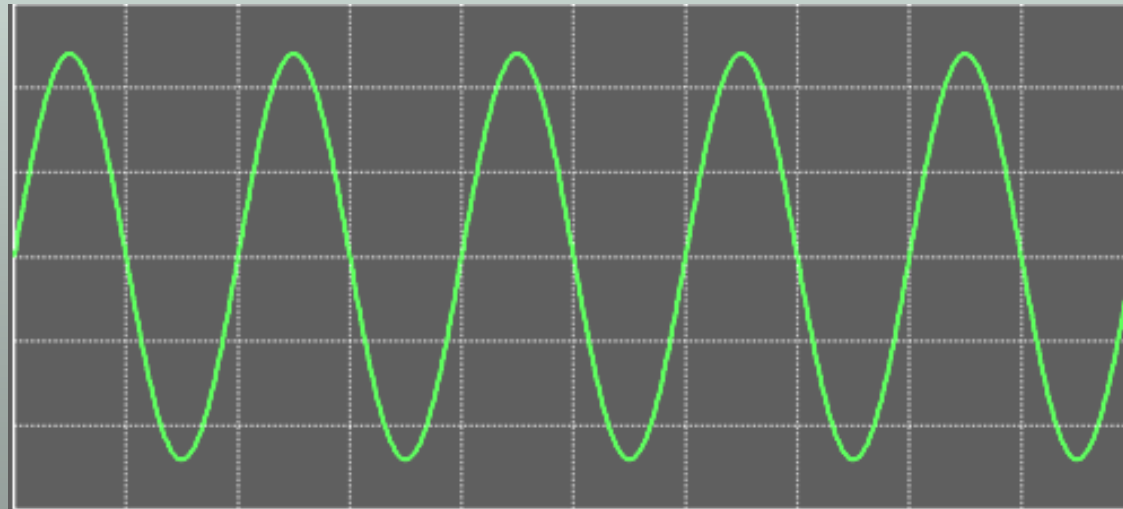


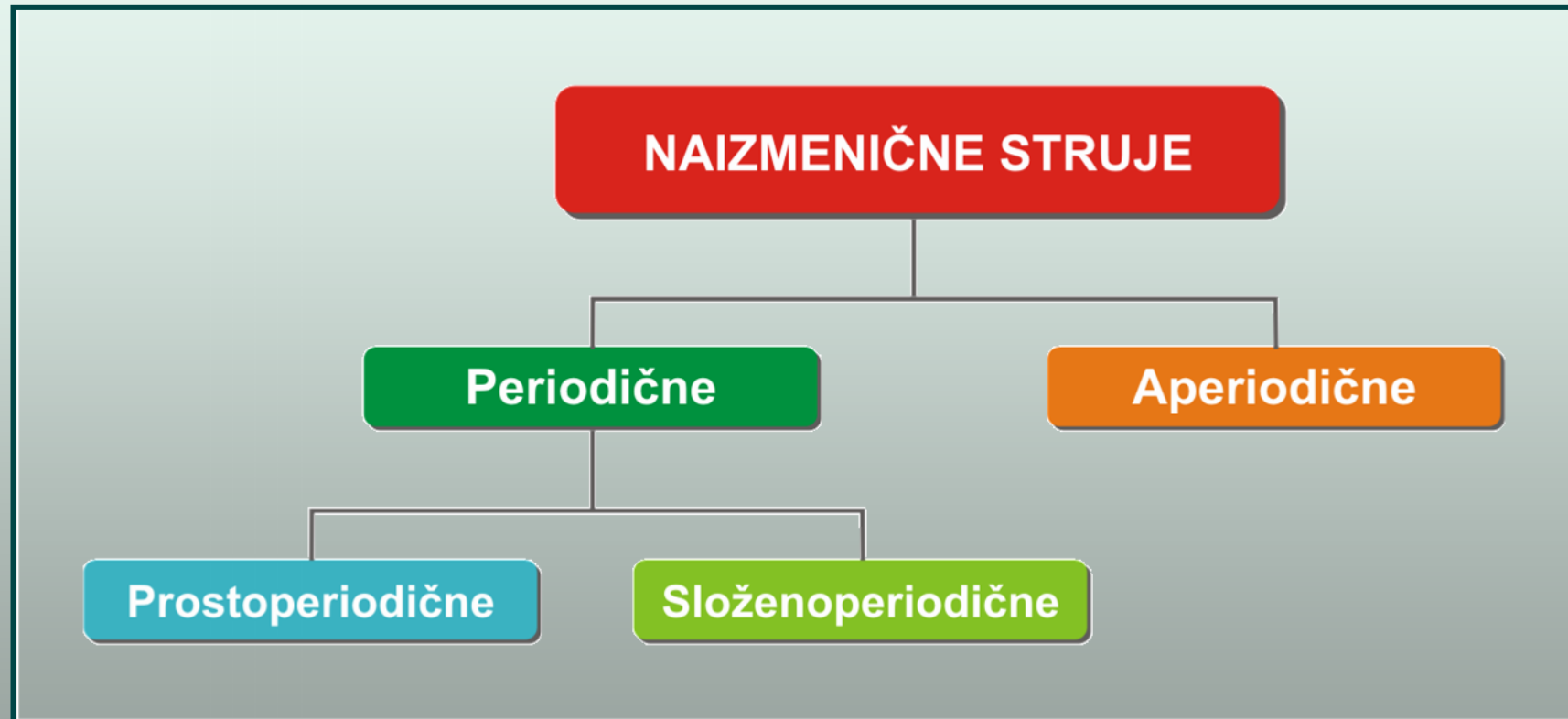
# NAIZMENI NE STRUJE



# Osnovni pojmovi

- **Pored struja konstantne jačine (vremenski stalne struje), postoje i struje koje su promenljive u toku vremena (menjaju jačinu, ili smer, ili i jačinu i smer**
- **Promenljive struje postoje u električnim kolima u kojima deluje promenljiva elektromotorna sila**
- **NAIZMENIČNE STRUJE su vremenski promenljive struje koje naizmenično menjaju intenzitet, a povremeno i smer**
- **Njihova magnituda i pravac obično variraju periodično, a najčešći zakon po kome se menjaju je sinusoidalni (omogućava najefikasniji prenos energije)**
- **U kolima elektronike i energetske elektronike, koriste se mnogo i drugi zakoni promene naizmeničnih struja**

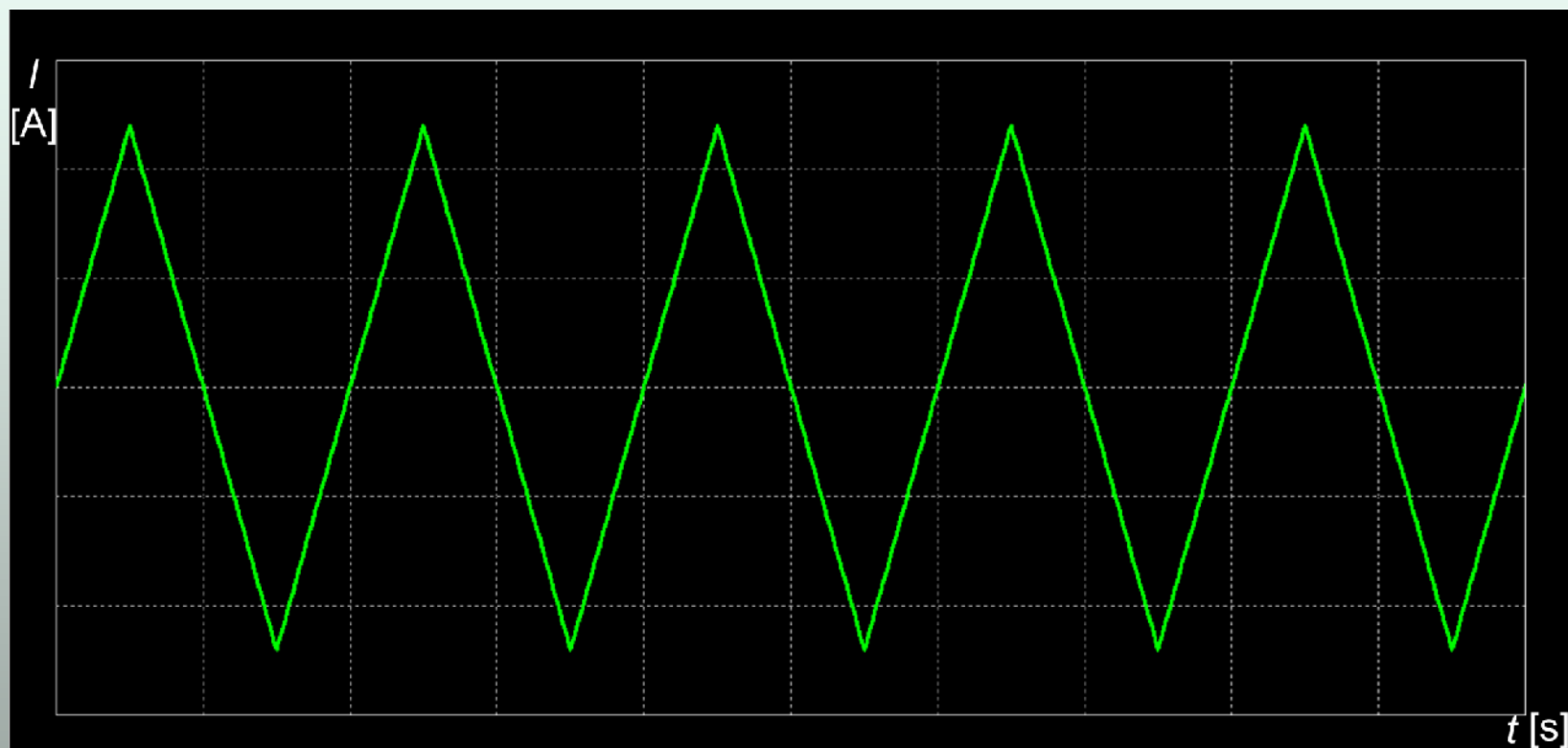
- **Prema zakonu promene u funkciji vremena, naizmenične struje mogu se podeliti na sledeći način:**



