$\frac{E(I_2 + I_3)}{(m_2 + m_3)\lambda} (Y_{F-2} - 4Y_{F-1} + 6Y_F - 4Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f) = \frac{EI_3}{m_3\lambda} (Y_{F-2}^f - 4Y_{F-1}^f + 6Y_F - 4Y_{F+1} + Y_{F+2})$$

односно, након сређивања

$$Y_{F-2}^f = \frac{m_3}{m_2 + m_3} \frac{I_2 + I_3}{I_3} (Y_{F-2} - 4Y_{F-1} + 6Y_F - 4Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f) + 4Y_{F-1}^f - 6Y_F + 4Y_{F+1} - Y_{F+2} \quad (6.64)$$

Уведимо бездимензионе коефицијенте крутости и маса суседних секција

$$g = \frac{I_2 + I_3}{I_3} \quad h = \frac{m_3}{m_2 + m_3}$$

Користећи уведене бездимензионе коефицијенте и комбиновањем услова (6.57) и (6.59) добијамо коначне изразе за фиктивна померања  $Y_{F-1}^f$  и  $Y_{F+1}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре. Из израза (6.57) имамо да је

$$Y_{F-1}^f = Y_{F-1} + Y_{F+1} - Y_{F+1}^f$$

Заменом претходног израза у услов (6.59) добија се

$$\frac{I_2 + I_3}{I_3} (Y_{F-1} - 2Y_F + Y_{F+1}^f) = Y_{F-1} + Y_{F+1} - Y_{F+1}^f - 2Y_F + Y_{F+1}$$

односно, након сређивања, коначан израз

$$Y_{F+1}^f = \frac{1-g}{1+g} Y_{F-1} - 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F + \frac{2}{1+g} Y_{F+1} \quad (6.65)$$

Враћањем претходног израза у једначину за  $Y_{F-1}^f$  имамо

$$Y_{F-1}^f = (1 - \frac{1-g}{1+g}) Y_{F-1} + 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F + (1 - \frac{2}{1+g}) Y_{F+1}$$

односно, након сређивања, коначан израз

$$Y_{F-1}^f = 2 \frac{g}{1+g} Y_{F-1} + 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F - \frac{1-g}{1+g} Y_{F+1} \quad (6.66)$$

Из услова (6.61) добија се

$$Y_{F+2}^f = \frac{1}{g} (-Y_{F-2}^f + 2Y_{F-1}^f - 2Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f) + Y_{F-2} - 2Y_{F-1} + 2Y_{F+1}^f \quad (6.67)$$

Замењујући једначине фиктивних померања (6.64), (6.65) и (6.66) у израз (6.67), добија се израз за фиктивно померање  $Y_{F+2}^f$  у функцији реалних чворова дискретизоване структуре. Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned} Y_{F+2}^f &= \frac{1}{g} [-gh(Y_{F-2} - 4Y_{F-1} + 6Y_F - 4Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f) - 4Y_{F-1}^f + 6Y_F - \\ &\quad - 4Y_{F+1}^f + Y_{F+2} + 2Y_{F-1}^f - 2Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f] + Y_{F-2} - 2Y_{F-1} + 2Y_{F+1}^f \\ (1+h)Y_{F+2}^f &= h(4Y_{F-1} + 4Y_{F+1}^f - Y_{F-2} - 6Y_F) + \\ &\quad + \frac{1}{g} (-2Y_{F-1}^f + 6Y_F - 6Y_{F+1} + 2Y_{F+2}^f) + Y_{F-2} - 2Y_{F-1} + 2Y_{F+1}^f \end{aligned}$$

Заменом израза за фиктивна померања  $Y_{F-1}^f$  и  $Y_{F+1}^f$  у претходни добија се:

$$\begin{aligned} (1+h)Y_{D+2}^f &= h[4Y_{F-1} + 4(\frac{1-g}{1+g} Y_{F-1} - 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F + \frac{2}{1+g} Y_{F+1}) - Y_{F-2} - 6Y_F] + Y_{F-2} - 2Y_{F-1} + \\ &\quad + 2(\frac{1-g}{1+g} Y_{F-1} - 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F + \frac{2}{1+g} Y_{F+1}) + \\ &\quad + \frac{1}{g} [-2(2 \frac{g}{1+g} Y_{F-1} + 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F - \frac{1-g}{1+g} Y_{F+1}) + 6Y_F - 6Y_{F+1} + 2Y_{F+2}^f] \end{aligned}$$

Након сређивања добијамо коначан израз за фиктивно померање  $Y_{F+2}^f$  у функцији померања реалних тачака на неутралној линији структуре

$$Y_{F+2}^f = \frac{1-h}{1+h} Y_{F-2} + \frac{8h-4-4g}{(1+h)(1+g)} Y_{F-1} - \frac{14gh-2g^2h-4g^2-2-6g}{g(1+h)(1+g)} Y_F + \frac{8gh-4g-4}{g(1+h)(1+g)} Y_{F+1} + \frac{2}{g(1+h)} Y_{F+2} \quad (6.68)$$

### 6.3.6 Гранични услови на врху телескопа у тачки $G$

На врху стреле аутодизалице, односно, на слободном крају последњег покретног сегмента телескопа, посредством вешајног склопа теретне куке или директно (нпр., као код хидрауличких подизних платформи) везан је терет, који обухвата захватни уређај и користан терет.

Под претпоставком да је терет, укупне масе  $M$ , директно везан за врх стреле, гранични услови за теоријску вешајну тачку  $G$  тичу се момента савијања и трансверзалне силе.

Ако се занемари сопствени обртни момент инерције ове концентрисане масе око осе нормалне на раван осциловања, имамо да је момент савијања у тачки  $G$  једнак нули:

$$M_5(x_5 = L_5 = l_3 + s_2 - l_3) = 0 \quad (6.69)$$

Користећи познату везу момента савијања и извода функције еластичне линије имамо да је

$$EI_V Y_5''(l_3 + s_2 - l_3) = 0$$

што у дискретизованом облику гласи

$$Y_{G+1}^f = 2Y_G - Y_{G-1} \quad (6.70)$$

Трансверзална сила у вешајној тачки  $G$  потиче од инерцијалне силе концентрисане масе терета  $M$ . Поштујући раније изложену знаковну конвенцију, имамо да је

$$Q_5(x_5 = L_5 = l_3 + s_2 - l_3, t) = -M \frac{\partial^2 y_5(x_5 = L_5 = l_3 + s_2 - l_3, t)}{\partial t^2} \quad (6.71)$$

Разлагајући функције трансверзалне силе и функције померања на производ подфункције која зависи од положаја и подфункције времена, након сређивања добијамо једнакост

$$Q_5(l_3 + s_2 - l_3) = M \omega^2 Y_5(l_3 + s_2 - l_3) \quad (6.72)$$

Користећи познату везу трансверзалне силе и извода функције померања, имамо израз

$$-EI_3 Y_5'''(l_3 + s_2 - l_3) = M \omega^2 Y_5(l_3 + s_2 - l_3) \quad (6.73)$$

чији је дискретизован облик

$$\frac{-Y_{G-2} + 2Y_{G-1} - 2Y_{G+1}^f + Y_{G+2}^f}{2s^3} = -\frac{M\omega^2}{EI_3}Y_G \quad (6.74)$$

Имајући у виду раније дефинисан облик за сопствену вредност (6.11), добија се коначан израз за фиктивно померање  $Y_{G+2}^f$  у функцији реалних померања око теоријске вешајне тачке

$$Y_{G+2}^f = Y_{G-2} - 4Y_{G-1} + \left(4 - \frac{2M\lambda}{sEI_3}\right)Y_G \quad (6.75)$$

Закључно са једначином (6.75), дефинисана су сва фиктивна померања која ће фигурирати у једначинама за померања реалних чворова структуре.

Тачност изведених израза за фиктивна померања око граничних чворова између секција телескопске структуре може се проверити усвајањем случаја да је у питању носач константне крутости и расподељене масе по целој својој дужини  $L$ . У том случају, сви бездимензиони коефицијенти крутости и маса између појединих секција  $a, b, c, d, e, f, g$  и  $h$  би били једнаки јединици, што би довело до поклапања фиктивних и реалних чворова, тј., било би у околини граничног чвора редног броја  $n$

$$Y_{n-1}^f = Y_{n-1}$$

$$Y_{n+1}^f = Y_{n+1}$$

$$Y_{n-2}^f = Y_{n-2}$$

$$Y_{n+2}^f = Y_{n+2}$$

што управо одговара случају када је функција померања непрекидна и диференцијабилна по целој дужини структуре, односно, за константну крутост и расподељену масу.

## 6.4 Формирање система алгебарских једначина по померањима реалних чворова структуре телескопа

Након дефинисања фиктивних померања на крајевима структуре и око граница секција, може се приступити формирању система линеарних алгебарских једначина по померањима реалних чворова  $Y_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , која формирају сопствене облике осциловања, при чему  $\lambda = \omega^2 s^4$  представља сопствену (карактеристичну) вредност и игра улогу параметра. За сваки реалан чвор структуре треба написати дискретизоване једначине еластичне линије (6.12) и елиминисати фиктивна померања помоћу израза изведених у претходном излагању.

За  $n = 1$ , полазна дискретизована једначина еластичне линије при слободним осцилацијама гласи:

$$Y_{-1}^f - 4Y_0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3 = \frac{m_1 \lambda}{EI_1} Y_1$$

Имајући у виду изразе дискретизованих граничних услова у ослонцу (6.14) и (6.16)

$$Y_0 = 0$$

$$Y_{-1}^f = Y_1$$

добила се коначан израз

$$B_1 [7Y_1 - 4Y_2 + Y_3] = \lambda Y_1 \quad (6.76)$$

где је  $B_1 = \frac{EI_1}{m_1}$ .

За  $n = 2$  имамо дискретизовану полазну једначину

$$Y_0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4 = \frac{\lambda}{B_1} Y_2$$

односно, коначно

$$B_1 [-4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4] = \lambda Y_2 \quad (6.77)$$

За интервал чворова  $n = 3 \div B - 2$  имамо исти облик дискретизоване једначине без фиктивних померања

$$B_1 (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = \lambda Y_n \quad (6.78)$$

За чвор  $n = B - 1$  полазна једначина гласи

$$Y_{B-3} - 4Y_{B-2} + 6Y_{B-1} - 4Y_B + Y_{B+1}^f = \frac{\lambda}{B_1} Y_{B-1}$$

Позивајући израз (6.26)

$$Y_{B+1}^f = \frac{1-a}{1+a} Y_{B-1} - 2 \frac{1-a}{1+a} Y_B + \frac{2}{1+a} Y_{B+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_1[Y_{B-3} - 4Y_{B-2} + \frac{5a+7}{1+a}Y_{B-1} - \frac{6+2a}{1+a}Y_B + \frac{2}{1+a}Y_{B+1}] = \lambda Y_{B-1} \quad (6.79)$$

С обзиром на усвојено правило да се дискретизоване једначине за гранични чвор формира преко функције еластичне линије лево њега, за гранични чвор  $n = B$  полазна једначина гласи

$$Y_{B-2} - 4Y_{B-1} + 6Y_B - 4Y_{B+1}^f + Y_{B+2}^f = \frac{\lambda}{B_1} Y_B$$

Заменом израза за фиктивна померања (6.26) и (6.29)

$$\begin{aligned} Y_{B+1}^f &= \frac{1-a}{1+a} Y_{B-1} - 2 \frac{1-a}{1+a} Y_B + \frac{2}{1+a} Y_{B+1} \\ Y_{B+2}^f &= \frac{1-b}{1+b} Y_{B-2} + \frac{8b-4-4a}{(1+b)(1+a)} Y_{B-1} - \frac{14ab-2a^2b-4a^2-2-6a}{a(1+b)(1+a)} Y_B + \\ &\quad + \frac{8ab-4a-4}{a(1+b)(1+a)} Y_{B+1} + \frac{2}{a(1+b)} Y_{B+2} \end{aligned}$$

након сређивања добија се коначан облик

$$\begin{aligned} B_1 \left[ \frac{2}{1+b} Y_{B-2} - 4 \frac{3+a}{(1+b)(1+a)} Y_{B-1} + \frac{2a^2+20a+2}{a(1+b)(1+a)} Y_B - \right. \\ \left. - \frac{12a+4}{a(1+b)(1+a)} Y_{B+1} + \frac{2}{a(1+b)} Y_{B+2} \right] = \lambda Y_B \end{aligned} \quad (6.80)$$

За први чвор у другој секцији телесопске структуре  $n = B+1$  полазна једначина гласи

$$Y_{B-1}^f - 4Y_B + 6Y_{B+1} - 4Y_{B+2} + Y_{B+3} = \frac{\lambda}{B_2} Y_{B+1}$$

где је  $B_2 = \frac{E(I_1 + I_2)}{m_1 + m_2}$ .

Позивајући израз (6.27)

$$Y_{B-1}^f = 2 \frac{a}{1+a} Y_{B-1} + 2 \frac{1-a}{1+a} Y_B - \frac{1-a}{1+a} Y_{B+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_2 \left[ \frac{2a}{1+a} Y_{B-1} - \frac{6a+2}{1+a} Y_B + \frac{7a+5}{1+a} Y_{B+1} - 4Y_{B+2} + Y_{B+3} \right] = \lambda Y_{B+1} \quad (6.81)$$

За интервал чворова  $n = B+2 \div C-2$  имамо исти облик дискретизоване једначине без фиктивних померања

$$B_2 (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = \lambda Y_n \quad (6.82)$$

За чвор  $n = C-1$  полазна једначина гласи

$$Y_{C-3} - 4Y_{C-2} + 6Y_{C-1} - 4Y_C + Y_{C+1}^f = \frac{\lambda}{B_2} Y_{C-1}$$

Позивајући израз (6.39)

$$Y_{C+1}^f = \frac{1-c}{1+c} Y_{C-1} - 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C + \frac{2}{1+c} Y_{C+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_2 [Y_{C-3} - 4Y_{C-2} + \frac{5c+7}{1+c} Y_{C-1} - \frac{6+2c}{1+c} Y_C + \frac{2}{1+c} Y_{C+1}] = \lambda Y_{C-1} \quad (6.83)$$

Аналогно претходном граничном чвору, за гранични чвор  $n = C$  полазна једначина је

$$Y_{C-2} - 4Y_{C-1} + 6Y_C - 4Y_{C+1}^f + Y_{C+2}^f = \frac{\lambda}{B_2} Y_C$$

Заменом израза за фиктивна померања (6.39) и (6.42)

$$\begin{aligned} Y_{C+1}^f &= \frac{1-c}{1+c} Y_{C-1} - 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C + \frac{2}{1+c} Y_{C+1} \\ Y_{C+2}^f &= \frac{1-d}{1+d} Y_{C-2} + \frac{8d-4-4c}{(1+d)(1+c)} Y_{C-1} - \frac{14cd-2c^2d-4c^2-2-6c}{c(1+d)(1+c)} Y_C + \\ &\quad + \frac{8cd-4c-4}{c(1+d)(1+c)} Y_{C+1} + \frac{2}{c(1+d)} Y_{C+2} \end{aligned}$$

након сређивања добија се коначан облик

$$\begin{aligned} B_2 \left[ \frac{2}{1+d} Y_{C-2} - 4 \frac{3+c}{(1+d)(1+c)} Y_{C-1} + \frac{2c^2+20c+2}{c(1+d)(1+c)} Y_C - \right. \\ \left. - \frac{12c+4}{c(1+d)(1+c)} Y_{C+1} + \frac{2}{c(1+d)} Y_{C+2} \right] = \lambda Y_C \end{aligned} \quad (6.84)$$

За први чвор у трећој секцији телесопске структуре  $n = C+1$  полазна једначина гласи

$$Y_{C-1}^f - 4Y_C + 6Y_{C+1} - 4Y_{C+2} + Y_{C+3} = \frac{\lambda}{B_3} Y_{C+1}$$

где је  $B_3 = \frac{EI_2}{m_2}$ .

