I Fizičke veličine i jedinice

Fizičke veličine se izražavaju *brojem* i *jedinicom*. Jedinica za neku veličinu x se označava sa [x]. Čestu grešku na ispitima i kolokvijumima predstavlja izsotavljanje odgovarajuće jednice. Treba razvijati naviku neprestanog pisanja jedinica u toku izrade zadatka. U početku to studentima predstavlja teškoću, ali se navika brzo stiče (a sa njom i poeni).

Od 1980. godine u Jugoslaviji je na snazi SI sistem jedinica, i rezultati zadataka moraju biti izraženi isključivo u ovom sistemu jedinica, jer je on jedini koji je dozvoljeno koristiti u inženjerskoj praksi.

Svođenje izvedenih jedinica na osnovne jedinice SI

U zadacima sa ovom temom potrebno je izvedene jedinice SI izraziti preko osnovnih jedinica SI sistema, a to su: metar (m), sekund (s), kilogram (kg), amper (A), kelvin (K), mol i kandela (cd). Za izražavanje izvedenih jedinica preko osnovnih potrebno je poznavati jednačine za veličinu koju izražavamo izvedenom jedinicom, i osnovna pravila stepenovanja iz matematike:

$$x^{-a} = 1/x^a \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad (xy)^a = x^a \cdot y^a \quad (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Rešeni zadaci:

1. *Jedinicu za silu izraziti preko osnovnih jedinica SI.*

   Rešenje:

Jedinica za silu SI je njutn (oznaka N). Jedna od jednačina za silu (oznaka F) je drugi Njutnov zakon: $F = m \cdot a$. Jedinica za masu (m) je kilogram, i to je osnovna jedinica SI, a jedinica za ubrzanje (a) u SI je $m/s^2 = m \cdot s^{-2}$, i izražena je preko osnovnih jedinica SI metra i sekunde. Prema prethodnom je $N = [F] = [m \cdot a] = [m] \cdot [a] = kg \cdot m \cdot s^{-2}$.

2. *Jedinicu za rad izraziti preko osnovnih jedinica SI.*

   Rešenje:

Jedinica za rad u SI je džul (oznaka J). Jedna od jednačina za rad (oznaka A) je jednačina za rad sile (F) duž nekog puta (s): $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Jedinica za silu je njutn, i prema prethodnom zadatku $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$. Jedinica za pređeni put je metar (m), pa je $J = [A] = [F] \cdot [s] = N \cdot m =$ $= kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$.

Zadaci za samostalnu vežbu:

3. *Jedinicu za snagu izraziti preko osnovnih jedinica SI.*

   Rešenje: $W = kg \cdot m^2 s^{-3}$

4. *Jedinicu za pritisak izraziti preko osnovnih jedinica SI.*

   Rešenje: $Pa = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

Dimenziona analiza

Dimenzije (jedinice) leve i desne strane jednačine moraju biti jednake. Zadatak dimenzione analize je da se na osnovu ove činjenice izvedu određeni zaključci. Tipični zadaci dimenzione analize su provera ispravnosti neke jednačine i određivanje jedinica fizičkih veličina.

Rešeni zadaci

5. *Da li je moguće da formula za neki vremenski period (T) glasi* $T = \pi \cdot \sqrt{l/a}$ *gde je sa l označena neka dužina, a sa a neko ubrzanje ?*

   Rešenje:

Jedinica za veličinu sa leve strane jednačine je [T] = s. Jedinica desne strane jednačine je $[\pi\cdot\sqrt{l/a}] = [\pi]\cdot[\sqrt{l/a}]$; matematičke konstante (π,e,…) su neimenovani brojevi, i imaju dimenziju 1, pa je [π] = 1, dok je $[\sqrt{l/a}] = [(l/a)^{1/2}] = [l^{1/2}\cdot a^{-1/2}] = m^{1/2}\cdot(m\cdot s^{-2})^{-1/2} =$ $= m^{1/2}\cdot m^{-1/2}\cdot s = = s$ pa i leva i desna strane jednačine imaju iste jedninice, te je sa te strane formula moguća.