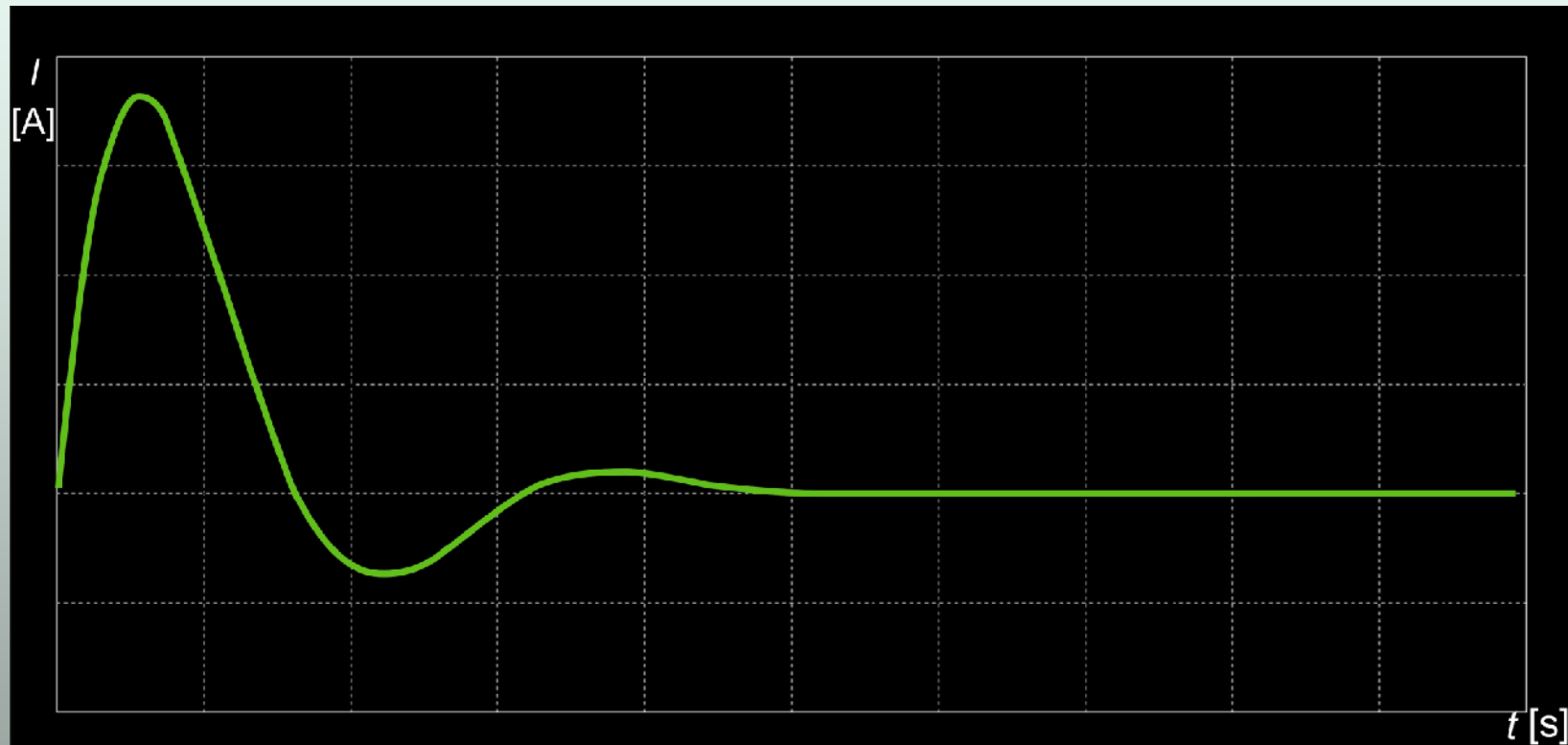
## Prostoperiodična naizmenična struja:



## Složnoperiodična naizmenična struja:



## Aperiodična naizmenična struja:

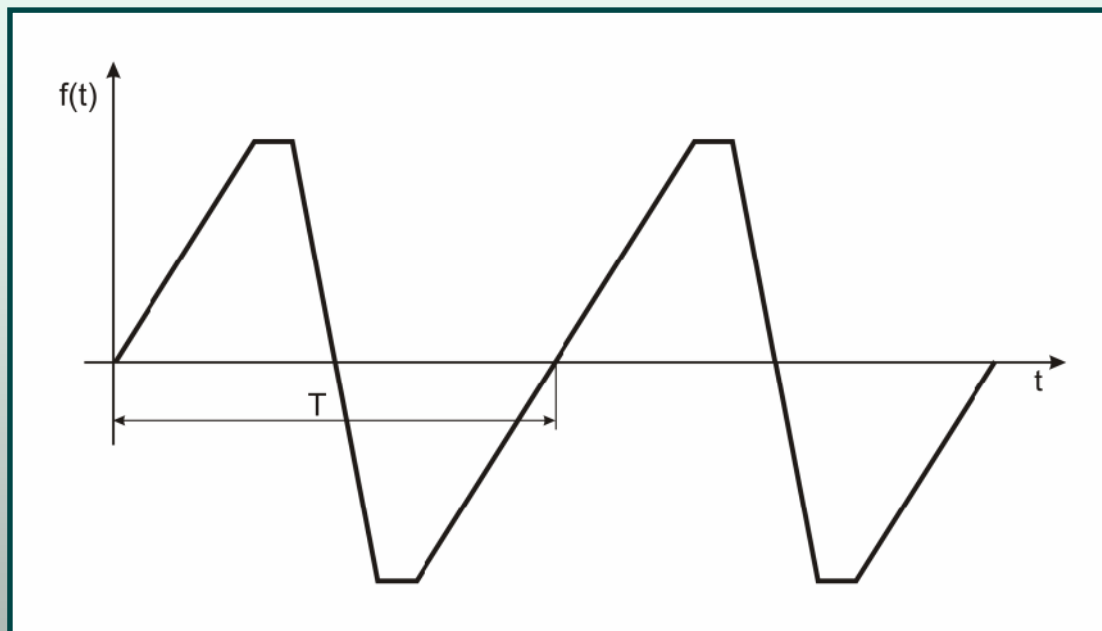


## **Periodične veličine**

- **Periodične naizmjenične struje i naponi su periodično promjenjive veličine**
- **Određene vrednosti dobijaju periodično tokom vremena**
- **Najviše se koriste prostoperiodične naizmjenične struje, kod kojih jačina struje menja po SINUSNOJ ili KOSINUSNOJ funkciji**
- **Vremenski periodične veličine su one veličine čije se vrednosti ponavljaju u jednakim vremenskim razmacima**
- **Vreme posle koga se vrednosti periodične funkcije ponavljaju naziva se PERIODA i označava sa  $T$**
- **Perioda je dužina trajanja jednog ciklusa periodične funkcije**

- Ako je neka funkcija periodična, sa periodom vremena  $T$ , onda za frekvenciju (učestanost) važi:  $f(t) = f(t + T)$

- FREKVENCIJA  $f$  je recipročna vrednost periode:  $f = \frac{1}{T}$



- Jedinica za učestanost je herc [Hz] u čast nemačkog fizičara Herca (Heinrich Rudolf Hertz, 1857-1894), koji je dokazao postojanje elektromagnetnih talasa
- Periodična veličina ima učestanost od 1 Hz ako svake sekunde izvrši jedan ciklus





- **ARITMETIČKA SREDNJA VREDNOST** periodične funkcije  $f(t)$  u intervalu  $[t_1, t_2]$  je:

$$F_{\text{sr}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- **SREDNJA VREDNOST** za vreme jedne periode je:

$$F_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- **EFEKTIVNA VREDNOST** periodične funkcije  $f(t)$  je njena kvadratna srednja vrednost

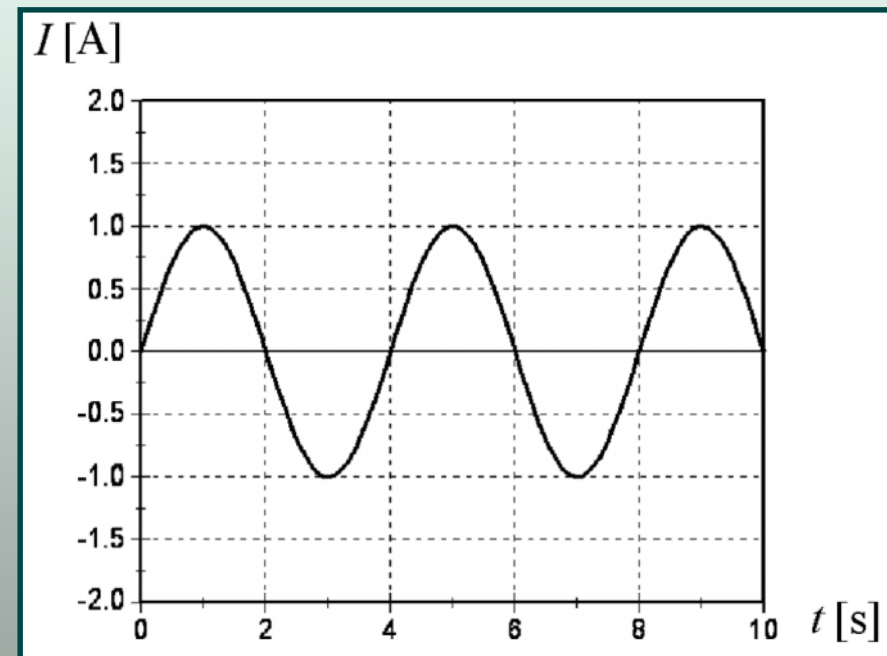
$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{|t_2 - t_1|} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt}$$

# Prostoperiodi ne veli ine

- U kolima kod kojih su naponi i struje pobudnih izvora sinusoidalne funkcije vremena, naponi i struje elemenata, takođe su sinusoidalne funkcije vremena

- Struja koja se menja po sinusnom zakonu može se predstaviti jednačinom:

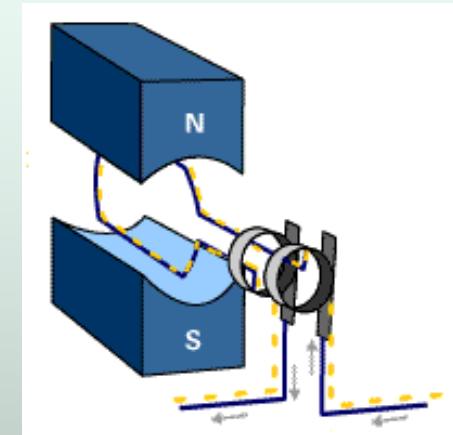
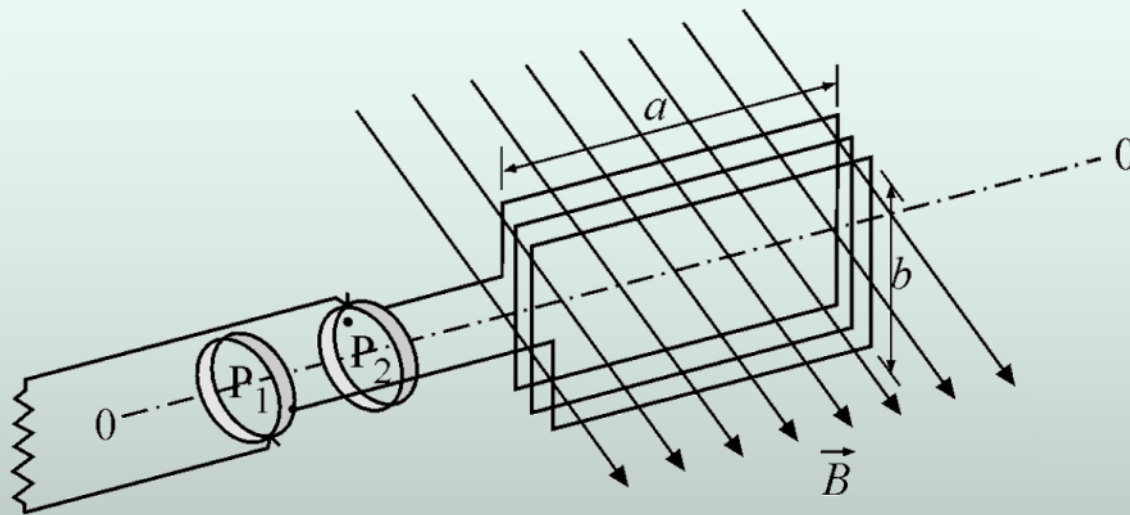
$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



- Značaj ovakvih kola je veliki, jer se prenos i distribucija električne energije vrši isključivo sistemom naizmeničnih struja koje se menjaju po sinusnom zakonu

# Princip rada alternatora

- Principijalna šema generatora jednofazne naizmenične struje:

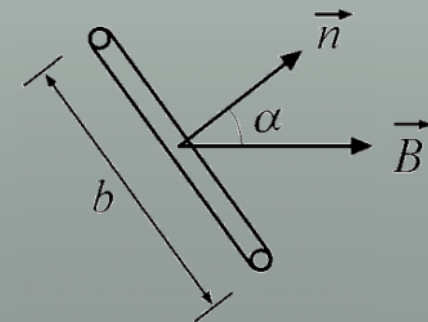


- Kada se kalem obrće oko svoje ose konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$ , u njemu se indukuje ems:
- U trenutku kada je normala na ravan kalema  $\vec{n}$  čini ugao  $\alpha$  sa pravcem magnetnog polja, fluks u jednom navojku:

$$= B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

$$S = a \cdot b \quad \text{površina jednog navojka}$$

$$e = - \frac{d}{dt}$$



➤ **Brzina promene fluksa:**  $\frac{d}{dt} = -B \cdot S \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$  **ugaona brzina obrtanja kalema**

➤ **Pretpostavimo:**  $\left. \begin{array}{l} \omega = \text{const.} \\ t = 0 \\ \alpha = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = \omega \cdot t \\ e_o = -\frac{d}{dt} = \omega \cdot B \cdot S \cdot \sin \omega t \end{array}$

➤ **Za  $N$  redno vezanih navojaka kalema, ukupna indukovana ems:**  $e = N \cdot e_o = \omega \cdot N \cdot B \cdot S \cdot \sin \omega t$

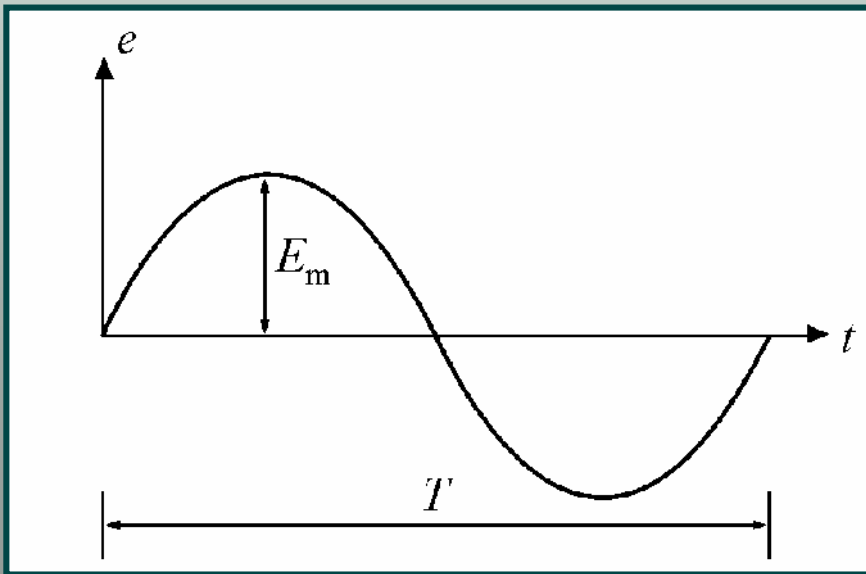
$$E_m = \omega \cdot N \cdot B \cdot S$$

$$e = E_m \sin \omega t$$

**Indukovana elektromotorna sila je prostoperiodična, sinusna funkcija vremena**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Perioda prostoperiodične elektromotorne sile**

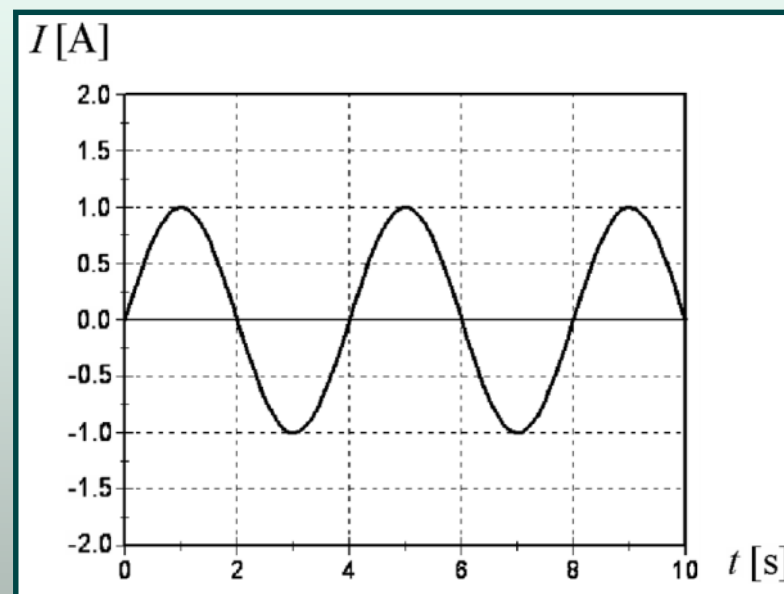


# Prostoperiodi ne naizmeni ne veli ine

- Opšti izraz za intenzitet prostoperiodične struje, prema usvojenom referentnom smeru i početnom trenutku:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_0)$$



$i(t)$  - trenutna vrednost prostoperiodične struje

$I_m$  - maksimalna vrednost (amplituda) prostoperiodične struje  
(uvek pozitivna veličina)

- kružna učestanost prostoperiodične struje ( $\omega = 2\pi f$ )

$f$  - učestanost (frekvencija) prostoperiodične struje

$\omega t + \varphi_0$  - faza prostoperiodične struje

$\varphi_0$  - početna faza struje (faza struje u trenutku  $t = 0$ )

## EFEKTIVNA VREDNOST prostoperiodi ne veli ine

- Efektivna vrednost  $I$  sinusne naizmenične struje može se izračunati na osnovu opšteg izraza za efektivnu vrednost periodičnih funkcija, u toku jedne periode  $T$ :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

odnosno: 
$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt$$

- Izračunavanjem integrala dobija se:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m$$

- Na isti način:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- **Izraz za trenutnu vrednost naizmenične struje:**

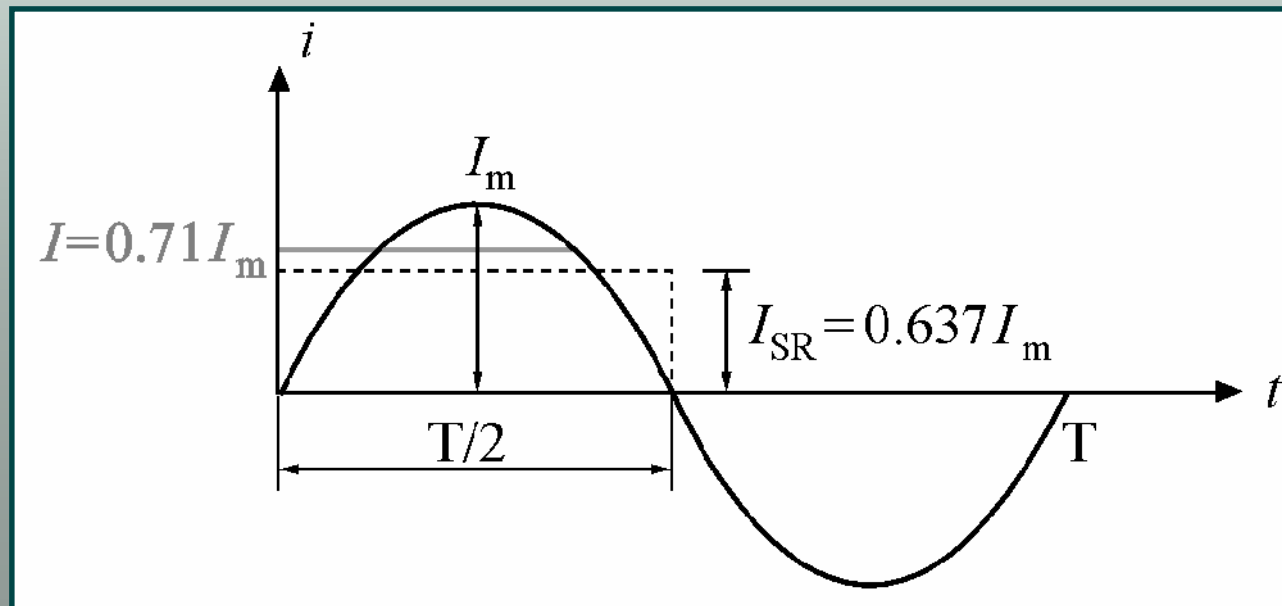
$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$$

- **Instrumenti ne mogu meriti trenutnu vrednost promenjive struje**
- **Poređenje sa jednosmernom strujom – na osnovu toplotnog dejstva**
- **EFEKTIVNA VREDNOST** naizmenične struje je veličina one jednosmerne struje, koja na omskom otporu, za određeno vreme, razvije istu toplotnu energiju kao i posmatrana naizmenična struja
- **INSTRUMENTI MERE EFEKTIVNU VREDNOST** naizmenične struje i napona

## SREDNJA VREDNOST prostoperiodi ne veli ine

- Poređenje sa jednosmernom strujom – na osnovu protokle količine naelektrisanja
- Srednja vrednost naizmenične struje, u toku jedne periode:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{I_m}{T} \left[ \frac{-\cos(\omega t + \varphi_0)}{\omega} \right]_0^T = 0$$





# Predstavljanje prostoperiodi nih veli ina

**Parametri koji određuju prostoperiodičnu veličinu su:**

- ✓ **amplituda (efektivna vrednost)**
- ✓ **učestanost (kružna učestanost)**
- ✓ **početna faza**

**U kolima prostoperiodične struje, sve veličine imaju istu frekvenciju, pa su za opisivanje svake od naizmeničnih prostoperiodičnih veličina dovoljna dva parametra:**

- 1. AMPLITUDA (efektivna vrednost) i**
- 2. POČETNA FAZA**

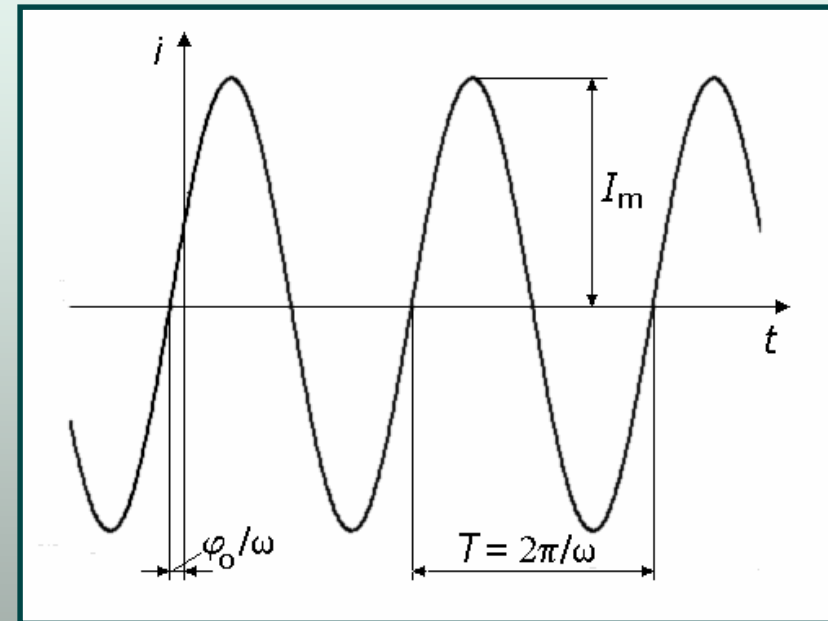
**Načini za predstavljanje naizmeničnih veličina su:**

- **vremensko (trigonometrijsko)**
- **fazorsko (geometrijsko)**
- **kompleksno (aritmetičko)**

## ➤ Vremensko predstavljanje prostoperiodi nih veli ina

- Analitičko prikazivanje pomoću trigonometrijskih funkcija
- Sinusna naizmenična struja, predstavlja se trigonometrijskim izrazom:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