Позивајући израз (6.40)

$$Y_{C-1}^f = 2 \frac{c}{1+c} Y_{C-1} + 2 \frac{1-c}{1+c} Y_C - \frac{1-c}{1+c} Y_{C+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_3 \left[ \frac{2c}{1+c} Y_{C-1} - \frac{6c+2}{1+c} Y_C + \frac{7c+5}{1+c} Y_{C+1} - 4Y_{C+2} + Y_{C+3} \right] = \lambda Y_{C+1} \quad (6.85)$$

За интервал чворова  $n = C+2 \div D-2$  имамо исти облик дискретизоване једначине без фиктивних померања

$$B_3 (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = \lambda Y_n \quad (6.86)$$

За чвор  $n = D-1$  полазна једначина гласи

$$Y_{D-3} - 4Y_{D-2} + 6Y_{D-1} - 4Y_D + Y_{D+1}^f = \frac{\lambda}{B_3} Y_{D-1}$$

Позивајући израз (6.52)

$$Y_{D+1}^f = \frac{1-e}{1+e} Y_{D-1} - 2 \frac{1-e}{1+e} Y_D + \frac{2}{1+e} Y_{D+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_3 [Y_{D-3} - 4Y_{D-2} + \frac{5e+7}{1+e} Y_{D-1} - \frac{6+2e}{1+e} Y_D + \frac{2}{1+e} Y_{D+1}] = \lambda Y_{D-1} \quad (6.87)$$

Аналогно претходним граничним чворовима, за гранични чвор  $n = D$  полазна једначина гласи

$$Y_{D-2} - 4Y_{D-1} + 6Y_D - 4Y_{D+1}^f + Y_{D+2}^f = \frac{\lambda}{B_3} Y_D$$

Заменом израза за фиктивна померања (6.52) и (6.55)

$$Y_{D+1}^f = \frac{1-e}{1+e} Y_{D-1} - 2 \frac{1-e}{1+e} Y_D + \frac{2}{1+e} Y_{D+1}$$

$$Y_{D+2}^f = \frac{1-f}{1+f} Y_{D-2} + \frac{8f-4-4e}{(1+f)(1+e)} Y_{D-1} - \frac{14ef-2e^2f-4e^2-2-6e}{e(1+f)(1+e)} Y_D +$$

$$+ \frac{8ef-4e-4}{e(1+f)(1+e)} Y_{D+1} + \frac{2}{e(1+f)} Y_{D+2}$$

након сређивања добија се коначан облик

$$B_3 \left[ \frac{2}{1+f} Y_{D-2} - 4 \frac{3+e}{(1+f)(1+e)} Y_{D-1} + \frac{2e^2+20e+2}{e(1+f)(1+e)} Y_D - \right.$$

$$\left. - \frac{12e+4}{e(1+f)(1+e)} Y_{D+1} + \frac{2}{e(1+f)} Y_{D+2} \right] = \lambda Y_D \quad (6.88)$$

За први чвор у четвртој секцији телесопске структуре  $n = D+1$  полазна једначина гласи

$$Y_{D-1}^f - 4Y_D + 6Y_{D+1} - 4Y_{D+2} + Y_{D+3} = \frac{\lambda}{B_4} Y_{D+1}$$

где је  $B_4 = \frac{E(I_2 + I_3)}{m_2 + m_3}$ .

Позивајући израз (6.53)

$$Y_{D-1}^f = 2 \frac{e}{1+e} Y_{D-1} + 2 \frac{1-e}{1+e} Y_D - \frac{1-e}{1+e} Y_{D+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_4 \left[ \frac{2e}{1+e} Y_{D-1} - \frac{6e+2}{1+e} Y_D + \frac{7e+5}{1+e} Y_{D+1} - 4Y_{D+2} + Y_{D+3} \right] = \lambda Y_{D+1} \quad (6.89)$$

За интервал чворова  $n = D+2 \div F-2$  имамо исти облик дискретизоване једначине без фиктивних померања

$$B_4 (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = \lambda Y_n \quad (6.90)$$



За чвор  $n = F - 1$  полазна једначина гласи

$$Y_{F-3} - 4Y_{F-2} + 6Y_{F-1} - 4Y_F + Y_{F+1}^f = \frac{\lambda}{B_4} Y_{F-1}$$

Позивајући израз (6.65)

$$Y_{F+1}^f = \frac{1-g}{1+g} Y_{F-1} - 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F + \frac{2}{1+g} Y_{F+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_4 [Y_{F-3} - 4Y_{F-2} + \frac{5g+7}{1+g} Y_{F-1} - \frac{6+2g}{1+g} Y_F + \frac{2}{1+g} Y_{F+1}] = \lambda Y_{F-1} \quad (6.91)$$

Аналогно претходним граничним чворовима, за гранични чвор  $n = F$  полазна једначина гласи

$$Y_{F-2} - 4Y_{F-1} + 6Y_F - 4Y_{F+1}^f + Y_{F+2}^f = \frac{\lambda}{B_4} Y_F$$

Заменом израза за фиктивна померања (6.65) и (6.68)

$$Y_{F+1}^f = \frac{1-g}{1+g} Y_{F-1} - 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F + \frac{2}{1+g} Y_{F+1}$$

$$Y_{F+2}^f = \frac{1-h}{1+h} Y_{F-2} + \frac{8h-4-4g}{(1+h)(1+g)} Y_{F-1} - \frac{14gh-2g^2h-4g^2-2-6g}{g(1+h)(1+g)} Y_F +$$

$$+ \frac{8gh-4g-4}{g(1+h)(1+g)} Y_{F+1} + \frac{2}{g(1+h)} Y_{F+2}$$

након сређивања добија се коначан облик

$$B_4 \left[ \frac{2}{1+h} Y_{F-2} - 4 \frac{3+g}{(1+h)(1+g)} Y_{F-1} + \frac{2g^2+20g+2}{g(1+h)(1+g)} Y_F - \right.$$

$$\left. - \frac{12g+4}{g(1+h)(1+g)} Y_{F+1} + \frac{2}{g(1+h)} Y_{F+2} \right] = \lambda Y_F \quad (6.92)$$

За први чвор у петој секцији телесопске структуре  $n = F + 1$  полазна једначина гласи

$$Y_{F-1}^f - 4Y_F + 6Y_{F+1} - 4Y_{F+2} + Y_{F+3} = \frac{\lambda}{B_5} Y_{F+1}$$

где је  $B_5 = \frac{EI_3}{m_3}$ .

Позивајући израз (6.66)

$$Y_{F-1}^f = 2 \frac{g}{1+g} Y_{F-1} + 2 \frac{1-g}{1+g} Y_F - \frac{1-g}{1+g} Y_{F+1}$$

након сређивања, добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_5 \left[ \frac{2g}{1+g} Y_{F-1} - \frac{6g+2}{1+g} Y_F + \frac{7g+5}{1+g} Y_{F+1} - 4Y_{F+2} + Y_{F+3} \right] = \lambda Y_{F+1} \quad (6.93)$$

За интервал чворова  $n = F + 2 \div G - 2$  имамо исти облик дискретизоване једначине без фиктивних померања

$$B_5 (Y_{n-2} - 4Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}) = \lambda Y_n \quad (6.94)$$

За чвор  $n = G - 1$  полазна дискретизована једначина гласи

$$Y_{G-3} - 4Y_{G-2} + 6Y_{G-1} - 4Y_G + Y_{G+1}^f = \frac{\lambda}{B_5} Y_{G-1} \quad (6.95)$$

Заменом израза (6.70)

$$Y_{G+1}^f = 2Y_G - Y_{G-1}$$

након сређивања добија се коначан израз за овај чвор у облику

$$B_5 [Y_{G-3} - 4Y_{G-2} + 5Y_{G-1} - 2Y_G] = \lambda Y_{G-1} \quad (6.96)$$

На крају, за последњи чвор структуре  $n = G$ , полазна дискретизована једначина гласи

$$Y_{G-2} - 4Y_{G-1} + 6Y_G - 4Y_{G+1}^f + Y_{G+2}^f = \frac{\lambda}{B_5} Y_G \quad (6.97)$$

Заменом једначина за фиктивна померања (6.70) и (6.75)

$$Y_{G+1}^f = 2Y_G - Y_{G-1}$$

$$Y_{G+2}^f = Y_{G-2} - 4Y_{G-1} + (4 - \frac{2M\lambda}{sEI_3})Y_G$$

после сређивања, добија се коначан израз у облику

$$\frac{sEI_3}{sm_3 + 2M} [2Y_{G-2} - 4Y_{G-1} + 2Y_G] = \lambda Y_G \quad (6.98)$$

Једначине (6.76÷6.98) дефинишу систем од  $N = \frac{L}{s} = \frac{s_1 + s_2 + l_3}{s}$  линеарних алгебарских

једначина, чија је форма прилагођена за састављање програмског алгоритма и писање програма за израчунавање природних фреквенција структуре зависно од геометријских карактеристика попречних пресека сегмената телескопа, конфигурационих координата и масе терета. Формирани систем једначина по непознатим померањима чворова, која формирају сопствене облике осциловања, може се написати у матричном облику

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y}$$

односно

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{Y} = 0$$

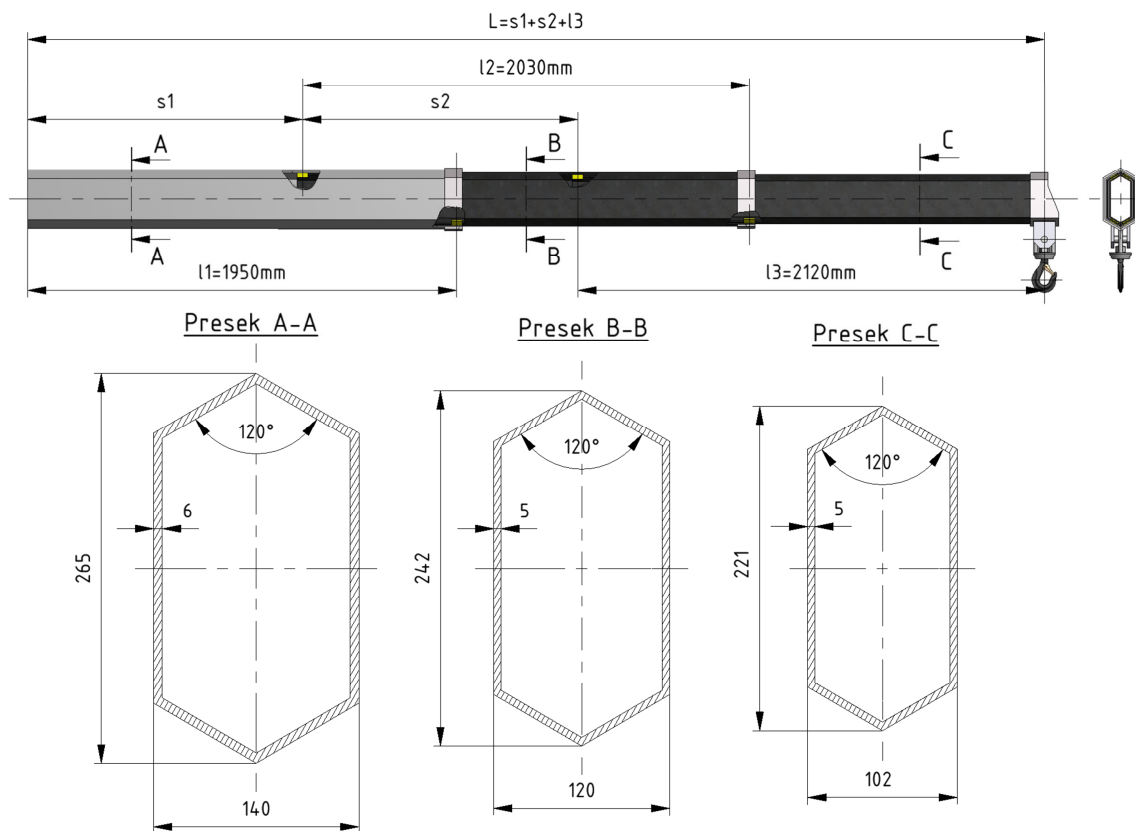
где је  $\mathbf{A}$  квазидијагонална матрица система,  $\mathbf{I}_n$  је јединична матрица реда  $N$ ,  $\lambda$  је карактеристична вредност а  $\mathbf{Y}$  је матрица-колона померања која одговара датој сопственој учестаности. Карактеристична једначина гласи

$$\Delta(\lambda) = \det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n] = 0$$

одакле добијамо природне кружне учестаности  $\omega_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{s^2} = \frac{N^2 \sqrt{\lambda_n}}{L^2}$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

## 6.5 Нумерички пример и упоредни коначно-елементни модел структуре телескопског дела стреле

За потребе израчунавања нумеричких вредности природних учестаности на бази изложеног динамичког модела структуре телескопа при савојним осцилацијама коришћен је конкретан пример чије су дужине и попречни пресеци сегмената приказани на слици 6.4.



Слика 6.4 Нумерички пример структуре телескопа

Геометријске карактеристике попречних пресека сегмената дати су табелом 6.1.

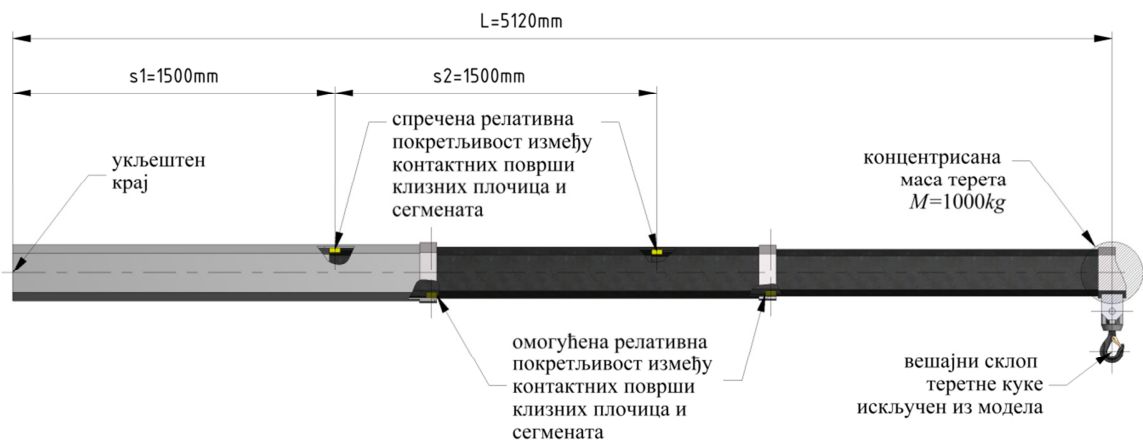
Табела 6.1 Геометријске карактеристике попречних пресека сегмената

Карактеристика	сегмент 1	сегмент 2	сегмент 3
A [m <sup>2</sup> ]	0,004025	0,003025	0,0027135
I [m <sup>4</sup> ]	284,973 · 10 <sup>-7</sup>	178,807 · 10 <sup>-7</sup>	132,838 · 10 <sup>-7</sup>

Конфигурационе координате  $s_1$  и  $s_2$  су континуално вариране у интервалима од  $500 \div 1500 \text{mm}$ , док је маса терета  $M$  узимала дискретне вредности 250, 500, 750 и  $1000 \text{kg}$ .