6. *Odrediti dimenziju (prirodu, jedinice) veličine h u barometarskoj jednačini koja glasi:* $p = p_0\cdot e^{-M\cdot g\cdot h/R\cdot T}$, *gde je sa M označena molarna masa, sa g ubrzanje Zemljine teže, sa R univerzalna gasna konstanta čija je jedinica J/K, a sa T temperatura.*

   Rešenje:

Argumenti transcedentnih funkcija, (trigonometrijske, eksponencijalna, logaritamska,…) moraju imati bezdimenzione veličine, pa mora biti [M·g·h/R·T] = 1, odnosno mora biti $[h] = [RT/Mg] = [R]\cdot[T]/[M]\cdot[g] = (J/K)\cdot K/kg\cdot(m/s^2) = J\cdot K^{-1}\cdot K\cdot kg^{-1}\cdot m^{-1}\cdot s^2 = J\cdot kg^{-1}\cdot m^{-1}\cdot s^2$. Kako je pokazano u zadatku 2, $J = kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$. Prema tome $[h] = kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}\cdot m^{-1}\cdot s^2 = m$, pa je h po prirodi dužina.

Zadaci za samostalnu vežbu:

7. *Primenom dimenzione analize odrediti da li jednačina za centralnu silu može da glasi* $F = m\cdot\omega^2\cdot r$ *ili* $F = m\cdot\omega^2/r$, *gde je sa m označena masa, sa ω ugaona brzina, a sa r poluprečnik rotacije.*

   Rešenje: (Ispravan je oblik $F = m\cdot\omega^2\cdot r$)

8. *Odrediti jedinicu koeficijenta viskoznosti (η) primenom jednačine za viskoznu silu* $\frac{F}{S} = \eta\frac{\Delta v}{\Delta x}$ *u kojoj je sa F označena viskozna sila, sa S kontaktna površina, sa Δv priraštaj brzine, a sa Δx debljina sloja tečnosti.*

   Rešenje: ($kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}$)

Izražavanje veličina datih u jedinicama koje ne pripadaju SI

U praksi se još uvek mogu pronaći podaci koji su izraženi jedinicama van SI i zato je potrebno znati način na koji se ti podaci mogu izraziti u SI. Generalno se te jedinice kategorizuju kao sistemske i nesistemske. Među sistemskim jedinicama postoje međusobne veze koje omogućavaju pretvaranja jednih jedinica u druge, dok se nesistemske jedinice moraju pretvarati preračunavanjem prema njihovoj definiciji.

Rešeni zadaci

9. *Izraziti jedinicu za ugao lučni stepen u SI.*

Rešenje:

Lučni stepen je definisan tako da prav ugao ima 90^0, odnosno opružen ugao 180^0. Prema tome, lučni stepen je nesistemska jedinica, i određuje se preračunavanjem: $180^0 = \pi$ rad => $1^0 = \pi/180$ rad $\approx$ 0,017 rad.

10. *Jedinice za dužinu britanskog sistema izraziti u jedinicama SI sistema.*

Rešenje:

I danas se u praksi (mada sve ređe) sreću jedinice britanskog mernog sistema, pa nije loše poznavati njihove odnose.

Prema zakonu kralja Edvarda II, jedan inč (oznaka: ", koju ne treba mešati sa jedinicom za lučni ugao sekundom) je dužina tri zrna graška poređanog jednog do drugog. Danas je usvojeno da je 1" = 2,54 cm.

Jedna stopa (oznaka ft ili ') se definiše kao 12 inča, pa je 1' = 12" = 30,48 cm.

Jedan jard (oznaka yd) se definiše kao 3 stope, pa je 1 yd = 91,44 cm = 0,9144 m

Za grube procene se uzima da je jedan jard oko jednog metra, a približno usvajajući da je 40 inča jednako jednom metru se pravi greška manja od 2%.