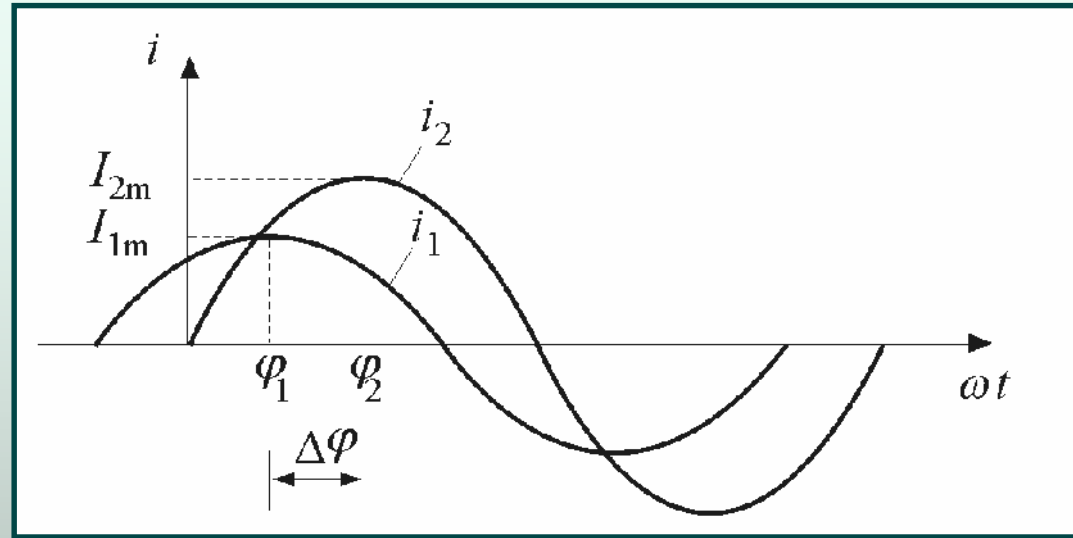
- ❑ Prednost: prava predstava o talasnom obliku struje
- ❑ Nedostatak: nepraktičnost u primeni (već i kod relativno jednostavnih konfiguracija kola trigonometrijski izrazi postaju isuviše komplikovani ili se ne mogu dalje transformisati)
- ❑ Glavni razlog uvođenja simboličkih prezentacija za naizmenične sinusoidne veličine

▪ **Primer sabiranja vrmenskog oblika dve prostoperiodične struje:**

$$i_1(t) = I_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)$$

$$i_2(t) = I_{2m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$



$$i(t) = I_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + I_{2m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) =$$

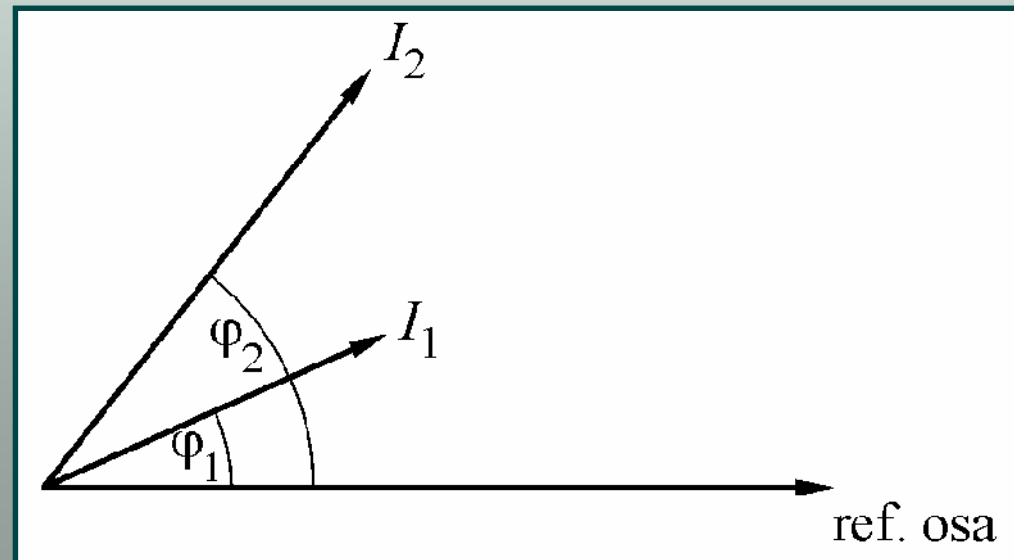
$$= I_{1m} [\sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1] + I_{2m} [\sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2] =$$

$$= \sin \omega t \cdot [I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2] + \cos \omega t \cdot [I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2]$$

## ➤ Predstavljanje pomo u fazora (obrotnih vektora u ravni)

- Geometrijski prikaz fazorima - svakoj naizmeničnoj veličini dodeljuje se jedan obrtni vektor (fazor)
- INTENZITET VEKTORA - određen efektivnom vredošću prostoperiodične veličine
- POLOŽAJ VEKTORA u odnosu na referentnu osu - određuje početnom fazom te veličine

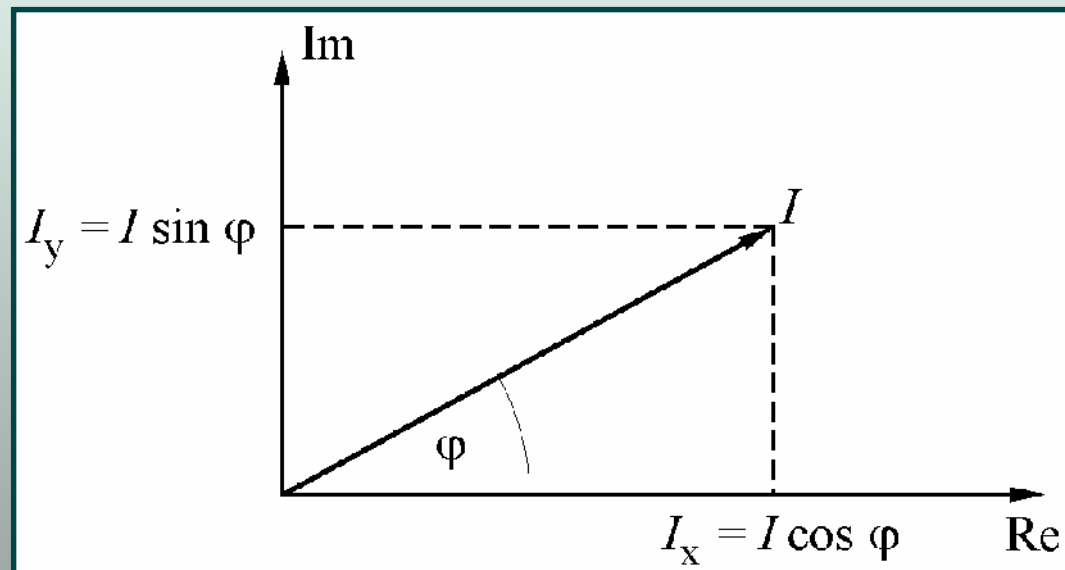
- ❑ Prednost: jednostavno rešavanje kola
- ❑ Nedostatak: nedovoljno jasna predstava o stvarnom talasnom obliku



## ➤ **Kompelksno predstavljanje prostoperiodi nih veli ina**

### ▪ **Predstavljanje fazora pomoću dve koordinate:**

- **realne - projekcije na apscisi (realnoj osi)**
- **imaginarne - projekcije na odrinati (imaginarnoj osi)**



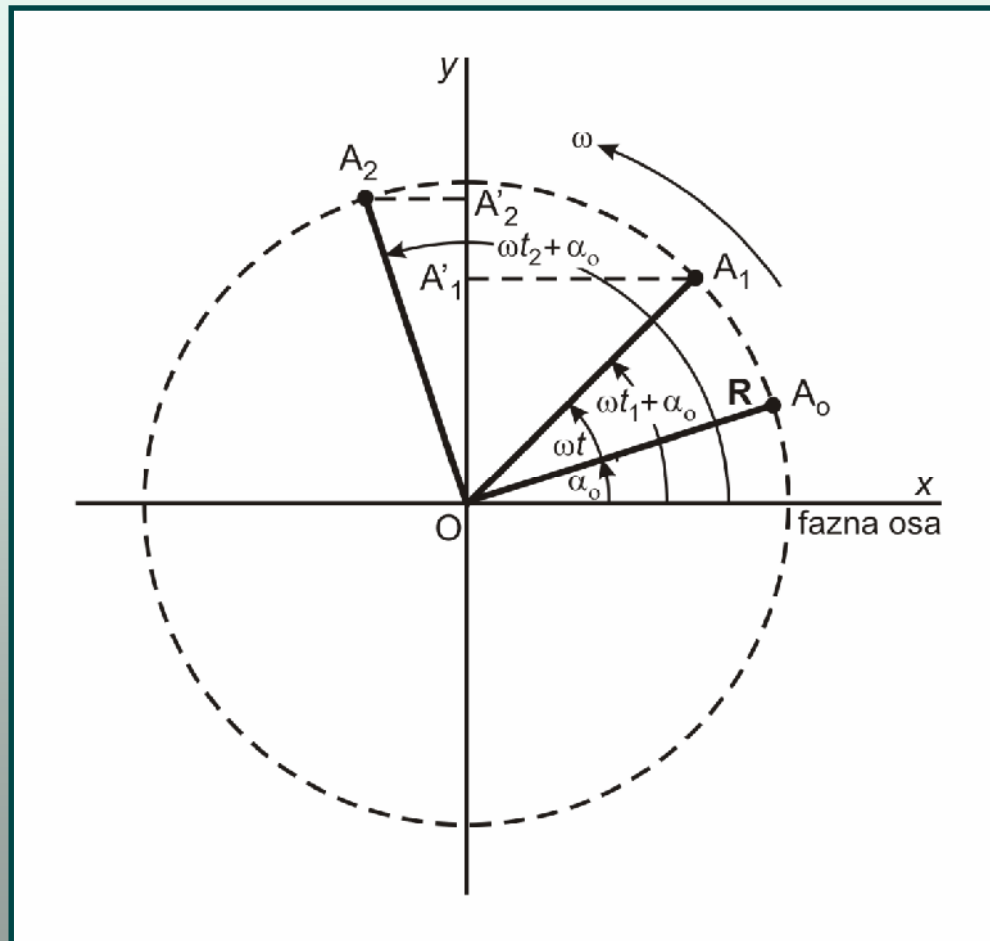
$$\underline{I} = I_x + j \cdot I_y$$

$$\underline{I} = I \cos \varphi + j \cdot I \sin \varphi$$

- ❑ **Prednost: jednostavno rešavanje kola**
- ❑ **Nedostatak: nejasna predstava o stvarnom talasnom obliku**

## Predstavljanje pomo u fazora:

- Vektor  $R$  obrće se u ravni crteža oko svog početka  $O$ , stalnom ugaonom brzinom  $\omega$



- U trenutku  $t = 0$  vektor sa osom  $x$  zaklapa ugao  $\alpha_0$  (položaj  $OA_0$ )

- Posle vremena  $t_1$  vektor se nalazi u položaju  $OA_1$  i njegova projekcija na  $y$  osu je:

$$OA'_1 = R \cdot \sin(\omega t_1 + \alpha_0)$$

- U trenutku  $t_2$  vektor se nalazi u položaju  $OA_2$  i njegova projekcija je:

$$OA'_2 = R \cdot \sin(\omega t_2 + \alpha_0)$$

- Projekcija obrtnog vektora na  $y$  osu menja se po sinusnom zakonu

- **Naizmenični napon:  $u = U_m \sin (\omega t + \varphi_0)$  može se predstaviti obrtnim vektorom, čija je:**
  - **dužina  $U_m$**
  - **ugaona brzina obrtanja  $\omega$**
  - **početni ugao  $\varphi_0$**
- **Osa x od koje se mere uglovi naziva se FAZNA OSA**
- **Ako je početna faza napona jednaka nuli ( $\varphi_0 = 0$ ):**  
$$u = U_m \sin \omega t$$