Тродимензионални модел структуре телескопа је послужио за креирање коначно-елементног модела за фреквентну анализу у програмском пакету *Ansys*.

Гранични и контактни услови који су примењени приликом генерисања коначно-елементног модела у једном од случајева испитивања су приказани на слици 6.5.



Слика 6.5 Гранични и контактни услови коначно-елементног модела на примеру конкретног случаја испитивања за  $s_1=1500 \text{mm}$ ,  $s_2=1500 \text{mm}$  и  $M=1000 \text{kg}$

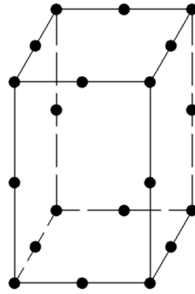
Као што је усвојено у математичком моделу, за ослонац структуре је примењено укљештење које је, посматрано у контексту тродимензионалног коначно-елементног модела, еквивалентно одузимању свих степени слободне померања чворовима на чеаној површини левог краја. Овај вид ослањања је усвојен као најједноставнији, с обзиром да нема утицаја на интеракцију сегмената при формирању еластичних линија.

Контакти између сегмената су успостављени индиректно преко клизних плочица. У циљу структурног увезивања у подужном правцу, задњи контактни покретних сегмената су конфигурисани тако што је спречена релативна покретљивост између контактних површи клизних плочица и унутрашњег и спољашњег сегмента. Ово ограничење спречава кретање унутрашњих сегмената као крутих тела у подужном правцу.

Код предњих ослонаца покретних сегмената, који се остварују преко клизних плочица које су чврсто везане за унутрашње зидове спољашњих сегмената, контакти су конфигурисани тако да је дозвољена релативна покретљивост између контактних површи клизача и покретних сегмената. На тај начин је остварена аксијална релаксираност покретних сегмената при савојним осцилацијама, што има за последицу слободно формирање деформисаног облика покретних сегмената.

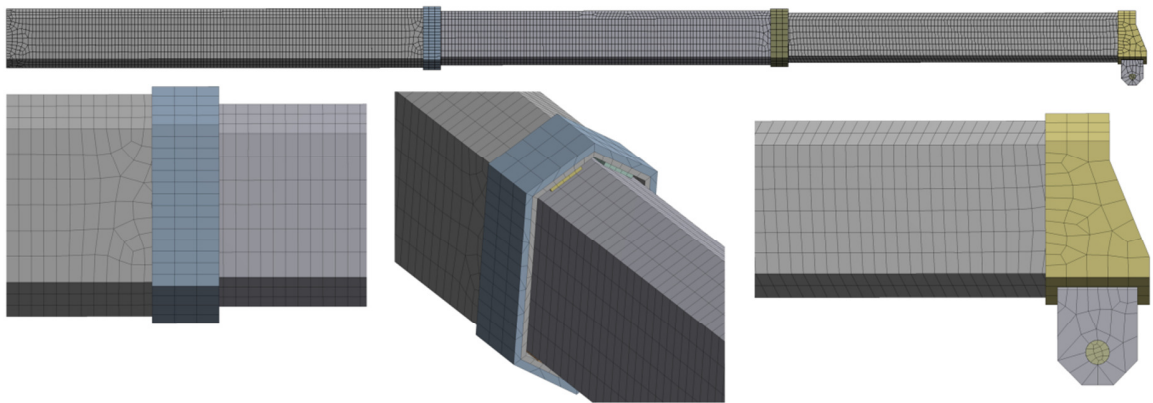
Вешајни склоп теретне куке је искључен из коначно-елементног модела, јер нема утицаја на интеракцију сегмената при осцилацијама.

С обзиром на морфолошке карактеристике конститутивних компоненти, тродимензиони модел структуре је дискретизован мрежом хексагоналних запреминских коначних елемената са по 20 чворова на теменима и срединама ивица, са максималном дужином ивице од 30mm, слика 6.6.



Слика 6.6 Хексагонални призматични коначни елемент са чворовима у теменима и срединама ивица

Оваква подешавања су резултирала у финој мрежи од укупно 19423 коначна елемента и 87833 чвора, чији се детаљи могу видети на слици 6.7.



Слика 6.7 Мрежа коначних елемената и однос њихових димензија према структурним детаљима

Анализа резултата и компарација са резултатима из коначно-елементног модела, из практичних разлога, ће бити спроведени на нивоу природних учестаности:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}, \quad n = 1, \dots, N.$$

## 6.6 Резултати математичког модела и компарација са резултатима из коначно-елементног модела телескопске структуре

Систем дискретизованих једначина по померањима реалних чворова структуре телескопа (6.76÷6.98) представља платформу на којој је формиран програмски код у софтверу за инжењерске прорачуне *MatLab* за израчунавање сопствених учестаности. С обзиром на то да су природни облици осциловања који одговарају вишим сопственим фреквенцијама мало вероватни и од мале важности, анализирани су, као и раније, вредности прве три сопствене фреквенције. Случајеви за тестирање су формирано варирањем конфигурационих координата  $s_1$  и  $s_2$  и масе терета  $M$ . Најпре, конфигурациона координата трећег сегмента је фиксирана на вредност  $s_2=1500mm$ , док је конфигурациона координата другог сегмента  $s_1$  узимала дискретне вредности у интервалу  $500\div 1500mm$  са кораком  $250mm$ . За сваку комбинацију конфигурационих координата, испитивано је по четири подслучаја са различитим вредностима масе терета  $M$  од 250, 500, 750 и  $1000kg$ . Резултати ове групе испитивања и релативно одступање од резултата из коначно-елементног модела приказани су табелом 6.2.

Табела 6.2 Резултати испитивања за фиксиран трећи сегмент

$s_2$ [mm]	$s_1$ [mm]	M [kg]	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
			Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Рел. грешка	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Рел. грешка	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Рел. грешка
1500	500	250	5.274	4.933	6.93%	53.121	46.148	15.11%	181.494	160.240	13.26%
		500	3.807	3.584	6.22%	52.519	45.683	14.96%	180.951	159.740	13.28%
		750	3.130	2.954	5.96%	52.313	45.521	14.92%	180.767	159.570	13.28%
		1000	2.721	2.571	5.83%	52.209	45.438	14.90%	180.675	159.480	13.29%
	750	250	4.633	4.367	6.08%	47.618	42.161	12.94%	158.496	138.800	14.19%
		500	3.348	3.178	5.35%	47.050	41.695	12.84%	157.968	138.350	14.18%
		750	2.754	2.621	5.09%	46.855	41.532	12.82%	157.789	138.190	14.18%
		1000	2.394	2.281	4.96%	46.756	41.449	12.80%	157.699	138.110	14.18%
	1000	250	4.122	3.915	5.28%	43.319	38.957	11.20%	140.559	122.860	14.41%
		500	2.983	2.853	4.54%	42.776	38.491	11.13%	140.051	122.440	14.38%
		750	2.455	2.354	4.27%	42.590	38.327	11.12%	139.878	122.300	14.37%
		1000	2.134	2.049	4.14%	42.495	38.244	11.12%	139.791	122.220	14.38%
	1250	250	3.704	3.540	4.63%	39.807	36.203	9.95%	126.330	110.660	14.16%
		500	2.683	2.583	3.88%	39.284	35.738	9.92%	125.843	110.260	14.13%
		750	2.209	2.132	3.61%	39.104	35.575	9.92%	125.678	110.120	14.13%
		1000	1.921	1.857	3.47%	39.012	35.491	9.92%	125.595	110.060	14.11%
	1500	250	3.355	3.219	4.22%	36.859	33.792	9.08%	115.081	101.420	13.47%
		500	2.434	2.352	3.46%	36.352	33.330	9.07%	114.615	100.640	13.89%
		750	2.005	1.943	3.19%	36.177	33.167	9.07%	114.456	100.510	13.88%
		1000	1.744	1.692	3.05%	36.088	33.084	9.08%	114.376	100.440	13.88%

Други сет случајева испитивања подразумева фиксирање конфигурационе координата другог сегмента на вредност  $s_1=1500mm$ , док је конфигурациона координата трећег сегмента  $s_2$  узимала дискретне вредности у интервалу  $500\div 1250mm$  са кораком  $250mm$ , с обзиром да је случај са максимално извученим сегментима испитан претходно. Као и у претходном сету, за сваку комбинацију конфигурационих координата, испитивано је по четири подслучаја са различитим вредностима масе терета  $M$  од 250, 500, 750 и  $1000kg$ . Резултати ове групе испитивања и релативно одступање од резултата из коначно-елементног модела приказани су табелом 6.3.

Табела 6.3 Резултати испитивања за фиксиран други сегмент

$s_1$ [mm]	$s_2$ [mm]	M [kg]	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
			Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Рел. грешка	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Рел. грешка	Модел [Hz]	МКЕ [Hz]	Рел. грешка
1500	500	250	4.904	4.709	4.14%	56.598	50.441	12.21%	184.803	151.440	22.03%
		500	3.574	3.460	3.31%	55.545	49.503	12.20%	183.832	150.490	22.16%
		750	2.949	2.863	3.00%	55.179	49.171	12.22%	183.502	150.170	22.20%
		1000	2.567	2.496	2.84%	54.994	49.000	12.23%	183.337	150.000	22.22%
	750	250	4.429	4.246	4.31%	49.754	44.548	11.69%	160.626	132.230	21.47%
		500	3.223	3.113	3.51%	48.892	43.772	11.70%	159.855	131.560	21.51%
		750	2.657	2.574	3.22%	48.594	43.497	11.72%	159.594	131.330	21.52%
		1000	2.313	2.244	3.08%	48.443	43.357	11.73%	159.463	131.220	21.52%
	1000	250	4.021	3.856	4.28%	44.411	40.120	10.69%	141.985	119.630	18.69%
		500	2.921	2.823	3.49%	43.698	39.473	10.70%	141.363	119.120	18.67%
		750	2.408	2.333	3.21%	43.451	39.246	10.72%	141.152	118.940	18.67%
		1000	2.095	2.033	3.06%	43.326	39.129	10.73%	141.045	118.850	18.68%
	1250	250	3.666	3.516	4.25%	40.197	36.601	9.82%	127.196	109.540	16.12%
		500	2.661	2.571	3.48%	39.600	36.058	9.82%	126.670	109.110	16.09%
		750	2.192	2.123	3.24%	39.394	35.871	9.82%	126.491	108.910	16.14%
		1000	1.907	1.850	3.10%	39.289	35.773	9.83%	126.401	108.840	16.13%

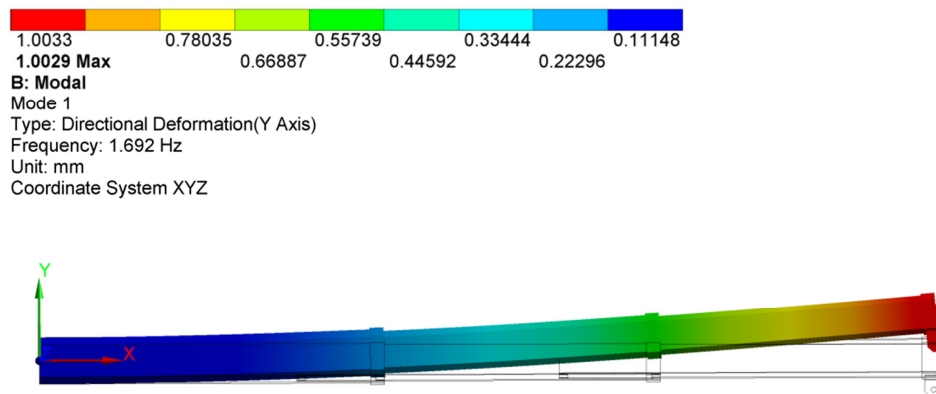
Из наведених табела, може се видети да релативна грешка за прву природну учестаност варира у границама до 2,84% до 6,93%, за другу од 9,07% до 15,11% а за трећу од 13,26% до 22,22%.

Као што је и очекивано, модел који је изграђен на бази *Euler-Bernoulli*-јеве теорије, који искључује утицаје смицања и ротације елементарних делића структуре, даје крући модел са нешто већим вредностима природних учестаности.

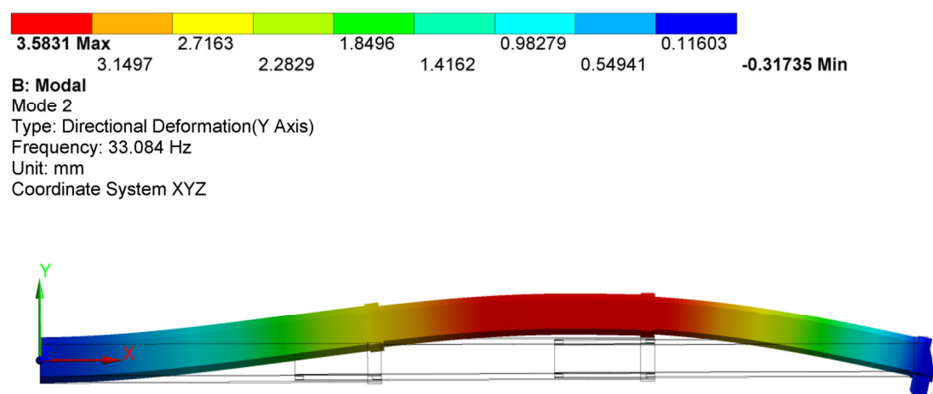
Следећи закључак се тиче тенденције смањивања одступања резултата при повећању масе терета, у оквиру исте конфигурације структуре телескопа. Ово се може објаснити тиме што се утицај локалних деформација на формирање еластичне линије смањује у односу на глобална померања структуре као целине, која су већа са повећањем масе на крају.

Међутим, повећана крутост изграђеног математичког модела, поред наведеног, је већим делом последица упрошћавања модела реалног објекта претпоставком да се делови еластичних линија сегмената у зони у којој су увучени један у другога поклапају. Томе у прилог иде и генерална тенденција смањивања грешке математичког модела на бази коначних разлика са извлачењем сегмената, односно, при већим вредностима конфигурационих координата. Ово је израженије код првог сета тестова, при извлачењу другог сегмента а за максимално извучен трећи сегмент, таблица 6.2.

На сликама 6.8, 6.9 и 6.10 приказани су сопствени облици осциловања телескопа са одговарајућим природним фреквенцијама, који су добијени из коначно-елементног модела, за случај  $s_1=1500mm$ ,  $s_2=1500mm$  и  $M=1000kg$  (осенчена поља у табели 6.2).