Jedna milja (nema posebnu oznaku) se definiše kao 1760 yd, pa je 1 mile = 1609,344 m.

11. *Jedinice za površinu cm^2 (kvadratni centimetar) i mm^2 (kvadratni milimetar) izraziti u jedinicama SI sistema.*

Rešenje:

U ovom zadatku je važno primetiti da, iako je milimetar deo SI sistema, jedinice koje se dobijaju njegovim stepenovanjem (mm^2, mm^3) to nisu, a na sličan način to nisu ni stepeni drugih multipla (centrimetra, decimetra i drugih).

Prema definiciji kvadratni centimetar je površina koju ima kvadrat stranice jedan centimetar, pa je:

$$1\ cm^2 = (1\ cm)^2 = (10^{-2}\ m)^2 = (10^{-2})^2 \cdot (m)^2 = 10^{-4}\ m^2.$$

Slično tome, kvadratni milimetar je površina koju ima kvadrat stranice jedan milimetar, pa je:

$$1\ mm^2 = (1\ mm)^2 = (10^{-3}\ m)^2 = (10^{-3})^2 \cdot (m)^2 = 10^{-6}\ m^2.$$

12. *Izraziti jedinice za zapreminu kubni centimetar, litar ($1l = 1\ dm^3$) i mililitar i u jedinicama SI.*

Rešenje:

Slično definiciji jedinica za površinu, kubni centimetar se definiše kao zapremina kocke koji ima stranicu dužine 1 cm, pa je

$$1\ cm^3 = (1\ cm)^3 = (10^{-2}\ m)^3 = (10^{-2})^3 \cdot (m)^3 = 10^{-6}\ m^3.$$

Litar je trgovačka jedinica koja se definiše kao zapremina koju ima kocka stranice 1 dm, pa se ta jedinica u tehnici naziva i kubni decimetar (dm^3). Slično prethodnim izvođenjima, važi:

$$1l = 1\ dm^3 = 1 \cdot (10^{-1}\ m)^3 = 10^{-3}\ m^3.$$

Mililitar je jedinica koja se znatno češće koristi u biologiji, hemiji i disciplinama izvedenih iz njih (medicina, farmacija, veterina,...) i definiše se kao hiljaditi deo litra pa je

$$1\ ml = 1\ l / 1000 = 10^{-3}\ m^3 / 10^3 = 10^{-6}\ m^3.$$

Vidi se da je jedan mililitar jednak jednom kubnom centimetru, a kubni centimetar se mnogo češće koristi u tehnici, sa čestom oznakom ccm (primera radi, radna zapremina motora sa unutrašnjim sagorevanjem se često izražava ovom jedinicom).

Napomena: postoji i kolokvijalan izraz "kubik" koji ponekada (u mašinskoj tehnici i medicini) označava kubni centimetar, a u drugim slučajevima (građevinarstvo, rudarstvo) označava kubni metar.

13. Jedinicu za brzinu km/h (kilometar na čas) izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

Pretvaranje jedinica koje uključuju minute i časove se zasniva na definiciji 1 min = 60 s, 1 h = 60 min = 3600 s.

$$1\ km/h = 1\cdot(10^3\ m/3600\ s) = 1/3{,}6\ m/s \approx 0{,}277...\ m/s$$

U praksi je uobičajeno da se pretvaranje brzine izražene u km/h u m/s vrši deljenjem sa 3,6, a ne množenjem sa 0,2777...

14. Jedinicu za ugaonu brzinu ob/min (obrtaj u minuti) izraziti u SI.

Rešenje:

Jedan obrtaj telo načini kada pređe pun ugao, dakle kada pređe ugao od 2π rad, pa je 1 ob/min = (2π rad)/(60 s) = π/30 rad/s.