**početni položaj obrtnog vektora je na x osi**
- **Pozitivan smer za uglove je suprotan kretanju kazaljke na satu**
- **Projekcija tog vektora na y osu, u svakom trenutku, predstavlja trenutnu vrednost napona  $u$**

- **Vektori u ravni, koji su određeni sa dve koordinate, nazivaju se FAZORI**
- **Označavaju se istim slovima kao i veličine koje predstavljaju, ali sa crtom iznad slova**
- **Naizmenični napon:  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$**

fazor:  $\bar{U}$

označavanje:  $\bar{U} = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$

- $U_m$  - dužina (modul) fazora
- $\omega t + \varphi_0$  - ugao fazora prema faznoj osi (argument fazora) u posmatranom trenutku



## Rešavanje kola naizmeni ne struje primenom fazora:

- Primer: odrediti struju generatora na koji su paralelno priključena dva potrošača, čiji su analitički izrazi:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$$

Neka važi:  $\psi_1, \psi_2 > 0$  i  $\psi_1 > \psi_2$

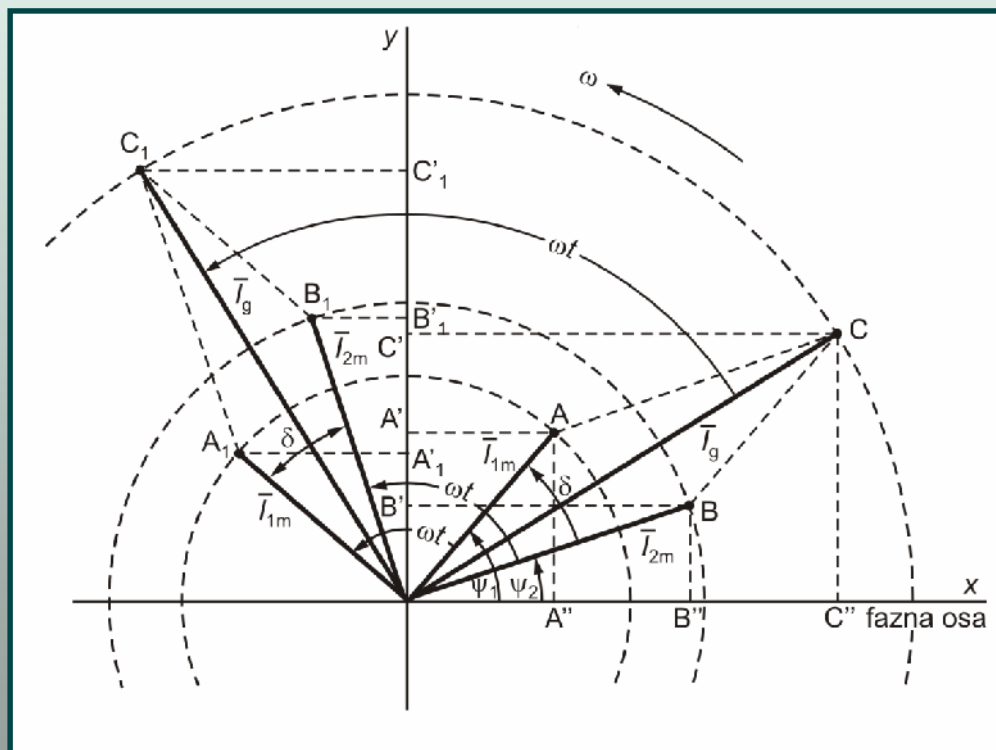
- Dužine fazora su  $I_{1m}$  i  $I_{2m}$  (u usvojenoj razmeri)

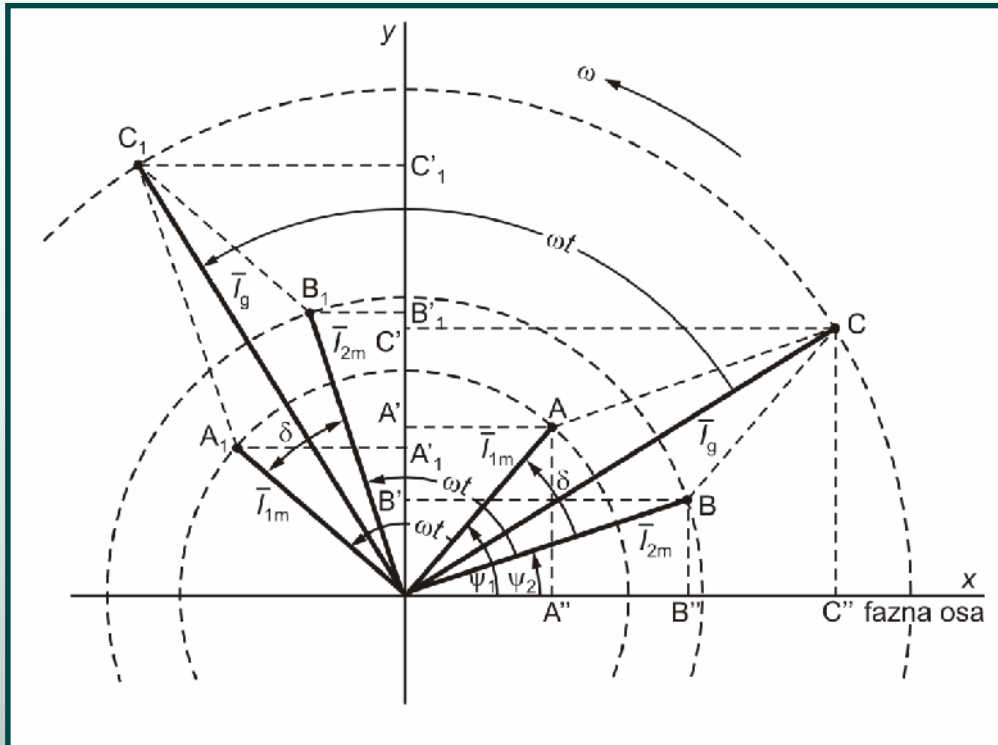
- U  $t = 0$  Fazor  $\bar{I}_1$  zaklapa sa faznom osom ugao  $\psi_1$ , a fazor  $\bar{I}_2$  ugao  $\psi_2$

- Ugao između fazora  $\bar{I}_1$  i  $\bar{I}_2$  je fazna razlika:

$$\delta = \psi_1 - \psi_2$$

- Projekcije  $OA'$  i  $OB'$  ovih fazora na  $y$  osu su trenutne vrednosti struja  $i_1$  i  $i_2$  u početnom trenutku





- Da bi se odredila struja:

$$i_g = i_1 + i_2$$

potrebno je sabrati fazore  $\bar{I}_1$  i  $\bar{I}_2$

- Po pravilima vektorskog sabiranja dobija se fazor

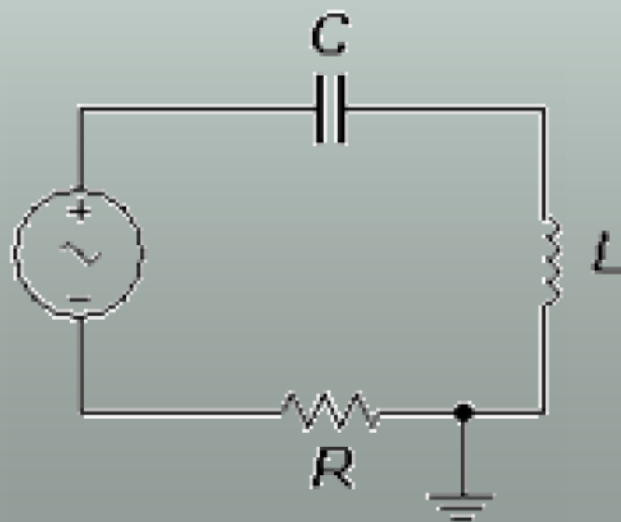
$$\bar{I}_g = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

predstavljen vektorom OC

- Kada se sabiraju dva fazora, naizmeničnih veličina iste učestanosti, dovoljno je nacrtati ih u početnom položaju i vektorski ih sabrati
- Kako se ovi fazori obrću istom ugaonom brzinom, to će se i rezultatni fazor obrtati tom istom brzinom (imaće istu  $\omega$ )
- Dužina rezultatnog fazora predstavlja maksimalnu vrednost dobijene veličine, a njenu početnu fazu daje nagib rezultujućeg fazora prema faznoj osi

- Skup nacrtanih fazora koji karakteriše neki proces u kolu naziva se **FAZORSKI DIJAGRAM**
- Za predstavnike naizmeničnih veličina češće se uzimaju **FAZORI ČIJE SU DUŽINE JEDNAKE EFEKTIVNIM VREDNOSTIMA**
- Za crtanje fazorskih dijagrama nije neophodno znati početne faze svih veličina, već samo njihove fazne razlike u odnosu na jednu, (bilo koju) od njih
- Crtanje fazorskog dijagrama počinje se od fazora prema kome su poznate fazne razlike, a ostali fazori crtaju se prema njemu
- Početni fazor može se postaviti horizontalno (na faznu osu), jer se time ništa ne menja (sve dužine fazora i uglovi koje oni zaklapaju ostaju isti, dijagram se samo rotirao za neki ugao)

# ELEKTRI NA KOLA NAIZMENI NE STRUJE



## **Određivanje struje kola**

- **Određivanje naizmjenične struje - izračunavanje osnovnih parametara naizmjenične veličine:**

- amplitude  $I_m$  (ili efektivne vrednosti  $I$ ) i
- faze  $\varphi$

**kada su poznati napon na krajevima kola i karakteristike kola**

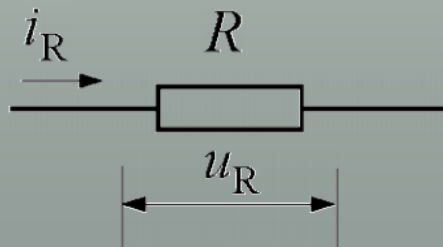
- **U električnim kolima električni rad se pretvara u toplotu**
- **U prostoru u kome se kolo nalazi, postoje i električno i magnetno polje**
- **Ako se ta polja menjaju, vršice se pretvaranje:**
  - električnog rada u energije polja ili
  - pretvaranje energija polja u električni rad u kolu,**zavisno od toga, da li polja jačaju ili slabe**

# Termogeni otpornici

- Elementi kola u kojima je naročito ispoljeno pretvaranje električnog rada u toplotu, a ostale se pojave mogu zanemariti
- Veličina koja ih karakteriše je termogena (omska) otpornost  $R$
- Zbog pretvaranja električnog rada u toplotu, na ovim elementima se javlja elektrootporna sila:

$$u_R = R \cdot i$$

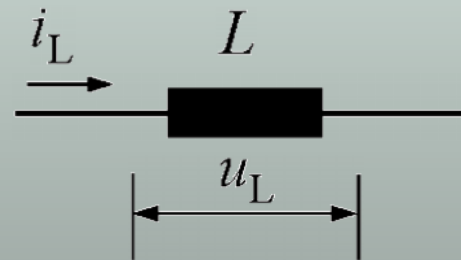
- Ona se menja po istom zakonu kao i struja i ima suprotan smer od struje:



# Kalemovi

- Elementi kola u kojima je naročito ispoljeno pretvaranje električnog rada u magnetnu energiju i obratno, dok se ostale pojave mogu zanemariti
- Karakteristika ovih elemenata je induktivnost, ili koeficijent samoindukcije,  $L$  (konstantna veličina, ako kalem ne menja oblika i ako ne sadrži feroamgnetno jezgro)
- Zbog stalne promene struje u kolu sa induktivnim kalemom, javlja se ems samoindukcije:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

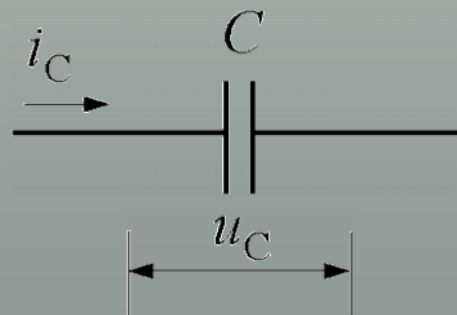


- Smer joj je takav, da teži da spreči promene struje u kolu
- Kod nekih kalemova ne može se zanemariti Džulov efekt i tada pored induktivnosti  $L$ , treba uzeti u obzir i njihovu termogenu otpornost  $R$

# Kondenzatori

- Elementi kola u kojima se vrši pretvaranje električnog rada u elektrostatičku energiju i obratno, a ostale pojave mogu se zanemariti
- Njihova karakteristika je kapacitet  $C$
- Ako je dielektrik kondenzatora savršen, pri smanjivanju električnog polja, sva elektrostatička energija, koju je kondenzator primio pri opterećivanju, vraća se kolu
- Opterećen kondenzator ima *ems*  $Q/C$  i ona deluje u kolu u kome se kondenzator nalazi i menja se po istom zakonu kao i opterećenost kondenzatora  $Q$ , a smer joj je suprotan od smera opterećivanja kondenzatora
- Napon na kondenzatoru:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

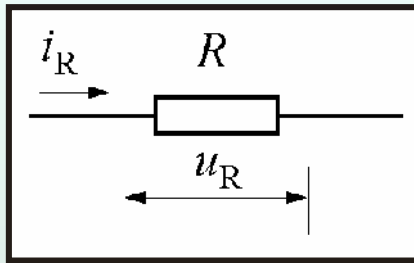




**U kolima naizmenične struje dešavaju se iste pojave kao i u kolima jednosmerne struje, pa se pri proučavanju napona u njima mogu primenjivati isti fizički principi**

**Razlika je samo u posebnim uslovima, jer se u kolima naizmenične struje intenzitet pojava stalno menja, a zakoni se primenjuju na trenutne vrednosti naizmeničnih veličina**

# Prosto kolo sa termogenom otpornoš u R



$$i = I_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$u = R \cdot i$$

$$u = R \cdot I_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta + \varphi)$$

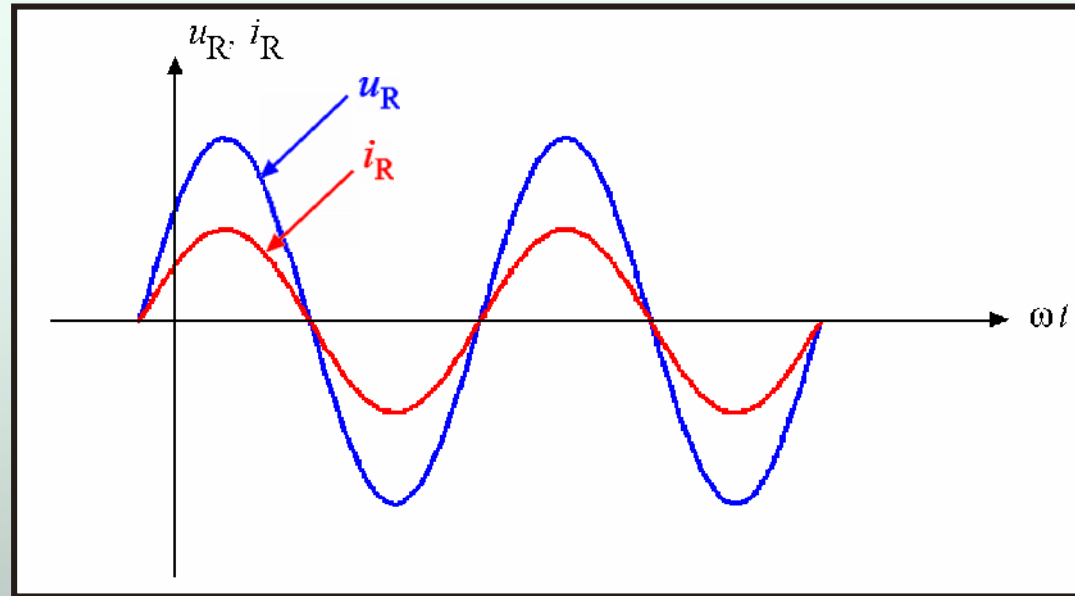


$$U_m = R \cdot I_m / \sqrt{2}$$

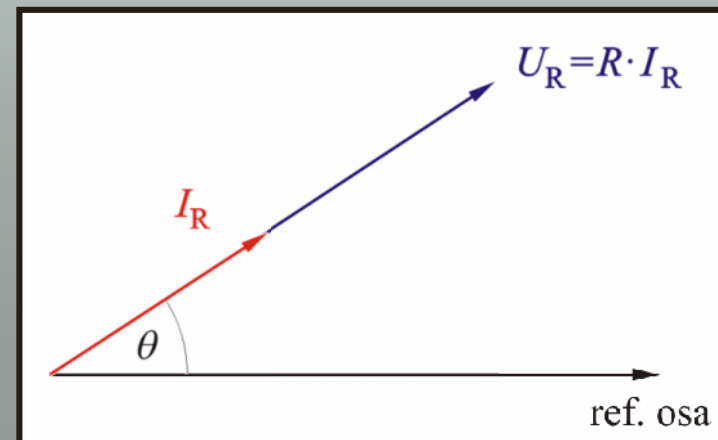
$$U = R \cdot I$$

$$\varphi = 0$$

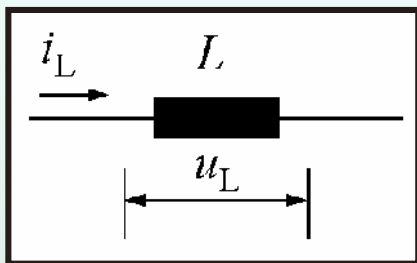
**NAPON I STRUJA SU U FAZI**



$\varphi$  - ugao između napona i struje  
(napon prednjači u odnosu na struju)



# Prosto kolo sa kalemom induktivnosti $L$



$$i = I_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$u = L \cdot \frac{d(I_m \sin(\omega t + \theta))}{dt}$$

$$u = \omega L \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

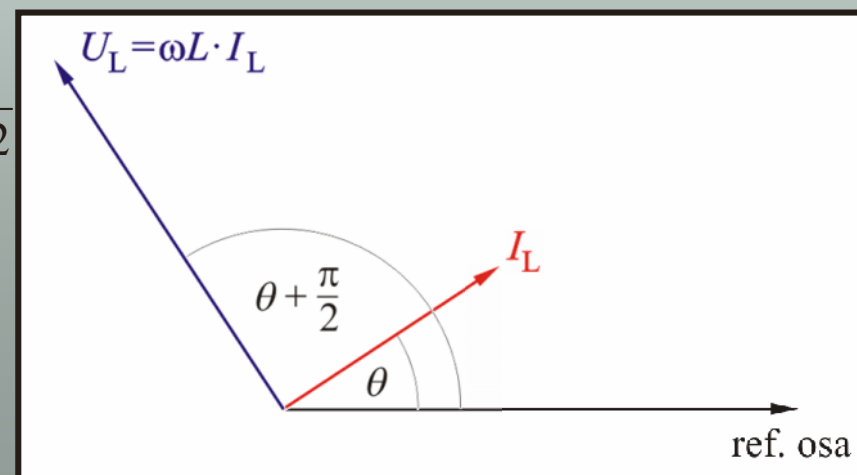
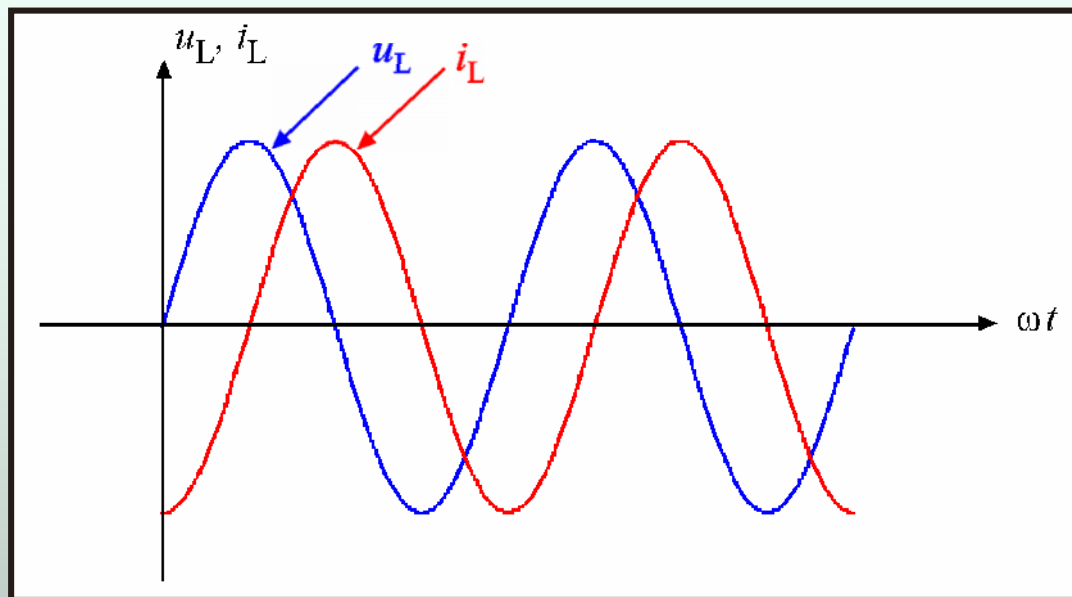
$$u = \omega L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \quad \left. \vphantom{u = \omega L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})} \right\} U_m = \omega L \cdot I_m \quad / \sqrt{2}$$

$$u = U_m I_m \sin(\omega t + \theta + \varphi)$$

$$U = X_L \cdot I$$

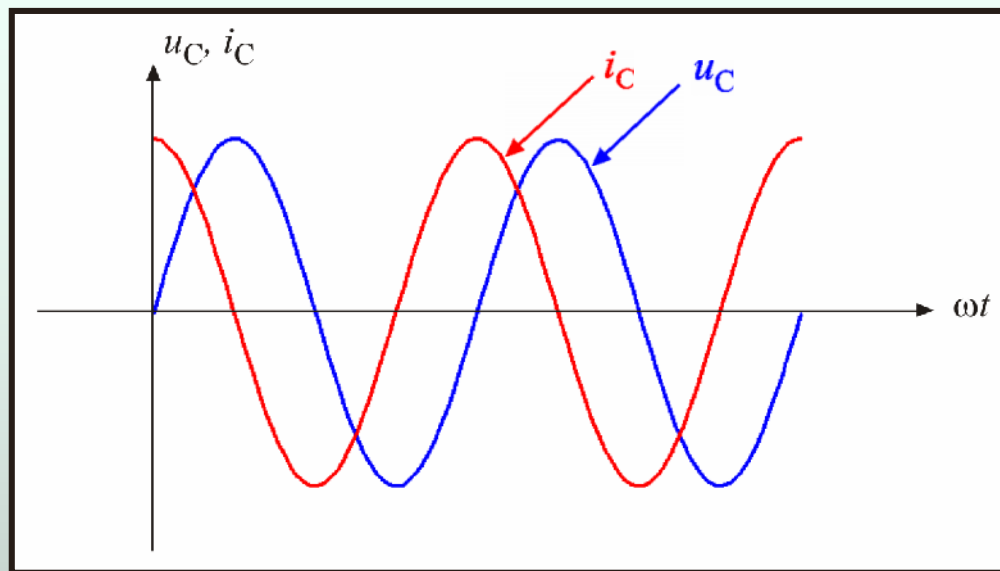
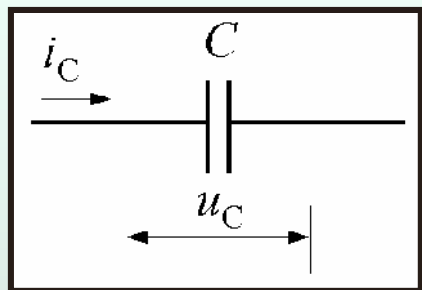
$$X_L = \omega \cdot L$$