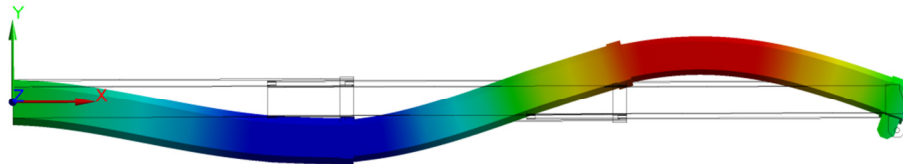
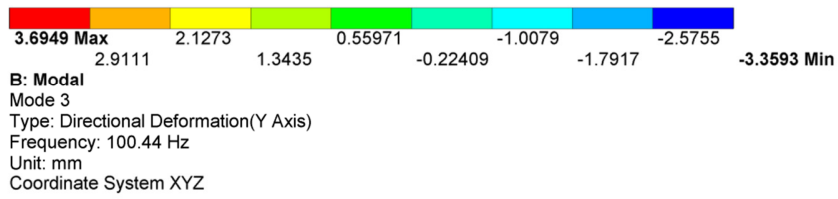


Слика 6.8 Прва сопствена учестаност и облик осциловања за случај  $s_1=1500mm$ ,  $s_2=1500mm$  и  $M=1000kg$



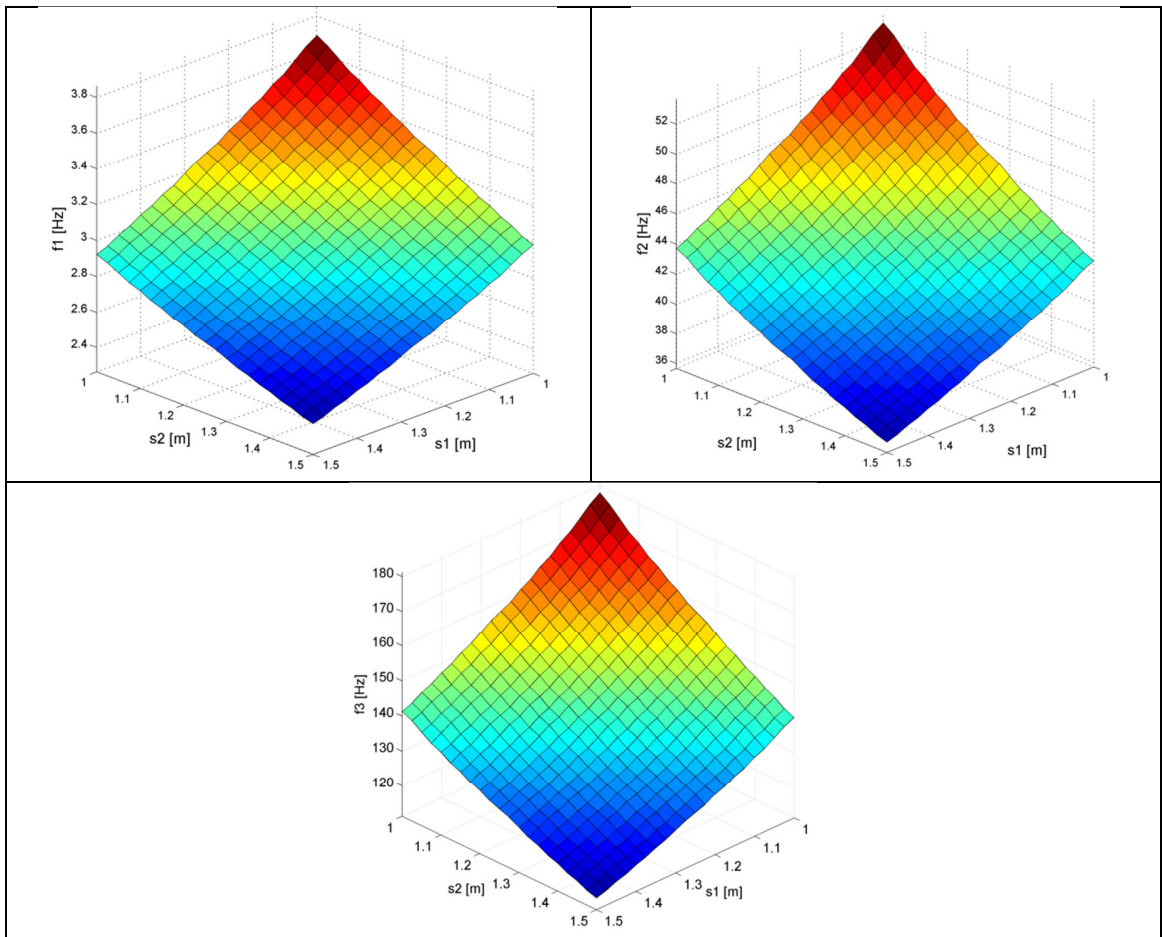
Слика 6.9 Друга сопствена учестаност и облик осциловања за случај  $s_1=1500mm$ ,  $s_2=1500mm$  и  $M=1000kg$





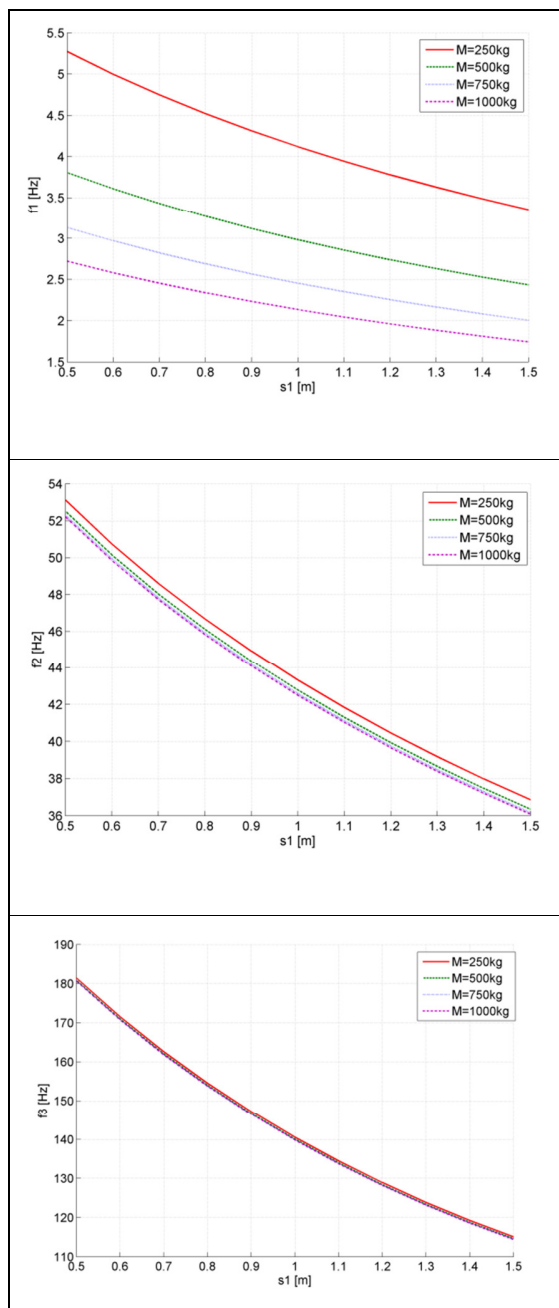
Слика 6.10 Трећа сопствена учестаност и облик осциловања за случај  $s_1=1500\text{mm}$ ,  $s_2=1500\text{mm}$  и  $M=1000\text{kg}$

На слици 6.11 је графички приказ зависности сопствених фреквенција од конфигурационих координата, при маси терета  $M=500\text{kg}$ .

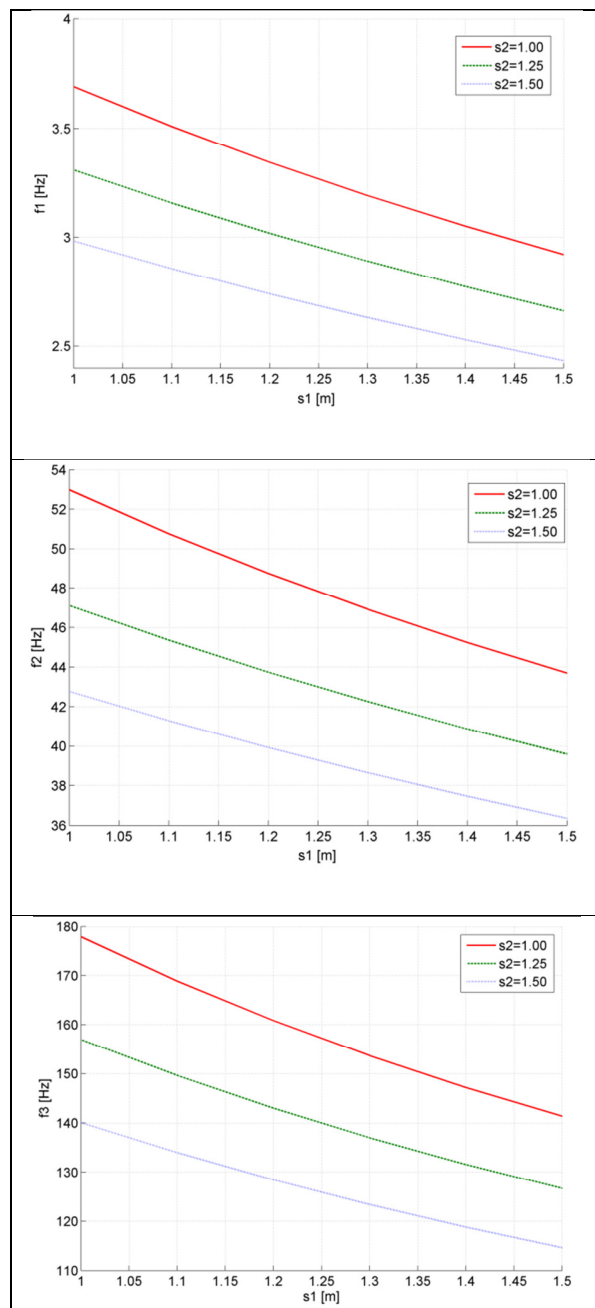


Слика 6.11 3-Д дијаграм промене сопствених фреквенција са променом  $s_1$  и  $s_2$  при  $M=500\text{kg}$

Слике 6.12 и 6.13 на прегледнији начин пружају увид о одвојеном утицају појединих параметара на сопствене фреквенције телескопа код првог сета испитивања, чији су резултати дати табелом 6.2.

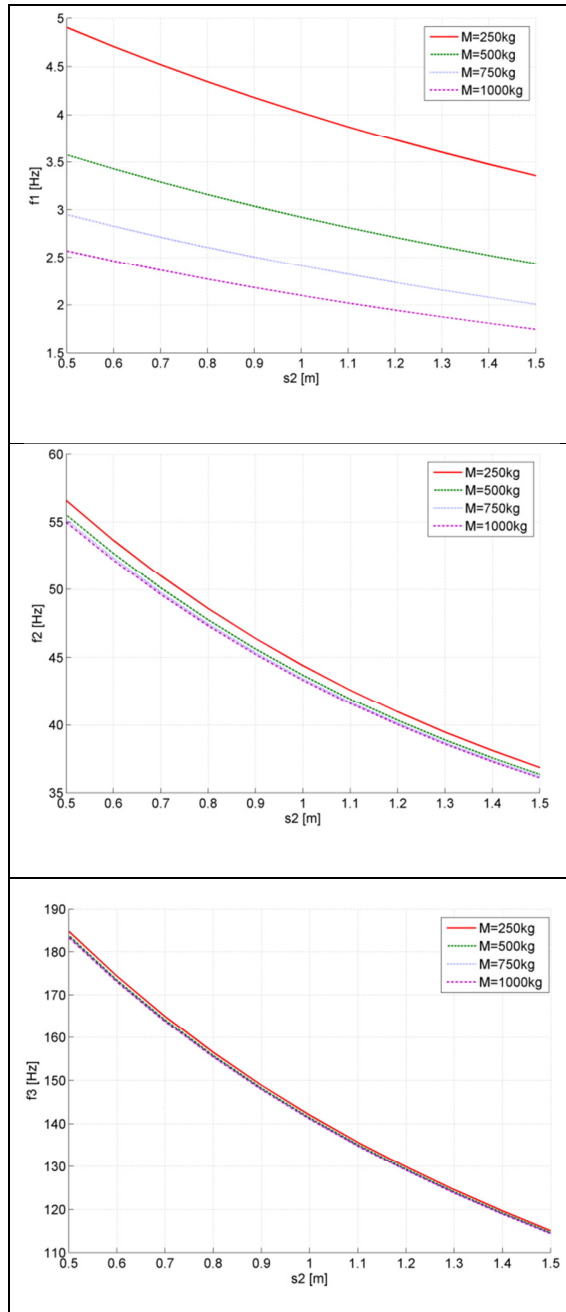


Слика 6.12 Графички приказ резултата из табеле 6.2 при  $s_2=1500\text{mm}$  а за дискретне вредности  $M$

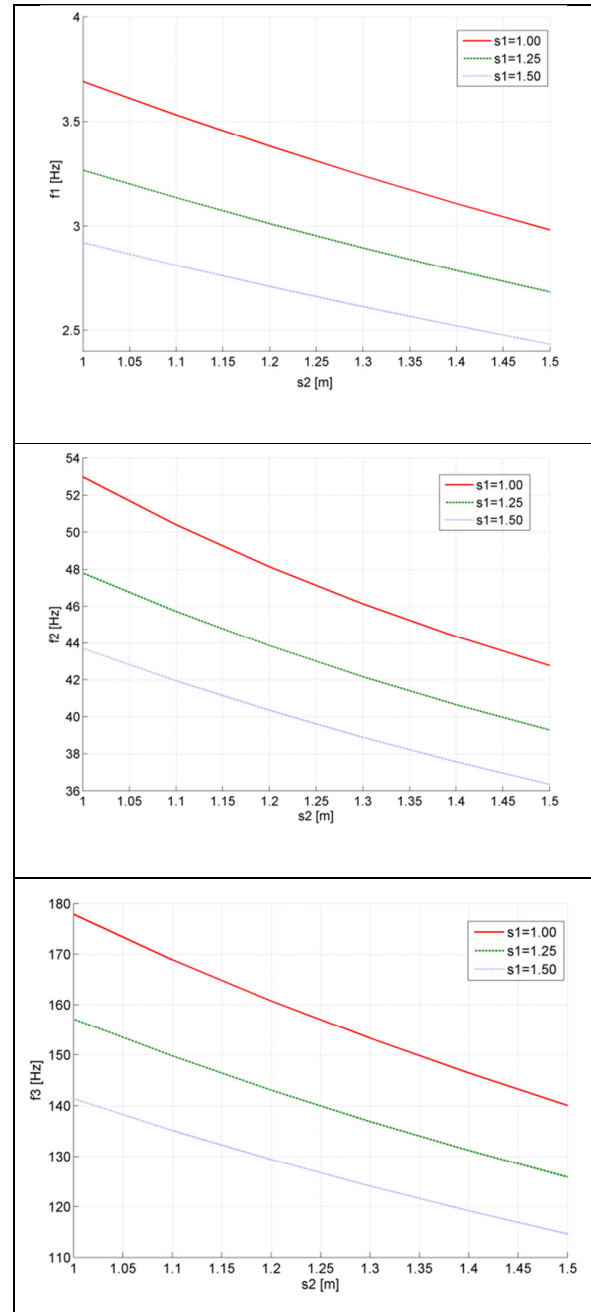


Слика 6.13 Графички приказ резултата из табеле 6.2 при  $M=500\text{kg}$  а за дискретне вредности  $s_2$  (у метрима)

Слике 6.14 и 6.15 на прегледнији начин пружају увид о одвојеном утицају појединих параметара на сопствене фреквенције телескопа код првог сета испитивања, чији су резултати дати табелом 6.3.



Слика 6.14 Графички приказ резултата из табеле 6.3 при  $s_1=1500\text{mm}$  а за дискретне вредности  $M$



Слика 6.15 Графички приказ резултата из табеле 6.3 при  $M=500\text{kg}$  а за дискретне вредности  $s_1$  (у метрима)

Са дијаграма са слике 6.12 се види да осетан утицај масе терета постоји само код прве сопствене учестаности. Код друге учестаности имамо да су криве зависности од масе веома блиске, док се код треће скоро подударају. То значи да са порастом реда сопствене учестаности утицај промене масе терета на врху нагло слаби, јер структура постаје сувише брза за инерцијално својство терета, које тада делује као нека врста ослонца на слободном крају. Овај ефекат се може и визуелно приметити на сликама коначно-елементног модела у другом и трећем сопственом облику осциловања 6.9 и 6.10, респективно, где се види да су померања десног краја приближно једнака нули.