15. Jedinicu za silu kilopond (kp) izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

Kilopond je definisan kao sila kojom Zemlja privlači teg mase 1 kg. Za srednju vrednost ubrzanja Zemljine teže usvojena je vrednost 9,81 m/s^2. Prema tome, koristeći vezu koju daje drugi Njunov zakon $F = m\cdot a$:

$$1\ kp = 1\ kg\cdot 9{,}81\ m/s^2 = 9{,}81\ kgm/s^2 = 9{,}81\ N.$$

16. Jedinicu za pritisak "tehnička atmosfera" (at) izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

Tehnička atmosfera se definiše kao pritisak koji stvara sila od jednog kiloponda delujući normalno na površinu od jednog kvadratnog centimetra. Prema tome je:

$$1\ at = 1\ kp/cm^2 = 9{,}81\ N / (1\ cm)^2 = 9{,}81\ N / (10^{-2}\ m)^2 = 9{,}81\ N / 10^{-4}\ m^2 =$$
$$= 9{,}81\cdot 10^4\ N/m^2 = 9{,}81\cdot 10^4\ Pa = 0{,}981\ bar.$$

Može se uočiti da je tehnička atmosfera bliska jednom baru.

17. Jedinice za pritisak "milimetar živinog stuba" (mmHg) i "fizička atmosfera" (atm) izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

Milimetar živinog stuba se nekada koristio za merenje pritiska gasova, gde je bioi naročito pogodan za niske pritiske koje stvara gas u vakuum aparatima. Definiše se kao hidrostatički pritisak koji stvara na podlogu stub žive visine 1 mm. Obzirom da je formula za hidrostatički pritisak $p = \rho\cdot g\cdot h$, gde je ρ gustina tečnosti, g ubrzanje Zemljine teže, a h visina stuba tečnosti, i da je gustina žive približno (na tri značajne cifre) 13600 kg/m^3, a ubrzanje Zemljine teže približno (takođe na tri značajne cifre) 9,81 m/s^2 važi:

$$1\ \text{mmHg} \approx 13600\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \approx 133\ \text{kg/ms}^2 = 133\ \text{Pa}$$

Fizička atmosfera se definiše kao pritisak koji stvara atmosfera na nivou morske površine pri temperaturi od 20^0C . Ovakva definicija je stara i nije precizna, pa se (slično inču) u tehnici koristi druga definicija, da je fizička atmosfera jednaka pritisku od 760 mmHg. Prema tome je približno (na tri značajne cifre):

$$1\ \text{atm} = 760 \cdot 13600\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \approx 101\ 300\ \text{Pa} = 1{,}013\ \text{bar}$$

Može se uočiti da je i fizička atmosfera bliska jednom baru.

18. Jedinicu za gustinu CGS sistema g/cm^3 izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

CGS (Centimetar-Gram-Sekunda) sistem je sistem koji za svoju osnovu koristi jedinicu dužine centimetar, jedinicu mase gram i jedinicu za vreme sekund. Usled činjenice da su osnovne jednice CGS i SI sistema dekadni umnošci, transformacije jedinica se ostvaruju jednostavnim algebarskim transformacijama, a koeficijenti proporcionalnosti su takođe dekadni umnošci:

$$1\ \text{g/cm}^3 = 1 \cdot (10^{-3}\ \text{kg}) / (10^{-2}\ \text{m})^3 = 10^{-3}/10^{-6}\ \text{kg/m}^3 = 10^3\ \text{kg/m}^3.$$

Treba uočiti i da je g/cm^3 veća jedinica nego što je kg/m^3, odnosno telo koje ima gustinu 1 g/cm^3 (približno gustini vode) ima veću gustinu nego telo koje ima gustinu 1 kg/m^3 (približno gustini vazduha).