$$\varphi = 90^\circ$$



**NAPON PREDNJAČI U ODNOSU NA STRUJU ZA  $90^\circ$**

# Prosto kolo sa kondenzatorom kapacitivnosti C



$$i = I_m \sin(\omega t + \theta)$$

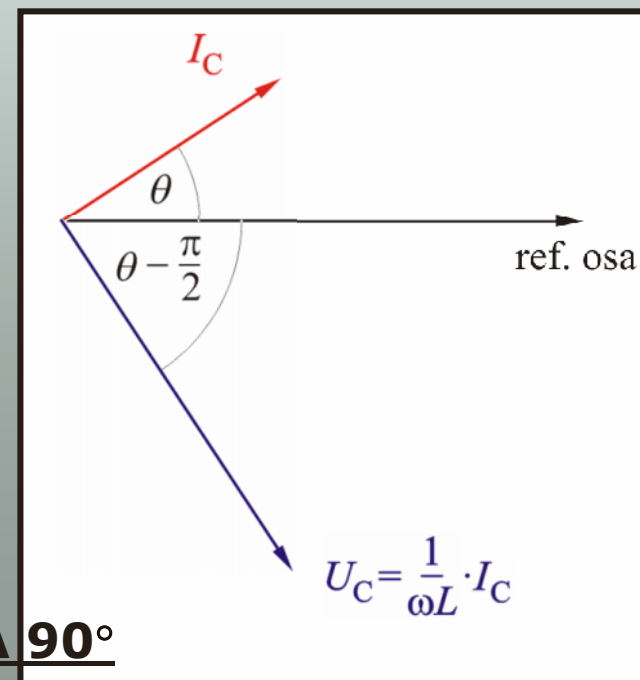
$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \sin(\omega t + \theta) dt$$

$$u_C = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega} (-\cos(\omega t + \theta))$$

$$u_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}) \quad \left. \begin{array}{l} U_m = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \quad / \sqrt{2} \\ U = X_C \cdot I \quad \left[ X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \right] \\ \varphi = -90^\circ \end{array} \right\}$$

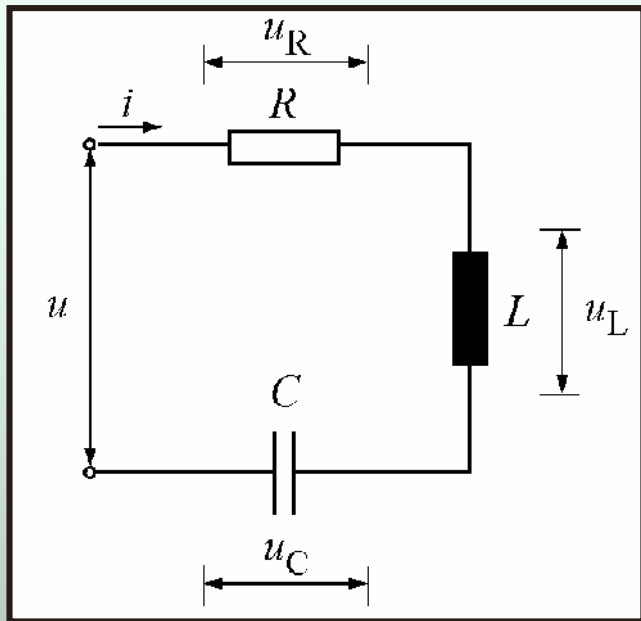
$$u = U_m I_m \sin(\omega t + \theta + \varphi)$$



**NAPON ZAOSTAJE U ODNOSU NA STRUJU ZA 90°**

Vrsta elementa	Trenutne vrednosti	Efektivne vrednosti	Fazni stav
$R$	$u = R \cdot i$	$U = R \cdot I$	$\varphi = 0$
$L$	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = X_L \cdot I$ $X_L = \omega \cdot L$	$\varphi = 90^\circ$
$C$	$i = C \frac{du}{dt}$	$U = X_C \cdot I$ $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\varphi = -90^\circ$

# Redno RLC kolo



Neka je napon na ulazu kola:

$$u = U_m \sin \omega t$$

Struja u zatvorenom strujnom kolu:

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\left. \begin{aligned} u_R &= R \cdot i \\ u_L &= L \frac{di}{dt} \\ u_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i dt \end{aligned} \right\} u = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

Zamenom izraza za napone na elementima kola:

$$U_m \sin \omega t = R \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) + \omega L \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) - \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad / \sqrt{2}$$

$$U \cdot \sin \omega t = R \cdot I \cdot \sin(\omega t - \varphi) + \omega L \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi) - \frac{1}{\omega C} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

## Rastavljanjem *sin* i *cos* uglova:

$$U \cdot \sin \omega t = RI \cdot [\sin \omega t \cdot \cos \varphi - \cos \omega t \cdot \sin \varphi] + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot I \cdot [\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi]$$

## Grupisanjem i upoređivanjem članova uz *sin* $\omega t$ i *cos* $\omega t$ :

$$U = \left[ R \cdot \cos \varphi + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \sin \varphi \right] \cdot I \quad (1)$$

$$0 = \left[ R \cdot \sin \varphi + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \cos \varphi \right] \cdot I \quad (2)$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow U = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot I$$
$$U = Z \cdot I$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

**Z - prividna otpornost (impedansa)**

$$(2) \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

$\varphi$  – fazna razlika napona i struje

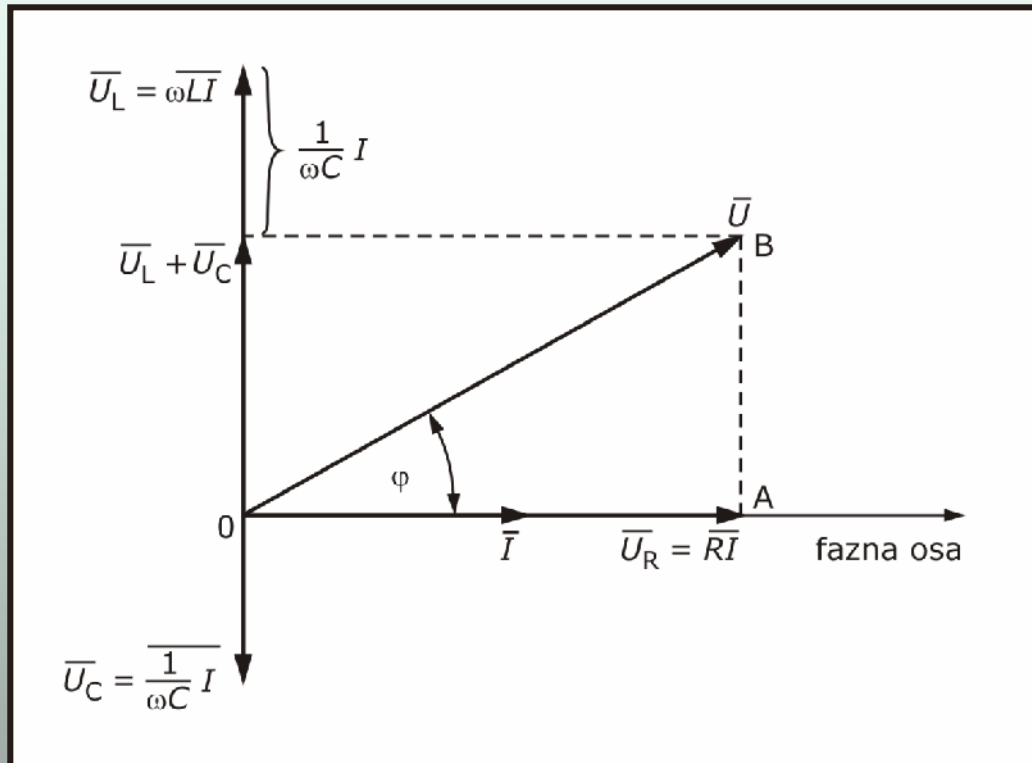
$$X = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \text{reaktivna otpornost (reaktansa)}$$

$$X_L = \omega \cdot L \quad \text{induktivna otpornost (reaktansa)}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \text{kapacitivna otpornost (reaktansa)}$$

## Fazorski dijagram:

- Poznate su fazne razlike pojedinih napona prema struji - fazor struje postavlja se na faznu osu



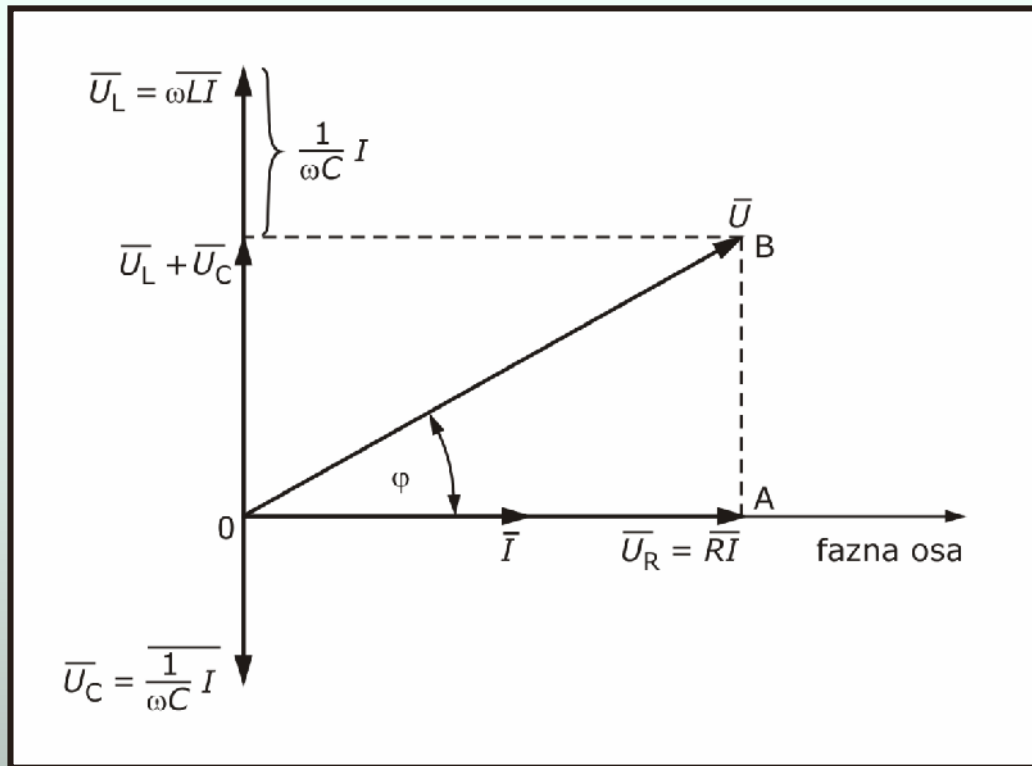
- Napon na otporniku u fazi je sa strujom
- Napon na kalemu fazno prednjači ispred struje za  $\pi/2$
- Napon na kondenzatoru fazno zaostaje iza struje za  $\pi/2$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$$