Са дијаграма са слике 6.13, при константној маси терета, види се јасно диференцирана промена свих природних фреквенција са променом конфигурационе координате  $s_2$ , јер долази до осетног пада крутости структуре у целини услед повећања дохвата телескопа  $L = s_1 + s_2 + l_3$ .

Аналогно претходном, са дијаграма на сликама 6.14 и 6.15 могу се извести слични закључци, тако да их није неопходно посебно наводити.

## 7. Закључак и правци даљих истраживања

Пројектовање стрела аутодизалица, зглобног или телескопског типа, представља мултидисциплинаран и веома комплексан процес, током којег инжењери поступно креирају конструкционо решење које мора да задовољи бројне захтеве и ограничења. С обзиром да су многа ограничења међусобно супротстављена и да је, услед структурне сложености, број параметара са којим се оперише веома велики, сам процес пројектовања треба посматрати као својеврсан оптимизациони ток.

Пример супротстављених захтева који се намећу пред пројектанта је императив побољшања оперативних карактеристика кроз повећање носивости, висине подизања и дохвата са једне, и услов еластичне стабилности носеће структуре као целине и стабилности против претурања, са друге стране. Испуњење једног критеријума често доводи до прекорачења граничних вредности другог. Тако, на пример, тенденција за добијањем лаке конструкције, која је пожељна са аспекта цене производње, потребног простора за заузимање транспортног положаја након утовара или истовара, енергетске ефикасности и маневарских могућности, доводи до нежељених ефеката у виду појаве дуготрајног осциловања стреле након завршетог маневра са окаченим теретом, што смањује радни век машине услед замора материјала структуре. Поред тога, динамичка нестабилност умањује укупни учинак дизалице, с обзиром да се транспортни циклус пролонгира због губитка времена при смиривању осцилаторног кретања. Додатни проблем настаје и код управљања услед губитка тачности позиционирања.

Због свега наведеног, истраживање динамичког понашања стрела аутодизалица важи као сложен и комплексан изазов многим научницима и инжењерима, што је потврђено многобројним радовима. При томе, већи део досадашњих истраживања се односио на примене различитих приступа у моделирању динамике теоријских примера флексибилних манипулатора, као једне опште класе геометријски изменљивих структура, док је мањи број радова обухватао конструктивне специфичности реалних решења, нарочито ако је у питању зглобни тип стреле аутодизалице.

Структура зглобне стреле је комплекснија у односу на телескопску, јер поред телескопског дела, који је одговоран за постизање већих дохвата и висина подизања, садржи и зглобни, којим се постижу високе маневарске способности. Идентификација утицајних параметара зглобно везаних сегмената, са својим конструктивним специфичностима, представља сложенији део посла при моделирању динамичког понашање стреле као целине из више разлога. На првом месту, зглобно везани сегменти имају изразито променљив попречни пресек, као последица оптималног димензионисања према доминантном и изразито променљивом нападном

моменту савијања, који своје максималне вредности постиже на упоришним местима хидроцилиндара. Поред тога, у циљу постизања већег релативног угла отварања сегмената и смањења погонске силе у хидроцилиндру, упоришне тачке хидроцилиндра су ексцентрично померене у односу на тежишне линије сегмената. Као последица овог структурног детаља и високих вредности силе у хидроцилиндру, јавља се значајан скок момента савијања око упоришне тачке, који додатно утиче на савојну деформацију сегмената. На крају, хидроцилиндар са вешајним подсклоповима, који га везују за сегменте, својим инерцијалним и еластичним својствима утиче на укупну динамику структуре као целине.

Динамичке карактеристике зглобне стреле се мењају при промени положаја у радном пољу, односно, са променом геометријске конфигурације носеће структуре која се постиже променом углова између зглобно везаних сегмената и извлачењем или увлачењем телескопских сегмената. Осим тога, утицај сопствене масе стреле на динамику је значајан према маси терета, што је посебно изражено нарочито при већим дохватима.

У овом истраживању, предложен је комбиновани приступ моделирању динамике зглобних стрела, који је презентован кроз анализу слободних савојних осцилација једне реалне конструкције дво-полужног манипулатора. У циљу боље прегледности, динамичке анализе зглобног и телескопског дела стреле су спроведене засебно.

Модел се базира на *Euler-Bernoulli*-јевој теорији греда које врше савојне осцилације, при чему се зглобно везани стуб и полуга посматрају као носачи са дистрибуираним параметрима масе и крутости. При томе, усвојена је претпоставка о апсолутној крутости сегмената у аксијалном правцу, с обзиром на велике површине попречних пресека. Модел обухвата деформабилност шасије вучног возила кроз еластични ослонац, који дозвољава почетни нагиб динамичке еластичне линије стуба.

Ексцентричност упоришних тачака хидроцилиндра у односу на тежишне линије сегмената, моделирана је помоћу три лака и аксијално апсолутно крута штапа на сваком крају. На тај начин, дејство концентрисаних момената савијања који се јављају на местима везе хидроцилиндра са сегментима, замењен је одговарајућим спреговима трансверзалних сила, које преносе спољашњи штапови. Централни штапови преносе на сегменте трансверзалне силе као директне пројекције силе хидроцилиндра.

Утицај масе хидроцилиндра и вешајних подсклопова је узет у обзир преко две концентрисане масе, фиксиране у тачкама на тежишним линијама које су најближе ексцентричним упоришним тачкама цилиндра и клипњаче. Такође, моделом је обухваћена и аксијална еластичност хидроцилиндра посредством линеарне опруге између вешајних тачака. Маса терета је концентрисана у крајњој тачки полуге.

Ослонци лаких штапова на местима везе са хидроцилиндром и зглоб деле целу зглобну структуру на секције, у оквиру којих су функције еластичних линија диференцијабилне и непрекидне. Познатим приступом о претпостављеном облику

решења, дошло се до диференцијалног облика еластичне динамичке линије свих секција. Написани су гранични услови по померањима, нагибима, трансверзалним силама и моментима у крајњим тачкама секција. При томе, треба нагласити да померање полуге представља суперпозицију кретања као крутог тела и еластичних савојних деформација.

Диференцијалне једначине динамичких еластичних линија секција и гранични услови су дискретизовани методом централних коначних разлика. Цела структура је тако дискретизована помоћу еквидистантних тачака, чија померања представљају генералисане координате. При томе, у дискретизованим једначинама код граничних чворова се јављају фиктивна померања, јер излазе из одговарајућег домена функције еластичне линије секције. Решавањем локалних система линеарних једначина, фиктивна померања су изражена преко померања реалних тачака сегмената.

Након тога, за сваки чвор је написан дискретизован облик динамичке еластичне линије, уз елиминисање фиктивних померања. На тај начин је гранични проблем из диференцијалног домена пребачен на алгебарски у виду система линеарних хомогених једначина по непознатим померањима реалних чворова структуре. За решавање коренова карактеристичне једначине система је написан алгоритам у програмском пакету MatLab. У циљу валидације, изграђен је коначно-елементни модел зглобног манипулатора у програмском пакету Ansys.

Урађена је анализа резултата за прве три природне учестаности зглобног манипулатора, при чему су варирана четири параметра:

- крутост еластичног ослоња зглобног манипулатора
- крутост хидроцилиндра
- угао полуге
- маса терета

Предложени модел је показао веома високу подударност резултата у поређењу са коначно-елементним моделом. При варирању конфигурационе координате угла полуге у интервалу од  $-10^\circ$  до  $+80^\circ$ , релативно одступање прве две природне учестаности, за већи део радног опсега је испод 1%, са максималном апсолутном вредношћу од 1,27% за прву и 1,85% за другу учестаност. Код треће природне учестаности, релативно одступање на већем делу радног опсега се креће у границама од 3.81% (за  $\alpha_2 = -10^\circ$ ) до 8.68% (за  $\alpha_2 = 60^\circ$ ). У преосталом делу радног опсега, тј., при даљем повећавању нагиба полуге, долази до већих одступања (максимално 19.59% при  $\alpha_2 = 80^\circ$ ). Ово одступање је цена линеарности модела. Наиме, при великим угловима нагиба полуге, долази до рапидног смањења углова  $\delta_1$  и  $\delta_2$  између осе хидроцилиндра и подужних оса стуба и полуге, респективно, што доводи у питање полазну претпоставку да је угао нагиба динамичке еластичне линије код обе вешајне тачке хидроцилиндра занемарљив према углу  $\delta_1$ , односно,  $\delta_2$ . Но, с обзиром да су ова одступања присутна само код треће сопствене учестаности и то на врло уском делу радног опсега, ово се може у потпуности занемарити.

При варирању крутости ослонца стуба, модел такође показује врло високу подударност са коначно-елементним моделом. При врло широком интервалу крутости  $10^6 \div 10^{20} \text{ Nm/rad}$ , релативно одступање за прву учестаност не прелази 1,27%, за другу 1,82%, док је код треће испод 6%.

Слична одступања се добијају и при варијацији аксијалне крутости хидроцилиндра и маси терета.

Исти приступ је примењен при изради динамичког модела телескопског дела. Релативна одступања вредности сопствених учестаности у односу на вредности из симулационог модела су значајно већа у односу на зглобни део стреле. Тако, за први учестаност релативна грешка се, у већини случајева испитивања, креће у интервалу  $3\% \div 5\%$ , код друге  $9\% \div 12\%$ , код треће  $13\% \div 22\%$ . Може се закључити да су ова одступања последица полазне претпоставке да су динамичке еластичне линије увучених делова сегмената идентичне са динамичким еластичним линијама одговарајућих делова спољашњих сегмената. На бази ове претпоставке, вршена је подела структуре на пет секција, при чему су, на делу где се преклапају, сегменти посматрани као јединствен носач. Иако су ова одступања релативно прихватљива за потребе инжењерске праксе, за добијање тачнијих резултата, треба изградити модел при којем се делови динамичких еластичних линија унутрашњег и спољашњег сегмента формирају независно и у делу где су увучени један у други.

У погледу самог приступа, може се закључити да он представља компромис између аналитичког и чисто нумеричког приступа. Аналитичка форма динамичког модела је идеал којим треба тежити. Ипак, он је практично непримењив код реалних структура и захтевао би грубе апроксимације у циљу омогућавања решавања проблема, што има за последицу велика одступања резултата. Питање расподељености инерцијалних и еластичних својстава и великих дужина носећих структура стрела аутодизалица, као и променљивост попречних пресека сегмената, нарочито у зглобном делу, уз изменљивост геометрије представљају реалне препреке за дефинисање тачних аналитичких модела. На другој страни спектра, имамо методу коначних елемената, којом се могу обухватити и најмање промене и неправилности структуре, те се резултати могу узети као тачни. Дискретизацијом структуре довољно фином мрежом коначних елемената могу се обухватити утицаји и најмањих конструктивних детаља као што су разна локална ојачања у виду ребара, преклопних заварених лимова, отвора за осовинице, и сл. Захваљујући моћним рачунарима, велики број генерисаних једначина се релативно брзо решава. Међутим, недостатак овог приступа је у томе што његова примена добија пун ефекат тек у завршној фази пројектовања, односно, када је структура потпуно дефинисана до детаља. Дакле, овим приступом би могли да добијемо прецизне карактеристике динамичког понашања али тек за готов производ. Намера да се добију потребне зависности динамичких параметара од геометријских карактеристика структуре би повлачиле генерисање мноштва коначно-елементних модела и њихово процесирање, што је веома дуг и комплексан посао.



Метода коначних разлика, која је по својој суштини нумерички поступак, спрегнута са *Euler-Bernoulli*-јевом теоријом греда које врше савојне осцилације, представља средњи пут између аналитичког и чисто нумеричког приступа. Обухватајући делове аналитичког и нумеричког приступа, она генерише ефикасан а веома тачан аналитичко-нумерички модел, као добар компромис при решавању проблема динамике реалних конструкција.

С обзиром да се применом предложеног комбинованог аналитичко-нумеричког приступа добија дискретизован модел високе тачности а који истовремено задржава параметарску функционалност, пројектант добија ефикасан и прецизан алат за контролу динамичких карактеристика стреле у раној фази планирања.

Даљи правац истраживања се, пре свега, тиче проширења примене овог приступа код осциловања стреле са укљученим пригушењем у хидроцилиндрима, као пасивним начином сузбијања нежељених вибрација. Показана висока тачност модела отвара могућност да се он узме као референтни модел при дефинисању еквивалентног динамичког модела са концентрисаним масама, који је знатно једноставнији за решавање. Ова идеја укључује употребу неког од савремених алгоритама оптимизације, који би одредио положај и вредности концентрисаних маса на стрели, при чему би се као функција циља поставило одржање природних учестаности.

## Литература

- [1] Santosha Kumar Dwivedy, Peter Eberhard: Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review, *Mechanism and Machine Theory* 41, pp. 749–777, 2006.
- [2] B. Jerman, P. Podržaj, J. Kramar: An investigation of slewing-crane dynamics during slewing motion - development and verification of a mathematical model, *International Journal of Mechanical Sciences* 46, pp. 729–750, 2004.
- [3] Bogdan Posiadala, Dawid Cekus: Discrete model of vibration of truck crane telescopic boom with consideration of the hydraulic cylinder of crane radius change in the rotary plane, *Automation in Construction* 17, pp. 245–250, 2008.
- [4] Dawid Cekus, Bogdan Posiadala: Vibration model and analysis of three-member telescopic boom with hydraulic cylinder for its radius change, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 21, No. 10, pp. 2883–2892, 2011.
- [5] Guangfu Sun, Michael Kleeberger: Dynamic responses of hydraulic mobile crane with consideration of the drive system, *Mechanism and Machine Theory* 38, pp. 1489–1508, 2003.
- [6] A. Maczynski and S. Wojciech: Dynamics of a Mobile Crane and Optimisation of the Slewing Motion of Its Upper Structure, *Nonlinear Dynamics* 32, pp. 259–290, 2003.
- [7] Srđan Bošnjak, Nenad Zrnić, Branislav Dragović: Dynamic Response of Mobile Elevating Work Platform under Wind Excitation, *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering* 55-2, pp.104-113, 2009.
- [8] Zygmunt Towarek: The dynamic stability of a crane standing on soil during the rotation of the boom, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 40, No. 6, pp. 557-574, 1998.
- [9] C. Chin, A. H. Nayfeh, E. Abdel-Rahman: Nonlinear Dynamics of Boom Crane, *Journal of Vibration and Control*, 7, pp. 199-220, 2001.
- [10] Damian Derlukiewicz, Grzegorz Przybyłek: Chosen aspects of FEM strength analysis of telescopic jib mounted on mobile platform, *Automation in Construction* 17, pp. 278–283, 2008.
- [11] Almir Alagic, Marie Allvar, Kim Bladh, Markus Langenoja: Crane and bunk technology report - Development of forwarder crane and bunk modules, *MF2011 – Systems engineering*, School of Industrial Engineering and Management, 2011.
- [12] Wilhelm Rust, Karl Schweizerhof: Finite element limit load analysis of thin-walled structures by ANSYS (implicit), LS-DYNA (explicit) and in combination, *Thin-Walled Structures* 41, pp. 227–244, 2003.
- [13] Navneet Kumar and Mohd. Parvez: Force distribution on telescopic boom of crane, *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, Vol. 1, No. 2, pp. 96-104, 2012.