19. Jedinicu za silu CGS sistema din (oznaka dyn) izraziti u SI sistemu.

Rešenje:

Zadatak ilustruje u prethodnom zadatku objašnjeni postupak izražavanja jedinica CGS sistema jedinicama SI sistema. CGS je sistem usklađen na isti način kao i SI, pa je, prema II Njutnovom zakonu jedinica za silu jednaka proizvodu jedinica za masu i ubrzanje ($[F] = [m] \cdot [a]$). Prema tome, važi

$$1\ \text{dyn} = 1\ \text{g} \cdot 1\ \text{cm/s}^2 = 10^{-3}\ \text{kg} \cdot (10^{-2}\ \text{m})/\text{s}^2 = 10^{-5}\ \text{kgm/s}^2 = 10^{-5}\ \text{N} = 10\ \mu\text{N}.$$

20. Jedinicu za rad i energiju CGS sistema erg (oznaka erg) izraziti u SI sistemu.

Rešenje:

Polazeći od jednačine za rad $A = F \cdot s$, dobija se

$$1\ \text{erg} = 1\ \text{dyn} \cdot 1\ \text{cm} = 10^{-5}\ \text{N} \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 10^{-7}\ \text{Nm} = 10^{-7}\ \text{J} = 0{,}1\ \mu\text{J}.$$

21. Jedinice za energiju eV (elektronvolt) i kWh (kilovatčas) izraziti u SI.

Rešenje:

Elektronvolt i kilovatčas su nesistemske jedinice za energiju koje se koriste u atomskoj fizici, odnosno energetici.

Elektron volt je izuzetno mala jedinica koja se definiše kao energija koju dobija elektron od električnog polja kada pređe potencijalnu razliku (električni napon) od 1 V. Obzirom da je izraz za promenu energije naelektrisanja q kada pređe potencijalnu razliku U u električnom polju $\Delta E = q \cdot U$, i da je naelektrisanje elektrona približno $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, važi

$$1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 1\ \text{V} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Kilovatčas je, sa druge strane, velika jedinica koja se definiše kao energija koju predaje motor koji snagom od 1 kW radi tokom jednog časa. Obzirom da je $\Delta E = P \cdot t$, važi

$$1\ \text{kWh} = 10^3 \cdot 1\ \text{W} \cdot 3600\ \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

22. Jedinicu za snagu "konjska snaga" (KS, engleski HP) izraziti u SI.

Rešenje

"Konjska snaga" je jedinica kojom se meri snaga mašina koja je definisana u XIX veku. Definiše se kao srednja snaga mašine koja podigne teret od 75 kg (srednja težina čoveka) na visinu od jednog metra za jednu sekundu. Obzirom da je rad koji se izvrši pri podizanju tereta mase m na visinu h jednak A = m·g·h, i da je srednja snaga data izrazom P = A/t, sledi da je

$$1\ \text{KS} \approx \frac{75\,kg \cdot 9{,}81\,m/s^2 \cdot 1\,m}{1\,s} = 735\ \text{W}.$$

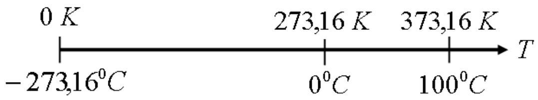
U praksi se najčešće približno usvaja da je 1 KS ≈ 750 W = ¾ kW.

23. Temperaturu od 17^0C izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

Celzijusov stepen je definisan tako da je razlika temperatura između tačke mržnjenja vode i tačke ključanja vode na atmosferskom pritisku jednaka 100^0C. Mereno Celzijusovim stepenima, temperatura apsolutne nule iznosi -273,16^{0}C.

Sa druge strane, jedinica za temperaturu u SI sistemu je definisana tako da je temperatura apsolutne jednaka 0 K, dok temperatura trojne tačke vode (što je gotovo isto, ali ne baš isto što i temperatura mržnjenja vode) iznosi 273,16 K. Prema tome *kelvin je definisan tako da po veličini bude jednak Celzijusovom stepenu,* ali se *nulte tačke temperaturskih skala razlikuju*, kako to pokazuje slika dole.



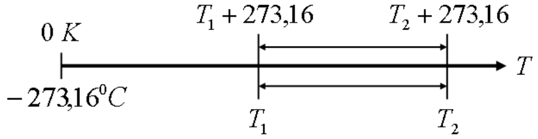
Prema tome, temperatura izražena u Celzijusovim stepenima se izražava u kelvinima tako što se na vrednost temperature u Celzijusovim stepenima doda 273,16. U ovom slučaju, 17^0C = (17+273,16) K = 290,16 K.