- Iz pravouglog trougla  $OAB$  sledi:  $U^2 = R^2 I^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I^2$

odakle je:  $\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$





- Iz posmatranog trougla neposredno se može izračunati i fazna razlika između napona i struje:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

- Prethodni dijagram nacrtan je pod pretpostavkom da je kolo pretežno induktivno:  $X_L > X_C$
- Ako je kolo pretežno kapacitivno:  $X_C > X_L$ 
  - fazor napona  $U$  biće ispod fazne ose (kasniće fazno za strujom za ugao  $\varphi$ )
  - ugao  $\varphi$  će biti negativan (što se vidi i iz izraza za  $\operatorname{tg} \varphi$ )

# Reaktivna otpornost

- Razlika  $X_L - X_C = X$  naziva se reaktivna otpornost (reaktansa)
- Reaktivna otpornost  $X$  može biti i pozitivna i negativna, u zavisnosti od toga da li je kolo pretežno induktivno ili pretežno kapacitivno
- Predznak reaktivne otpornosti nema uticaja na znak impedanse  $Z$ , ali utiče na znak fazne razlike  $\varphi$
- $X_L$  i  $X_C$  ne zavise samo od parametara  $L$ , odnosno  $C$ , već i od učestanosti priključenog napona
  - sa povećanjem  $\omega$ ,  $X_L$  raste, a  $X_C$  opada
  - kod jednosmerne struje  $\omega = 0$ , pa  $X_L = 0$ , a  $X_C = \infty$

# Rezonanca

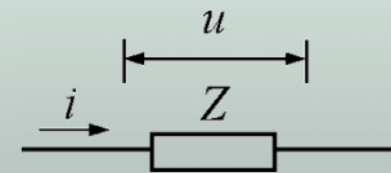
- Kada je  $X_L = X_C$  reaktivna otpornost je nula, impedansa ima najmanju vrednost  $Z_{\min} = R$ , a struja u kolu je maksimalna i kaže se da u kolu postoji FAZNA REZONANCA
- Ako je otpornost kola zanemarljivo mala ( $R \approx 0$ ), impedansa kola je  $Z \approx 0$ , a struja postaje veoma velika ( $I \rightarrow \infty$ ) - u tom slučaju u kolu postoji prava REZONANCA
- U slučaju fazne rezonance, zbog velike struje, na kalemu i kondenzatoru mogu nastupiti vrlo veliki naponi (prenaponi), **znatno veći od priključenog napona** na krajevima kola i to može dovesti do oštećenja izolacije kalema, kao i do proboja dielektrika kondenzatora

# Snaga u kolu naizmenične struje

- Snaga generatora i snaga prijemnika naizmenične struje – mogu biti i pozitivne i negativne
  - snaga prijemnika negativna – generator
  - snaga generatora negativna – prijemnik

- Pored trenutne snage definišu se:

- srednja (aktivna) snaga
- reaktivna snaga
- prividna snaga



- Neka su trenutne vrednosti struje i napona prijemnika impedanse  $Z$ :

$$i(t) = I_m \sin \omega t$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- Trenutna vrednost snage koju prima prijemnik:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

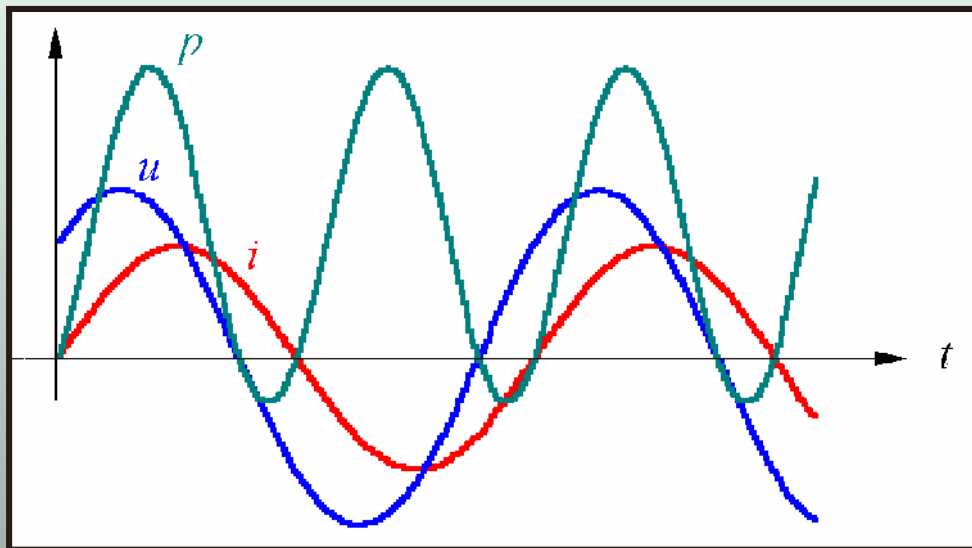
$$p(t) = 2 \cdot UI \cdot \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi)$$

➤ **Uvodeći trigonometrijsku transformaciju:**

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

**dobija se  
izraz:**

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$



**konstantna  
komp.**

**naizmjenična  
komp.**

- **U intervalima vremena:**  $u$  i  $i$  istog znaka  $p(t) > 0$   
 $u$  i  $i$  suprotnog znaka  $p(t) < 0$
- **U delu periode:** - prima energiju od izvora – potrošač  
- daje energije izvoru – generator

# Aktivna (srednja) snaga

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} UI \left[ \cos \varphi \cdot t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \varphi) \right] \Big|_0^T$$

$$P = \frac{1}{T} UI \cdot \left[ \cos \varphi \cdot T - \frac{1}{2\omega} \sin\left(\frac{4\pi}{T} T + \varphi\right) + \frac{1}{2\omega} \sin\left(\frac{4\pi}{T} 0 + \varphi\right) \right]$$

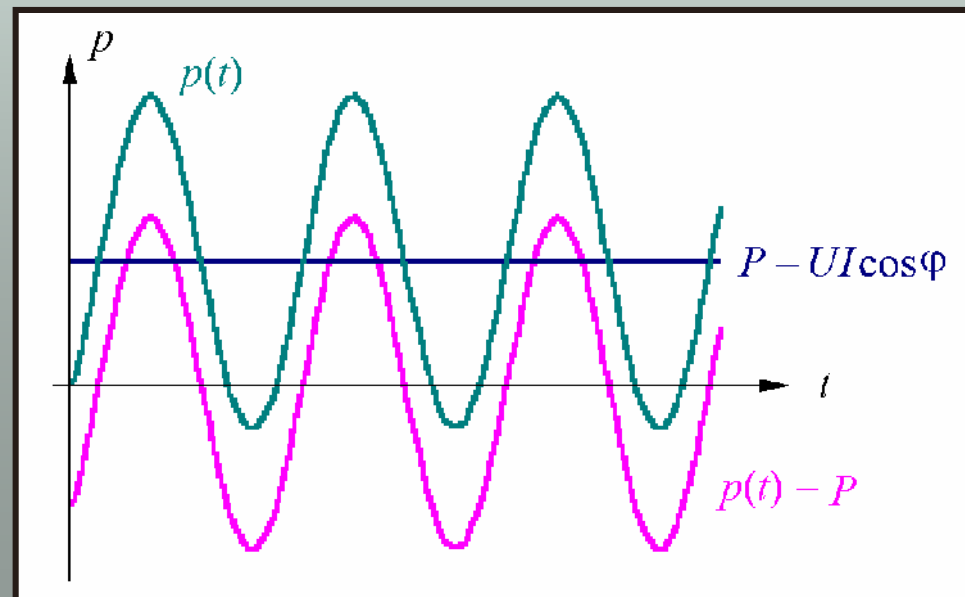
$$P = \frac{1}{T} UI \cdot \left[ \cos \varphi \cdot T - \frac{1}{2\omega} \cos \varphi + \frac{1}{2\omega} \cos \varphi \right]$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

[W]

**Aktivna (srednja snaga)**

- Za  $|\varphi| \leq \pi/2$  aktivna snaga prijemnika uvek je pozitivna i veća je što je veći  $\cos \varphi$  (manji ugao  $\varphi$ )
- Trenutna snaga osciluje oko srednje snage



# Reaktivna snaga

- **Maksimalna snaga povratnih procesa**
- **Veličina definisana izrazom:**

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad [\text{VAR}] \text{ ili } [\text{VAr}]$$

- **Reaktivna snaga menja znak sa promenom znaka fazne razlike  $\varphi$** 
  - **kada je pozitivna (pretežno induktivni prijemnici,  $\varphi > 0$ ) kaže se da izvor daje reaktivnu snagu kolu**
  - **kada je negativna (pretežno kapacitivni prijemnici,  $\varphi < 0$ ) kaže se da kolo daje reaktivnu snagu izvoru**
- **Reaktivna energija je deo energije koji se vraća izvoru (nepovoljna pojava u kolima naizmjenične struje)**

# Prividna snaga

- **Prividna snaga definiše se kao proizvod efektivnih vrednosti napona i struje:**

$$S = U \cdot I \quad [\text{VA}]$$

- **Prividna snaga je važna veličina, koja se navodi za mnoge električne mašine i aparate**
- **Granična snaga mašine - jer se one izrađuju za određene napone i struje, koje mogu izdržati bez kvara, pri trajnom radu**



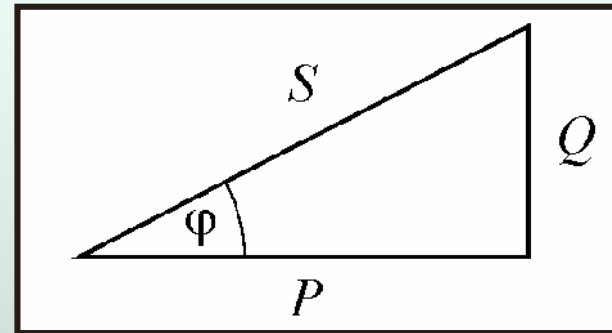
➤ **Između prividne, aktivne i reaktivne snage postoji odnos:**

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = R \cdot I^2$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = X \cdot I^2$$

$$S = U \cdot I = Z \cdot I^2$$



**TROUGAO SNAGA**

- **Aktivna snaga se izražava u vatima (W) ili kilovatima (kW)**
- **Prividna snaga u voltamperima (VA) ili kilovoltamperima (kVA)**
- **Reaktivna snaga u reaktivnim voltamperima ili varima (var) ili kilovarima (kvar)**

**Ove tri jedinice međusobno su dimenzionalno jednake**

# Faktor snage i faktor reaktivnosti

- Faktor snage je vrlo važna veličina u praktičnim primenama električnih mašina i aparata, kao i u prenosu i distribuciji električne energije (mera energetske kvaliteta)
- Definiše se kao odnos između aktivne i prividne snage:  $k = \frac{P}{S}$
- Kada se napon i struja menjaju po sinusnom zakonu, faktor snage je:

$$k = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$$

Vrednosti faktora snage kreću se od 1 do 0, jer se fazna razlika  $\varphi$  može menjati od 0 do  $\pm \pi/2$

- Faktor reaktivnosti je odnos između reaktivne i prividne snage:

$$k_r = \frac{Q}{S}$$

- Kada se napon i struja menjaju po sinusnom zakonu, faktor reaktivnosti je:

$$k_r = \frac{UI \sin \varphi}{UI} = \sin \varphi$$