- [14] Nebojša Zdravković, Milomir Gašić, Mile Savković: Analytical Form for Total Static Deflection of the Articulated Boom of the Mobile Elevating Work Platform, *IMK-14 – Research&Development* Vol.19, No.1, pp. 21-28, 2013.
- [15] Juliusz Grabski, Jarosław Strzałko: Dynamic analysis of articulating boom lift, *Proceedings of the XXII SYMPOSIUM - VIBRATIONS IN PHYSICAL SYSTEMS*, pp. 135-138, Poznań-Będlewo, 2006.
- [16] Hiroki Fujita and Hiroyuki Sugiyama: Development of flexible telescopic boom model using ANCF sliding joint constraints with LuGre friction, *Theoretical & applied mechanics letters* 2, 063005, 2012.
- [17] Eileen C. Hernandez: Dynamic characterization and analysis of aerial lifts, *Master Thesis*, Georgia Institute of Technology, 2012.
- [18] Jacek Kłosinski: Swing-free stop control of the slewing motion of a mobile crane, *Control Engineering Practice* 13, pp. 451–460, 2005.
- [19] Guangfu Sun, Jie Liu: Dynamic responses of hydraulic crane during luffing motion, *Mechanism and Machine Theory* 41, 1273–1288, pp. 2006.
- [20] Kircanski, M. and Vukobratovic, M.: Trajectory planning of redundant manipulators in the presence of obstacles, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Symposium Theory and Practise of Robots and Manipulators*, Udine, Italy, pp. 43-50, 1984.
- [21] Maciejewski, A. and Klein, C.: Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments, *International Journal of Robotics Research*, 4, pp. 109-117, 1987.
- [22] Hollerbach, J.M. and Suh, K.C.: Redundancy resolution of manipulators through torque optimiyation, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St Louis, MO, pp. 1016-1020, 1985.
- [23] Mohamed, A. A. and Chevallereau, C.: Resolution of robot redundancy in the Cartesian space by criteria optimization, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, GA, pp. 646-651, 1993.
- [24] Yoshikawa, T.: Analysis and control of robot manipulators with redundancy, *Robotics Research: The First International Symposium*, ed. M. Brady and R. Paul, MIT Press, Cambridge, MA, pp. 735-748, 1984.
- [25] Klein, C.A. and Blaho, B.E.: Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators, *International Journal of Robotics Research* 6, pp. 72-83, 1987.
- [26] L. Beiner: Minimum-force redundancy control of hydraulic cranes, *Mechatronics*, Vol. 7, No. 6, pp. 537-547, 1997.
- [27] B. Posiadala: Influence of crane support system on motion of the lifted load, *Mech. Mach. Theory*, Vol. 32, No. 1, pp. 9-20, 1997.
- [28] E. M. Abdel-rahman and A. H. Nayfeh: Pendulation Reduction in Boom Cranes Using Cable Length Manipulation, *Nonlinear Dynamics* 27, pp. 255–269, 2002.
- [29] Andrzej Maczyński: Load positioning and minimization of load oscillations in rotary cranes, *Journal of theoretical and applied mechanics* 41, 4, pp. 873-885, 2003.

- [30] Hara, K., Yamamoto, T., Kobayashi, A., and Okamoto, M.: Jib crane control to suppress load swing, *International Journal of Systems Science* 20, 715–731, 1989.
- [31] Souissi, R. and Koivo, A. J.: Modeling and control of a rotary crane for swing-free transport of payloads, in *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Control Applications*, Dayton, OH, Vol. 2, IEEE, New York, pp. 782–787, 1992.
- [32] Lewis, D., Parker, G. G., Driessen, B., and Robinett, R. D.: Comparison of command shaping controllers for suppressing payload sway in a rotary boom crane, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, Kohal Coast, HI, Vol. 1, IEEE, New York, pp. 719–724, 1999.
- [33] McCormick, F. and Witz, J.: An investigation into the parametric excitation of suspended loads during crane vessel operations, *Underwater Technology* 19, 30–39, 1993.
- [34] Iwasaki, I., Tanida, K., Kaji, S., and Mutaguchi, M.: Development of an active mass damper for stabilizing the load suspended on a floating crane, in *DETC'97 Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, Sacramento, CA, DETC97/VIB-3816, ASME, New York, 1997.
- [35] Imazeki, M., Mutaguchi, M., Iwasaki, I., and Tanida, K.: Active mass damper for stabilizing the load suspended on floating crane, *IHI Engineering Review* 31, 60–69, 1998.
- [36] Balachandran, B. and Li, Y.: A mechanical filter concept to suppress crane load oscillations, in *DETC'97 Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, Sacramento, CA, DETC97/VIB-4091, ASME, New York, 1997.
- [37] Balachandran, B., Li, Y., and Fang, C.: A Mechanical filter concept for control of non-linear crane-load oscillations, *Journal of Sound and Vibration* 228, 651–682, 1999.
- [38] Li, Y. and Balachandran, B.: Mechanical filters for control of crane-load oscillations, in *MURI on Nonlinear Active Control of Dynamical Systems*, October, 1999.
- [39] Henry, R., Masoud, Z., Nayfeh, A., and Mook, D.: Cargo pendulation reduction on ship-mounted cranes via boom-luff angle actuation, *Journal of Vibration and Control* 7, 1253–1264, 2001.
- [40] Masoud, Z., Nayfeh, A., Henry, R., and Mook, D.: Cargo pendulation reduction on ship-mounted cranes via boom-luff and slew angles actuation, in *Proceedings of the 41th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Atlanta, GA, AIAA-2000-1543, 2000.
- [41] Kłosiński J.: Slewing motion control in mobile crane ensuring stable positioning of carried load, *The Archive of Mechanical Engineering*, **XLVII**, 119-138, 2000.
- [42] Parker G.G., Petterson B., Dohrmann C., Robinett R.D.: Command shaping for residual vibration free crane maneuvers, *Proc. American Control Conference*, Seattle, Washington, 934-938, 1995.
- [43] W.S.M. Lau and K.H. Low: Motion analysis of a suspended mass attached to a crane, *Computers and Structures*, Vol. 52, No. 1, pp. 169-178, 1994.

- [44] Huasen Liu, William Singhose, Wenming Cheng: Tip-over stability of crawler cranes with moveable counterweights, *Proceedings of VIII International Conference – Heavy Machinery - HM 2014*, Zlatibor, Serbia, pp. A.137-143, 2014.
- [45] Shafiul Hasan, Hamid Zaman, Sanghyeok Han, Mohamed Al-Hussein and Yi Su: Integrated Building Information Model to Identify Possible Crane Instability caused by Strong Winds, *Proceedings of Construction Research Congress ASCE 2012*, pp. 1281-1290, 2012.
- [46] Daichi D. Fujioka, Andreas Rauch, William E. Singhose: Tip-Over Stability Analysis of Mobile Boom Cranes with Double-Pendulum Payloads, *Proceedings of American Control Conference*, Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, pp. 3136-3141, 2009.
- [47] Abo-Shanab, R. and Sepehri, N.: Tip-over responses of hydraulic mobile cranes, *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 30, pp. 391-412, 2006.
- [48] Arnold, E., Sawodny, O., Hilderbrandt, A., and Schneider, K.: Antisway system for boom cranes based on an optimal control approach, *Proceedings of American Control Conference*, Vol. 4, (Denver, CO), pp. 3166-3171, 2003.
- [49] Banerjee, A. K. and Singhose, W. E.: Command shaping in tracking control of a two-link exible robot, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 21, pp. 1012-1015, 1998.
- [50] Bouton, N., Lenain, R., Thuilot, B., and Fauroux, J.-C.: A rollover indicator based on the prediction of the load transfer in presence of sliding: application to an all terrain vehicle, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Rome, Italy), 2007.
- [51] Kiliçaslan, S., Balkan, T., and Ider, S.: Tipping loads of mobile cranes with flexible booms, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No. 4, pp. 645-657, 1999.
- [52] Lim, T. H., Kim, Y. S., Choi, J. H., Lee, H. S., and Yang, S. Y.: Development of tipping-over rate computation system for hydraulic excavator having crane function, *Proceedings of KORUS 2004, 8th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology*, pp. 76-79, 2005.
- [53] Malcher, D., Eskandarian, A., and Delaigue, P.: Dynamics models for vehicle roll motion in prerollover manoeuvres, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, vol. 221, pp. 291-301, 2007.
- [54] Papadopoulos, E. and Rey, D.: A new measure of tipover stability margin for mobile manipulators, *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, (Minneapolis, Minnesota), pp. 3111-3116, 1996.
- [55] Qiang Huang, S. S. and Tanie, K.: Motion planning for a mobile manipulator considering stability and task constraints, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Leuven, Belgium), pp. 2192-2198, 1998.

- [56] Singhose, W. and Kim, D.: Manipulation with tower cranes exhibiting double-pendulum oscillations," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Rome, Italy), pp. 4550-4555, 2007.
- [57] Xiuping Mu, Q. W. and Sepehri, N.: On tip-over situation of mobile platforms via impact effects, *Proceedings of IEEE Conference on Control Applications*, (Tronto,Canada), pp. 1546-1551, 2005.
- [58] Daichi D. Fujioka: Tip-over stability analysis for mobile boom cranes with single- and double-pendulum payloads, *Master's thesis*, Georgia Institute of Technology, 2010.
- [59] Evangelos Papadopoulos, Bin Mu and Real Frenette: Modeling and Identification of an Electrohydraulic Articulated Forestry Machine, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, April 21-27, Albuquerque, NM, pp. 1-6, 1997.
- [60] Evangelos Papadopoulos and Soumen Sarkar: On the dynamic modeling of an articulated electrohydraulic forestry machine, *Proceedings of the 1996 AIAA Forum on Advanced Developments in Space Robotics*, Madison, WI, pp. 1-10, 1996.
- [61] Wojciech Armiński, Andrzej Jüngst: Semi-automated forwarder crane control, *Master Thesis*, Blekinge Institute of Technology, 2012.
- [62] Boris Jerman, Jurij Hladnik, Vlada Gašić, Miloš Đorđević: Kinematics of the truck mounted Hydraulic Cranes, *Proceedings of VIII International Conference Heavy Machinery – HM2014*, Zlatibor, Serbia, pp. A.145-150, 2014.
- [63] Mile Savković, Milomir Gašić, Nebojša Zdravković, Goran Bošković, Goran Pavlović: Fracture analysis of the hydraulic truck crane ATLAS 3006, *Proceedings of VIII International Conference Heavy Machinery – HM2014*, Zlatibor, Serbia, pp. A.29-35, 2014.
- [64] Tuna Balkan: A load control system for mobile cranes, *Mechanics Research Communications*, Vol. 23, No. 4, pp. 395-400, 1996.
- [65] Tuna Balkan: A control system for mobile cranes, *Proceedings of 6<sup>th</sup> International Machine Design and Production Conference*, p.9, 1994.
- [66] Tuna Balkan: A moment limiter for mobile cranes, *Heavy Vehicle Systems, Int. J. of Vehicle Design*, Vol.2, No. 2, p.174, 1995.
- [67] Alexander Heinze: Modelling, simulation and control of a hydraulic crane, *MSc. Thesis*, VÄXJÖ UNIVERSITET, Institutionen för teknik och design, School of Technology and Design, 2007.
- [68] Eric Rohmer: Modular intelligent interface to assist human in operating construction machines, *PhD. Thesis*, Tohoku University, Japan, 2004.
- [69] W. Sochacki: The dynamic stability of a laboratory model of a truck crane, *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, pp. 927–930, 2007.
- [70] Radomir Mijailović, Ratko Šelmić: Influence of angular ball bearing deformation on truck-crane dynamic stability, *Facta universitatis, Series: Mechanical Engineering* Vol. 2, No 1, pp. 83-93, 2004.

- [71] Ahmet Sağırlı, Muharrem Erdem Boğoçlu, and Vasfi Emre Ömürlü: Modeling the Dynamics and Kinematics of a Telescopic Rotary Crane by the Bond Graph Method (Part I), *Nonlinear Dynamics*, Vol. 33, pp. 337–351, 2003.
- [72] Ahmet Sağırlı, Muharrem Erdem Boğoçlu, and Vasfi Emre Ömürlü: Modeling the Dynamics and Kinematics of a Telescopic Rotary Crane by the Bond Graph Method (Part II), *Nonlinear Dynamics*, Vol. 33, pp. 353–367, 2003.
- [73] Tomasz Geisler, Wojciech Sochacki: Modelling and research into the vibrations of truck crane, *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, 1(10), pp. 49-60, 2011.
- [74] Bogdan Posiadala, Bogdan Skalmierski, Lech Towski: Motion of the lifted load by a kinematic forcing of the crane telescopic boom, *Mech. Mach. Theory*, Vol. 25, No. 5, pp. 547-556, 1990.
- [75] S. Dubowsky, P.-Y. Gu, J. F. Deck: The dynamic analysis of flexibility in mobile robotic manipulator systems, *Proc. VIII World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Prague, Czechoslovakia, 1991.
- [76] Wojciech Sochacki, Marta Bold: Vibration of crane radius change system, with internal damping, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 12(2), pp. 97-103, 2013.
- [77] Donatus Oguamanam, Srđan Bošnjak, Nenad Zrnić: On the dynamic modelling of flexible manipulators, *FME Transactions*, Vol. 34, pp. 231-237, 2006.
- [78] Mehrdad Farid, Stanislaw A. Lukasiewicz: Dynamic modeling of spatial manipulators with flexible links and joints, *Computers and Structures*, Vol. 75, pp. 419-437, 2000.
- [79] JAMES D. LEE and BEN-LI WANG: Dynamic equations for a two-link flexible robot arm, *Computers & Structures*, Vol. 29. No. 3, pp. 469-477, 1988.
- [80] W.J. Book: Modeling, design, and control of flexible manipulator arms: a tutorial review, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 500–506, 1990.
- [81] T. Fukuda: Flexibility control of elastic robot arms, *Journal of Robotic Systems* 2 (1) pp. 73–88, 1985.
- [82] T. Fukuda, A. Arakawa: Modeling and control characteristics for a two-degrees-of-freedom coupling system of flexible robotic arms, *JSME*, Series C 30, pp. 1458–1464, 1987.
- [83] J.C. Ower, J. Van De Vegte: Classical control design for a flexible manipulator: modeling and control system design, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA 3 (5), 1987.
- [84] W. Chen, Dynamic modeling of multi-link flexible robotic manipulators, *Computers and Structures*, Vol. 79 (2), pp. 183–195, 2001.
- [85] R.I. Milford, S.F. Asokanthan: Configuration dependent eigen frequencies for a two-link flexible manipulator: experimental verification, *Journal of Sound and Vibration* 222 (2), pp. 191–207, 1999.