24. Temperatura na početku letnjeg dana iznosi 20^0C, a u podne 34^0C. Izraziti porast temperature u kelvinima.

Rešenje:

Porast temperature predstavlja razliku krajnje i početne temperature. Izraženo u Celzijusovim stepenima, ta razlika iznosi $\Delta T = (34^0C - 20^0C) = 14^0C$.

Da bi se isti postupka primenio u SI sistemu potrebno je najpre krajnju i početnu temperaturu prema proceduri opisanoj u prethodnom zadatku pretvoriti u kelvine, dakle $T_{početno} = 293{,}16$ K i $T_{krajnje} = 307{,}16$ K. Sada se utvrđuje da je razlika temperatura $\Delta T = (307{,}16^0C - 293{,}16^0C) = 14$ K. Važno je uočiti da je *razlika dve temperature izražena u Celzijusovim stepenima brojno jednaka razlici temperatura izraženih u kelvinima.*



Slika ilustruje izloženu činjenicu da je razlika bilo koje dve temperature izražene u Celzijusovim stepenima $\Delta T = (T_2 - T_1)$ jednaka razlici tih temperatura izraženih u kelvinima $\Delta T = ((T_2 + 273{,}16) - (T_1 + 273{,}16)) = (T_2 - T_1)$. Suština ove jednakosti je činjenica da je po definiciji jedan kelvin jednak jednom Celzijusovom stepenu.

Ovo je sve prosto. Međutim, *događa se da studenti, bez mnogo razmišljanja,* temperaturske razlike izražene u Celzijusovim stepenima izraze kelvinima tako što na temperatursku razliku dodaju 273,16 K, tvrdeći, na primer, da temperaturska razlika između tačke mržnjenja i ključanja vode iznosi (100+273,16) = 373,16 K, što za rezultat ima kaznene bodove. ✯✯✯

Zadaci za samostalnu vežbu

25. Izraziti u jedinicama SI:

a) 45^0, 90^0, 180^0, 360^0, 36^0, 144^0
b) 2 inča, 4 inča, 20 inča, 25 inča, 40 inča
c) 10 mm^2, 10 cm^2, 10 dm^2
d) 20 mm^3, 20 cm^3, 20 dm^3, 20 ml, 20 l

Rešenja:

a) $\pi/4$ rad, $\pi/2$ rad, π rad, $\pi/5$ rad, $4\pi/5$ rad
b) 5,08 cm, 10,16 cm, 50,8 cm, 63,5 cm, 101,6 cm
c) 10^{-5} m^2, 10^{-3} m^2, 0,01 m^2
d) $2\cdot10^{-8}$ m^3, $2\cdot10^{-5}$ m^3, $2\cdot10^{-2}$ m^3, $2\cdot10^{-5}$ m^3, $2\cdot10^{-2}$ m^3

26. Izraziti u jedinicama SI:

a) 36 km/h, 54 km/h, 72 km/h, 90 km/h, 108 km/h, 144 km/h
b) 30 ob/min, 60 ob/min, 2400 ob/min, 12000 ob/min

Rešenja:

a) 10 m/s, 15 m/s, 20 m/s, 25 m/s, 30 m/s
b) π rad/s, 2π rad/s, 80 π rad/s, 400 π rad/s

27. Izraziti u jedinicama SI:

a) 100 kp, 200 kp, 500 kp
b) 100 dyn, 1 kdyn, 1 Mdyn

Rešenja:

a) 0,981 kN, 1,962 kN, 4,905 kN
b) 1 mN, 10 mN, 10 N

28. Izraziti u jedinicama SI:

a)50 kWh, 100 kWh, 2000 kWh
b)5 eV, 1 keV, 1 MeV, 1 GeV
c) 5 erg, 1 kerg, 1 Merg, 1 Gerg