- [86] Atef A. Ata, Waleed F. Fares, Mohamed Y. Sa'adeh: Dynamic analysis of a two-link flexible manipulator subject to different sets of conditions, *Procedia Engineering*, Vol. 41, pp. 1253 – 1260, 2012.
- [87] Evangelos Papadopoulos, Ahmed Abu-Abed: Design and Motion Planning for a Zero-Reaction Manipulator, *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, California, 1994.
- [88] M.P. Coleman, L.A. McSweeney: Analysis and computation of the vibration spectrum of Cartesian flexible manipulator, *Journal of Sound and Vibration* 274 (1/2), pp. 445–454, 2004.
- [89] S. Choura, A.S. Yigit: Control of a two-link rigid-flexible manipulator with a moving payload mass, *Journal of Sound and Vibration* 243 (5), pp. 883–897, 2001.
- [90] M. Bahrami, A. Rahi: Tip dynamic response of elastic joint manipulators subjected to a stochastic base excitation, *JSME, Series C*, 46 (4), pp. 1502–1508, 2003.
- [91] J.N. Bricout, J.C. Debus, P. Micheau: A finite element model for the dynamics of flexible manipulator, *Mechanism and Machine Theory*, 25 (1), pp. 119–128, 1990.
- [92] H. Moulin, E. Bayo: Accuracy of discrete models for the inverse dynamics of flexible arms, feasible trajectories, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control 2*, pp. 531–532, 1990.
- [93] H. Moulin, E. Bayo: On the accuracy of end-point trajectory tracking for flexible arms by noncausal inverse dynamic solutions, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113, pp. 320–324, 1991.
- [94] M.O. Tokhi, A.K.M. Azad, H. Poerwanto, S. Kourtis, M.J. Baxter: A SIMULINK environment for simulation and control of flexible manipulator systems, *IEE UKACC International Conference on Control 1*, pp. 210–215, 1996.
- [95] M.O. Tokhi, Z. Mohamed, S.H.M. Amin, R. Mamat: Dynamic characterization of a flexible manipulator system: theory and experiments, *Proceedings of TENCON 3*, pp. 167–172, 2000.
- [96] M.O. Tokhi, Z. Mohamed, M.H. Shaheed: Dynamic characterisation of a flexible manipulator system, *Robotica* 19, pp. 571–580, 2001.
- [97] R.J. Theodore, A. Ghosal: Comparison of the assumed modes and finite element models for flexible multi-link manipulators, *The International Journal of Robotics Research* 14 (2), pp. 91–111, 1995.
- [98] V.O.G. Rosado, E.A.O. Yuhara: Dynamic modeling and simulation of a flexible robotic manipulator, *Robotica* 17, pp. 523–528, 1999.
- [99] G. Zhu, S.S. Ge, T.H. Lee: Simulation studies of tip tracking control of a single-link flexible robot based on a lumped model, *Robotica* 17, pp. 71–78, 1999.
- [100] W. Khalil, M. Gautier: Modeling of mechanical systems with lumped elasticity, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation 4*, pp. 3964–3969, 2000.



- [101] S.M. Megahed, K.T. Hamza: Modeling and simulation of planar flexible link manipulators with rigid tip connections to revolute joints, *Robotica* 22, pp. 285–300, 2004.
- [102] H.S. Tzou, C.L. Tseng, G.C. Wan: Distributed structural dynamics control of flexible manipulator II. Distributed sensors and active electromechanical actuator, *Computers and Structures* 35 (6), pp.679–683, 1990.
- [103] H.S. Tzou: Distributed modal identification and vibration control of continua: theory and applications, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113 pp. 494–499, 1991.
- [104] D. Nissing: A vibration damped flexible robot: identification and parameter optimization, *Proceedings of the American Control Conference*, 2000.
- [105] V. Feliu, K.S. Rattan, H.B. Brown: Modeling and control of single-link flexible arms with lumped masses, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 114 (3), pp. 59–69, 1992.
- [106] Leonard Meirovitch: *Fundamentals of vibrations*, McGraw-Hill, 2001.

## Списак слика

Слика 3.1 Камион као вучно возило са монтираном зглобном стрелом за манипулисање теретом .....	22
Слика 3.2 Ауто-дизалица са телескопском стрелом .....	23
Слика 3.3 Маневарска супериорност зглобних стрела ауто-дизалица у конкретним ситуацијама на терену .....	24
Слика 3.4 Мобилна хидраулична подизна платформа.....	24
Слика 3.5 Вагрогасна платформа .....	25
Слика 3.6 Камионска пумпа за бетон.....	25
Слика 3.7 Варијанте уградње зглобне стреле – испред и позади товарног простора .....	26
Слика 3.8 Елементи конструкције типичне зглобне стреле ауто-дизалице.....	27
Слика 3.9 Дијаграм носивости зглобне стреле ауто-дизалице .....	28
Слика 4.1 а) Еластично ослоњен конзолни носач променљивог попречног пресека са концентрисаном масом на врху б) Попречни пресек носача.....	32
Слика 4.2 а) Греда при савојним осцилацијама б) Елементарни делић греде са позитивним смеровима пресечних величина .....	33
Слика 4.3 Шема чворних тачака дуж носача при дискретизацији граничног проблема методом централних коначних разлика .....	36
Слика 4.4 Облик функције померања код ослонца а) $k \rightarrow \infty$ б) $k \rightarrow 0$ .....	38
Слика 4.5 Шема попуњавања матрице $A$ .....	41
Слика 4.6 Густина мреже и гранични услови коначно елементног модела .....	43
Слика 4.7 Природни облици осциловања и фреквенције из ANSYS-а за $q=3.0$ и $r=0.5$ .....	43
Слика 4.8 Утицај промена граничних услова на фундаменталну кружну учестаност.....	45
Слика 4.9 Утицај промена граничних услова на другу природну кружну учестаност .....	46
Слика 4.10 Утицај промена граничних услова на трећу природну кружну учестаност .....	46
Слика 4.11 Поређење резултата за прву природну кружну учестаност.....	47
Слика 5.1 Генерална подела конструкције на чисто зглобни и телескопски део.....	49
Слика 5.2 Модел дво-полужног флексибилног манипулатора: 1-стуб, 2-полуга, 3-хидроцилиндар, 4- подсклоп ушки.....	51
Слика 5.3 Декомпозиција силе хидроцилиндра и упоришним тачкама $F$ и $G$ и замена локалних момената савијања одговарајућим спреговима трансверзалних сила .....	53
Слика 5.4 Шема дискретизације структуре са приказаним фиктивним чворовима....	55

Слика 5.5 а) греда при савојним осцилацијама б) елементарни делић греде са позитивним смеровима пресечних величина .....	57
Слика 5.6 Скица за одређивање зависности углова $\delta_1$ и $\delta_2$ у функцији геометријских параметара и конфигурационих углова $\alpha_1$ и $\alpha_2$ .....	59
Слика 5.7 Шематски приказ утицаја угиба и нагиба еластичне линије код доње вешајне тачке на промену дужине опруге динамичког модела .....	62
Слика 5.8 Шематски приказ утицаја почетног померања, угиба и нагиба еластичне линије код горње вешајне тачке на промену дужине опруге динамичког модела .....	64
Слика 5.9 Прорачунски модел дво-полужног флексибилног манипулатора са сведеним утицајем силе у хидроцилиндру у карактеристичним тачкама .....	68
Слика 5.10 Нумерички пример структуре дво-полужног флексибилног манипулатора .....	92
Слика 5.11 Ротациони кинематички пар клипњаче и осовинице горње ушке .....	93
Слика 5.12 Ротациони кинематички пар цилиндра и осовинице доње ушке .....	93
Слика 5.13 Транслаторни кинематички пар цилиндра и клипњаче .....	94
Слика 5.14 Ротациони кинематички пар стуба и полуге .....	94
Слика 5.15 Еластична карактеристика хидроцилиндра .....	94
Слика 5.16 Еластична карактеристика ослонца .....	94
Слика 5.17 Концентрисана маса на врху манипулатора .....	94
Слика 5.18 Мрежа коначних елемената .....	94
Слика 5.19 Типови коначних елемената са чворовима у теменима и срединама ивица а) хексагонални б) тетраедарски .....	95
Слика 5.20 Прва сопствена учестаност и облик осциловања за случај $\alpha_2=0^\circ$ , $k=10^{20} \text{ Nm/rad}$ , $c=10^7 \text{ N/m}$ , $M_p=500 \text{ kg}$ .....	97
Слика 5.21 Друга сопствена учестаност и облик осциловања за случај $\alpha_2=0^\circ$ , $k=10^{20} \text{ Nm/rad}$ , $c=10^7 \text{ N/m}$ , $M_p=500 \text{ kg}$ .....	97
Слика 5.22 Трећа сопствена учестаност и облик осциловања за случај $\alpha_2=0^\circ$ , $k=10^{20} \text{ Nm/rad}$ , $c=10^7 \text{ N/m}$ , $M_p=500 \text{ kg}$ .....	97
Слика 5.23 Графичка интерпретација одступања сопствених учестаности при варирању положаја полуге .....	98
Слика 5.24 Зависност прве сопствене учестаности од положаја полуге и крутости хидроцилиндра: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм .....	102
Слика 5.25 Зависност друге сопствене учестаности од положаја полуге и крутости хидроцилиндра: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм .....	103
Слика 5.26 Зависност треће сопствене учестаности од положаја полуге и крутости хидроцилиндра: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм .....	104
Слика 5.27 Зависност прве сопствене учестаности од крутости ослонца и масе терета: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм .....	105
Слика 5.28 Зависност друге сопствене учестаности од крутости ослонца и масе терета: а) 3Д дијаграм б) 2Д дијаграм .....	106

Слика 5.29 Зависност треће сопствене учестаности од крутости ослонца и масе терета: а)3Д дијаграм б)2Д дијаграм .....	107
Слика 6.1 Телескопски део стреле у потпуно увученој и произвољно извученој конфигурацији: 1-први сегмент, 2-други сегмент, 3-трећи сегмент, 4-задњи клизачи другог сегмента, 5-предњи клизачи другог сегмента, 6- задњи клизачи трећег сегмента, 7-предњи клизачи трећег сегмента, 8-вешајни склоп куке, 9-ојачање врха првог сегмента, 10-ојачање врха другог сегмента, 11-ојачање врха трећег сегмента.....	108
Слика 6.2 Прорачунски модел телескопа .....	111
Слика 6.3 Фиктивни чворови на граници секција .....	113
Слика 6.4 Нумерички пример структуре телескопа .....	132
Слика 6.5 Гранични и контактни услови коначно-елементног модела на примеру конкретног случаја испитивања за $s_1=1500mm$ , $s_2=1500mm$ и $M=1000kg$ .....	133
Слика 6.6 Хексагонални призматични коначни елемент са чворовима у теменима и средињама ивица .....	134
Слика 6.7 Мрежа коначних елемената и однос њихових димензија према структурним детаљима .....	134
Слика 6.8 Прва сопствена учестаност и облик осциловања за случај $s_1=1500mm$ , $s_2=1500mm$ и $M=1000kg$ .....	137
Слика 6.9 Друга сопствена учестаност и облик осциловања за случај $s_1=1500mm$ , $s_2=1500mm$ и $M=1000kg$ .....	137
Слика 6.10 Трећа сопствена учестаност и облик осциловања за случај $s_1=1500mm$ , $s_2=1500mm$ и $M=1000kg$ .....	138
Слика 6.11 3-Д дијаграм промене сопствених фреквенција са променом $s_1$ и $s_2$ при $M=500kg$ .....	138
Слика 6.12 Графички приказ резултата из табеле 6.2 при $s_2=1500mm$ а за дискретне вредности $M$ .....	139
Слика 6.13 Графички приказ резултата из табеле 6.2 при $M=500kg$ а за дискретне вредности $s_2$ (у метрима) .....	139
Слика 6.14 Графички приказ резултата из табеле 6.3 при $s_1=1500mm$ а за дискретне вредности $M$ .....	140
Слика 6.15 Графички приказ резултата из табеле 6.3 при $M=500kg$ а за дискретне вредности $s_1$ (у метрима) .....	140

## Списак табела

Табела 4.1 Упоредни приказ добијених резултата са релативним одступањима.....	44
Табела 5.1 Геометријске карактеристике попречних пресека стуба и полуге.....	93
Табела 5.2 Резултати испитивања при варирању угла полуге .....	96
Табела 5.3 Резултати испитивања при варирању крутости ослонца .....	99
Табела 5.4 Резултати испитивања при варирању крутости хидроцилиндра .....	100
Табела 5.5 Резултати испитивања при варирању масе терета.....	101
Табела 6.1 Геометријске карактеристике попречних пресека сегмената .....	132
Табела 6.2 Резултати испитивања за фиксиран трећи сегмент .....	135
Табела 6.3 Резултати испитивања за фиксиран други сегмент .....	136

## Прилози

Прилог 1 - Matlab код уз поглавље 4 (израчунавање природних учестаности еластично ослоњене конзоле правоугаоног танкозидног попречног пресека са линеарно променљивом висином и теретом на врху)

```
clc;clear all;

%Input parameters - konstante
L=3;HB=0.1;delta=5e-3;B=0.1;ro=7.85e3;E=2.1e11;N=100;x0=0;

%Input parameters - promenljive

HA=0.20;
q=3.00;
s=0.5;

m=delta*ro*L*(HA+HB+2*B)-4*delta^2*L*ro;
M=s*m;
h=L/N;
b=(HA-HB)/L;
k=2112017;

for k1=1:N
    A1(k1)=HA-k1*b*h-2*delta;
    C1(k1)=HA-k1*b*h-delta;
    G(k1)=24*ro*(A1(k1)+B);
    R(k1)=12*b^2*h^2*E*(A1(k1)+B);
    Q(k1)=6*b*h*E*(A1(k1)^2+2*C1(k1)*B);
    P(k1)=2*E*(A1(k1)^3+3*B*C1(k1)^2);
end

IA=delta*((HA-2*delta)^3+3*B*(HA-delta)^2)/6;
T=(2*N-q)/(2*N+q);
J=24*M*(1-
3*b*h*(A1(N)^2+2*B*C1(N))/(A1(N)^3+3*B*C1(N)^2))/(delta*h);

x=x0+[0:N]*h;
A(1,1)=(6*P(1)-2*R(1)-(P(1)+Q(1))*T)/G(1);
A(1,2)=-(4*P(1)-2*Q(1)-R(1))/G(1);
A(1,3)=(P(1)-Q(1))/G(1);
A(2,1)=-(4*P(2)+2*Q(2)-R(2))/G(2);
A(2,2)=2*(3*P(2)-R(2))/G(2);
A(2,3)=-(4*P(2)-2*Q(2)-R(2))/G(2);
A(2,4)=(P(2)-Q(2))/G(2);
```

```

for k1=3:N-2
    pomV(1)=(P(k1)+Q(k1))/G(k1);
    pomV(2)=-(4*P(k1)+2*Q(k1)-R(k1))/G(k1);
    pomV(3)=2*(3*P(k1)-R(k1))/G(k1);
    pomV(4)=-(4*P(k1)-2*Q(k1)-R(k1))/G(k1);
    pomV(5)=(P(k1)-Q(k1))/G(k1);
    A(k1,k1-2:k1+2)=pomV;
end

A(N-1,N-3)=(P(N-1)+Q(N-1))/G(N-1);
A(N-1,N-2)=-(4*P(N-1)+2*Q(N-1)-R(N-1))/G(N-1);
A(N-1,N-1)=(5*P(N-1)+Q(N-1)-2*R(N-1))/G(N-1);
A(N-1,N)=-(2*P(N-1)-R(N-1))/G(N-1);

A(N,N-2)=2*P(N)/(G(N)+J);
A(N,N-1)=-4*P(N)/(G(N)+J);
A(N,N)=2*P(N)/(G(N)+J);

[Y, Lambda]=eig(A);
eigvals=diag(Lambda);
[eigvals,I]=sort(eigvals);

Y=Y(:,I);
ws=(sqrt(eigvals))/(h^2);

ws(1)
ws(2)
ws(3)

```

Прилог 2 - Matlab код уз поглавље 5 (израчунавање природних учестаности згобно везаних сегмената стреле са еластичним ослањањем и теретом на врху, при променљивој аксијалној крутости погонског хидроцилиндра и за различите конфигурације)

```
clear all;
%Input data [kg,m,s]
%Material properties
E=2.1e+011;
%Lengths
l1=2.0;
lB=0.4;
l2=2.4;
lD=0.5;
e1=0.19;
e2=0.21;
r1=1;
h1=r1*e1;
r2=1;
h2=r2*e2;
%Discretization
l=l1+l2;
N=440;
s=l/N;
%Boundary nodes
H=round((lB-h1/2)/s);
B=round(lB/s);
J=round((lB+h1/2)/s);
C=round(l1/s);
R=round((l1+lD-h2/2)/s);
D=round((l1+lD)/s);
Q=round((l1+lD+h2/2)/s);
P=N;
%Areas
A1=2930e-006;
A2=4023e-006;
%Moments of inertia
I1=1.24e-005;
I2=2.54e-005;
%Masses
m1=23.0;
m2=31.6;
Mp=500;
Mhc=65;
p1=0.5;
MB=p1*Mhc;
p2=0.5;
```



```

MD=p2*Mhc;
M2=l2*m2;
M=Mp+M2+MD;
%Spring and support stiffness
c=1e+7;
k=1e+6;
%Configuration angles (a1=alfa1,a2=alfa2)
a1=(15/180)*pi;
a2=(30/180)*pi;
%End Data Input_____

%Matrix A definition_____

%n=1
B1=(E*I1)/m1;
K1=(2*E*I1-k*s)/(2*E*I1+k*s);
A(1,1:3)=[B1*(6-K1) -4*B1 B1];

%n=2
A(2,1:4)=[-4*B1 6*B1 -4*B1 B1];

%n=3:H-1
for n=3:H-1
    A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 6*B1 -4*B1 B1];
end

%n=H
l0=sqrt(lD^2+e2^2+(l1-lB)^2+e1^2-2*sqrt((lD^2+e2^2)*((l1-lB)^2+e1^2))*cos(pi/2-a1+a2-atan(e1/(l1-lB))-atan(e2/lD)));
%sin(beta1)
sb1=(sqrt(lD^2+e2^2)*sin(pi/2-a1+a2-atan(e2/lD))-e1)/l0;
%sin(beta2)
sb2=(sqrt((l1-lB)^2+e1^2)*sin(pi/2-a1+a2-atan(e1/(l1-lB)))-e2)/l0;
%cos(beta1)
cb1=sqrt(1-sb1^2);
%cos(beta2)
cb2=(sin(a2-a1)+sb1*sb2)/cb1;
B2=(c*cb1*s^3)/(r1*E*I1);
n=H;
A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 B1*(6+B2*cb1/r1) -4*B1 B1];
A(n,B)=B1*B2*sb1;
A(n,J)=-B1*B2*cb1/r1;
A(n,C)=-B1*B2*cos(a2-a1)*cb2;
A(n,R)=-B1*B2*cb2/r2;
A(n,D)=B1*B2*sb2;
A(n,Q)=B1*B2*cb2/r2;

```

```

%n=H+1:B-1
for n=H+1:B-1
    A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 6*B1 -4*B1 B1];
end

%n=B
n=B;
B3=(c*sb1*s^3)/(E*I1);
B4=(s*E*I1)/(m1*s+MB);
A(n,H)=B4*B3*cb1/r1;
A(n,n-2:n+2)=[B4 -4*B4 B4*(6+B3*sb1) -4*B4 B4];
A(n,J)=-B4*B3*cb1/r1;
A(n,C)=-B4*B3*cos(a2-a1)*cb2;
A(n,R)=-B4*B3*cb2/r2;
A(n,D)=B4*B3*sb2;
A(n,Q)=B4*B3*cb2/r2;

%n=B+1:J-1
for n=B+1:J-1
    A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 6*B1 -4*B1 B1];
end

%n=J;
n=J;
A(n,H)=-B1*B2*cb1/r1;
A(n,B)=-B1*B2*sb1;
A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 B1*(6+B2*cb1/r1) -4*B1 B1];
A(n,C)=B1*B2*cos(a2-a1)*cb2;
A(n,R)=B1*B2*cb2/r2;
A(n,D)=-B1*B2*sb2;
A(n,Q)=-B1*B2*cb2/r2;

%n=J+1:C-2
for n=J+1:C-2
    A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 6*B1 -4*B1 B1];
end

%n=C-1
n=C-1;
A(n,n-2:n+1)=[B1 -4*B1 5*B1 -2*B1];

%n=C
n=C;
B5=m1+m2*(sin(a2-a1))^2;
B6=(2*m1*s^3*cos(a2-a1)*c*cb2)/(E*I1*B5);
B7=(E*I1*s*B5)/(m1*s*B5+2*M*m1*(cos(a2-a1))^2);
B8=(2*(I1*m2+I2*m1)*(sin(a2-a1))^2+4*I1*m1)/(B5*I1);

```

```

A(n,H)=-B7*B6*cb1/r1;
A(n,B)=-B7*B6*sb1;
A(n,J)=B7*B6*cb1/r1;
A(n,n-2:n+2)=[B7*(1+(2*m1-B5)/B5) -(B7*4*m1)/B5
B7*(B8+B6*cos(a2-a1)*cb2-2) -(B7*4*I2*m1*sin(a2-a1))/(I1*B5)
(B7*2*I2*m1*sin(a2-a1))/(I1*B5)];
A(n,R)=B7*B6*cb2/r2;
A(n,D)=-B7*B6*sb2;
A(n,Q)=-B7*B6*cb2/r2;

%n=C+1
B9=(E*I2)/m2;
n=C+1;
A(n,n-1:n+2)=[-B9*2*sin(a2-a1) B9*5 -B9*4 B9];

%n=C+2
n=C+2;
A(n,n-2:n+2)=[B9*sin(a2-a1) -B9*4 B9*6 -B9*4 B9];

%n=C+3:R-1
for n=C+3:R-1
    A(n,n-2:n+2)=[B9 -4*B9 6*B9 -4*B9 B9];
end

%n=R
n=R;
B10=(c*cb2*s^3)/(r2*E*I2);
A(n,H)=-B9*B10*cb1/r1;
A(n,B)=-B9*B10*sb1;
A(n,J)=B9*B10*cb1/r1;
A(n,C)=B9*B10*cos(a2-a1)*cb2;
A(n,n-2:n+2)=[B9 -4*B9 B9*(6+B10*cb2/r2) -4*B9 B9];
A(n,D)=-B9*B10*sb2;
A(n,Q)=-B9*B10*cb2/r2;

%n=R+1:D-1
for n=R+1:D-1
    A(n,n-2:n+2)=[B9 -4*B9 6*B9 -4*B9 B9];
end

%n=D
n=D;
B11=(c*sb2*s^3)/(E*I2);
B12=(s*E*I2)/(m2*s+MD);
A(n,H)=B12*B11*cb1/r1;
A(n,B)=B12*B11*sb1;
A(n,J)=-B12*B11*cb1/r1;

```

```

A(n,C)=-B12*B11*cos(a2-a1)*cb2;
A(n,R)=-B12*B11*cb2/r2;
A(n,n-2:n+2)=[B12 -4*B12 B12*(6+B11*sb2) -4*B12 B12];
A(n,Q)=B12*B11*cb2/r2;

%n=D+1:Q-1
for n=D+1:Q-1
A(n,n-2:n+2)=[B9 -4*B9 6*B9 -4*B9 B9];
end

%n=Q
n=Q;
A(n,H)=B9*B10*cb1/r1;
A(n,B)=B9*B10*sb1;
A(n,J)=-B9*B10*cb1/r1;
A(n,C)=-B9*B10*cos(a2-a1)*cb2;
A(n,R)=-B9*B10*cb2/r2;
A(n,D)=B9*B10*sb2;
A(n,n-2:n+2)=[B9 -4*B9 B9*(6+B10*cb2/r2) -4*B9 B9];

%n=Q+1:N-2
for n=Q+1:N-2
A(n,n-2:n+2)=[B9 -4*B9 6*B9 -4*B9 B9];
end

%n=N-1;
A(N-1,N-3:N)=[B9 -4*B9 5*B9 -2*B9];

%n=N
B13=(s*E*I2)/(m2*s+2*Mp);
A(N,N-2:N)=[2*B13 -4*B13 2*B13];

%End Matrix A definition_____

%Natural frequencies computation_____

[Y, Lambda]=eig(A);
eigvals=diag(Lambda);
[eigvals,I]=sort(eigvals);
numel(eigvals);
Y=Y(:,I);
f=(sqrt(eigvals))/(2*pi*(s^2));
f(1)
f(2)
f(3)
%End_____

```

Прилог 3 - Matlab код уз поглавље 6 (израчунавање природних учестаности телескопског дела стреле ауто-дизалице са теретом на врху за различите конфигурације)

```
clc;clear all;

%Konfiguracione koordinate
s1=1.5;
s2=1.25;
M=1000;

%Karakteristike materijala
ro=7.85e3;
E=2.1e11;

%Duzine
l1=1.95;
l2=2.03;
l3=2.12;

%Geometrijske karakteristike poprecnih preseka
A1=0.004025;
A2=0.003025;
A3=0.0027135;
I1=284.97e-7;
I2=178.81e-7;
I3=132.84e-7;

%Mase
m1=A1*ro;
m2=A2*ro;
m3=A3*ro;

%Diskretizacija
s=0.01;
B=round(s1/s);
C=round(l1/s);
D=round((s1+s2)/s);
F=round((s1+l2)/s);
G=round((s1+s2+l3)/s);

%Izrazi
a=I1/(I1+I2);
b=(m1+m2)/m1;
c=(I1+I2)/I2;
d=m2/(m1+m2);
```

$$e = I_2 / (I_2 + I_3);$$

$$f = (m_2 + m_3) / m_2;$$

$$g = (I_2 + I_3) / I_3;$$

$$h = m_3 / (m_2 + m_3);$$

$$B_1 = (E * I_1) / m_1;$$

$$B_2 = (E * (I_1 + I_2)) / (m_1 + m_2);$$

$$B_3 = (E * I_2) / m_2;$$

$$B_4 = (E * (I_2 + I_3)) / (m_2 + m_3);$$

$$B_5 = (E * I_3) / m_3;$$

$$P_1 = (5 * a + 7) / (1 + a);$$

$$Q_1 = (5 * c + 7) / (1 + c);$$

$$R_1 = (5 * e + 7) / (1 + e);$$

$$S_1 = (5 * g + 7) / (1 + g);$$

$$P_2 = (6 + 2 * a) / (1 + a);$$

$$Q_2 = (6 + 2 * c) / (1 + c);$$

$$R_2 = (6 + 2 * e) / (1 + e);$$

$$S_2 = (6 + 2 * g) / (1 + g);$$

$$P_3 = 2 / (1 + a);$$

$$Q_3 = 2 / (1 + c);$$

$$R_3 = 2 / (1 + e);$$

$$S_3 = 2 / (1 + g);$$

$$P_4 = 2 / (1 + b);$$

$$Q_4 = 2 / (1 + d);$$

$$R_4 = 2 / (1 + f);$$

$$S_4 = 2 / (1 + h);$$

$$P_5 = (4 * (3 + a)) / ((1 + b) * (1 + a));$$

$$Q_5 = (4 * (3 + c)) / ((1 + d) * (1 + c));$$

$$R_5 = (4 * (3 + e)) / ((1 + f) * (1 + e));$$

$$S_5 = (4 * (3 + g)) / ((1 + h) * (1 + g));$$

$$P_6 = (2 * a^2 + 20 * a + 2) / (a * (1 + a) * (1 + b));$$

$$Q_6 = (2 * c^2 + 20 * c + 2) / (c * (1 + c) * (1 + d));$$

$$R_6 = (2 * e^2 + 20 * e + 2) / (e * (1 + e) * (1 + f));$$

$$S_6 = (2 * g^2 + 20 * g + 2) / (g * (1 + g) * (1 + h));$$

$$P_7 = (12 * a + 4) / (a * (1 + a) * (1 + b));$$

$$Q_7 = (12 * c + 4) / (c * (1 + c) * (1 + d));$$

$$R_7 = (12 * e + 4) / (e * (1 + e) * (1 + f));$$

$$S_7 = (12 * g + 4) / (g * (1 + g) * (1 + h));$$

$$P_8 = 2 / (a * (1 + b));$$

```

Q8=2/(c*(1+d));
R8=2/(e*(1+f));
S8=2/(g*(1+h));

P9=(2*a)/(1+a);
Q9=(2*c)/(1+c);
R9=(2*e)/(1+e);
S9=(2*g)/(1+g);

P10=(6*a+2)/(1+a);
Q10=(6*c+2)/(1+c);
R10=(6*e+2)/(1+e);
S10=(6*g+2)/(1+g);

P11=(7*a+5)/(1+a);
Q11=(7*c+5)/(1+c);
R11=(7*e+5)/(1+e);
S11=(7*g+5)/(1+g);
W=(s*E*I3)/(s*m3+2*M);

```

**%Matrix A definition**

---

**%n=1**

```
A(1,1:3)=[7*B1 -4*B1 B1];
```

**%n=2**

```
A(2,1:4)=[-4*B1 6*B1 -4*B1 B1];
```

**%n=3:B-2**

```
for n=3:B-2
```

```
    A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 6*B1 -4*B1 B1];
```

```
end
```

**%n=B-1**

```
n=B-1;
```

```
A(n,n-2:n+2)=[B1 -4*B1 B1*P1 -B1*P2 B1*P3];
```

**%n=B**

```
n=B;
```

```
A(n,n-2:n+2)=[B1*P4 -B1*P5 B1*P6 -B1*P7 B1*P8];
```

**%n=B+1**

```
n=B+1;
```

```
A(n,n-2:n+2)=[B2*P9 -B2*P10 B2*P11 -4*B2 B2];
```

**%n=B+2:C-2**

```
for n=B+2:C-2
```

```
    A(n,n-2:n+2)=[B2 -4*B2 6*B2 -4*B2 B2];
```

```

end
%n=C-1
n=C-1;
A(n,n-2:n+2)=[B2 -4*B2 B2*Q1 -B2*Q2 B2*Q3];

%n=C
n=C;
A(n,n-2:n+2)=[B2*Q4 -B2*Q5 B2*Q6 -B2*Q7 B2*Q8];

%n=C+1
n=C+1;
A(n,n-2:n+2)=[B3*Q9 -B3*Q10 B3*Q11 -4*B3 B3];

%n=C+2:D-2
for n=C+2:D-2
    A(n,n-2:n+2)=[B3 -4*B3 6*B3 -4*B3 B3];
end

%n=D-1
n=D-1;
A(n,n-2:n+2)=[B3 -4*B3 B3*R1 -B3*R2 B3*R3];

%n=D
n=D;
A(n,n-2:n+2)=[B3*R4 -B3*R5 B3*R6 -B3*R7 B3*R8];

%n=D+1
n=D+1;
A(n,n-2:n+2)=[B4*R9 -B4*R10 B4*R11 -4*B4 B4];

%n=D+2:F-2
for n=D+2:F-2
    A(n,n-2:n+2)=[B4 -4*B4 6*B4 -4*B4 B4];
end

%n=F-1
n=F-1;
A(n,n-2:n+2)=[B4 -4*B4 B4*S1 -B4*S2 B4*S3];

%n=F
n=F;
A(n,n-2:n+2)=[B4*S4 -B4*S5 B4*S6 -B4*S7 B4*S8];

%n=F+1
n=F+1;
A(n,n-2:n+2)=[B5*S9 -B5*S10 B5*S11 -4*B5 B5];

```



```

%n=F+2:G-2
for n=F+2:G-2
    A(n,n-2:n+2)=[B5 -4*B5 6*B5 -4*B5 B5];
end

%n=G-1
n=G-1;
A(n,n-2:n+1)=[B5 -4*B5 5*B5 -2*B5];

%n=G
A(G,G-2:G)=[2*W -4*W 2*W];

%End Matrix A definition_____

%Natural frequencies computation_____

[Y, Lambda]=eig(A);
eigvals=diag(Lambda);
[eigvals,I]=sort(eigvals);
numel(eigvals);
Y=Y(:,I);
f=(sqrt(eigvals))/(2*pi*(s^2));
f(1)
f(2)
f(3)

%End_____

```