Rešenja:

a) 180 MJ, 360 MJ, 7,2 GJ
b) $8\cdot10^{-19}$ J, $1,6\cdot10^{-16}$ J, 0,16 pJ, 0,16 nJ
c) 0,5 μJ, 0,1 mJ, 0,1 J, 0,1 kJ

29. Izraziti u jedinicama SI:

a) 60 KS, 90 KS, 1200 KS
b) 7,3 g/cm^3, 11,2 g/cm^3, 0,75 g/cm^3

Rešenja:

a) 45 kW, 67,5 kW, 900 kW
b) 7300 kg/m^3, 11200 kg/m^3, 750 kg/m^3

30. *Izraziti jedinicama SI:*
a) 200 N/mm^2, 20 kN/cm^2, 20 daN/mm^2
b) 2 at, 2 atm, 10 at, 10 atm
c) 20 mmHg, 750 mmHg, 960 mmHg

Rešenja:
a) 0,2 GPa, 0,2 GPa, 0,2 GPa
b) 1,962 bar, 2,026 bar, 9,81 bar, 10,13 bar
c) 2,66 kPa, 0,998 bar, 1,277 bar

31. *Preračunati u jedinice SI:*
a) temperature 100^0C, 17^0C, 27^0C
b) temperaturske razlike 100^0C, 17^0C, 27^0C

Rešenja:
a) 373 K, 290 K, 300 K
b) 100 K, 17 K, 27 K

Izražavanje rezultata merenja

U fizici i tehnici nije moguće poznavati tačnu brojnu vrednost veličine koju opisujemo, jer su sva merenja ograničena tačnošću mernih instrumenata i promenljivošću uslova merenja. Stoga se svaka fizička veličina (označimo je sa x) koja se opisuje brojem predstavlja pomoću srednje vrednosti (oznaka $\overline{x}$) i ocene apsolutne greške (Δx) (*jedinice Δx su iste kao i jedinice x*):

$$x = (x \pm \Delta x).$$

Relativna greška je odnos apsolutne greške i srednje vrednosti: $\delta x = \Delta x/\overline{x}$ (*δx je bezdimenziona veličina)*.

Pri računanju sa približnim vrednostima fizičkih veličina koristimo se sledećim pravilima

1) Apsolutna greška zbira ili razlike dve veličine jednaka je zbiru apsolutnih grešaka članova:

$$S = x+y \text{ ili } S = x-y \Rightarrow \Delta S = \Delta x + \Delta y$$

2) Relativna greška proizvoda ili količnika dve veličine jednaka je zbiru relativnih grešaka članova:

$$S = x \cdot y \text{ ili } S = x/y \Rightarrow \delta S = \delta x + \delta y$$

3) Relativna greška n-tog stepena neke fizičke veličine jednaka je proizvodu stepena i relativne greške te veličine:

$$S = x^n \Rightarrow \delta S = n \cdot \delta x$$

Pri izražavanju dobijenih rezultata primenjuje se sledeći postupak:

1) Izračunata apsolutna greška se izrazi u obliku $\Delta x = r \cdot 10^n$ tako da je $1<r<10$ a zatim apsolutna greška *ocenjuje* tako što se izračunata vrednost *poveća* tako da bude izražena *samo jednom* značajnom cifrom $\Delta x \approx m \cdot 10^n$, tako da je m prvi ceo broj veći od r. Izuzetak predstavlja slučaj kada je $1<r<1.5$, i u tom slučaju je m = 1.5

2) Izračunata srednja vrednost se *zaokrugli* na mestu koje odgovara 10^n po pravilima zaokrugljivanja na *bližu* vrednost.

Rešeni zadaci

32. *Na osnovu rezultata merenja stranica paralelograma a = (10,0±0,1) cm i b = (4,0±0,1) cm izračunati njegovu površinu.*

Rešenje:

Prvi deo izrade svakog zadatka je izražavanje zadatih veličina jedinicama SI sistema, pa je $\bar{a} = 10\cdot10^{-2}$ m = 10^{-1} m, $\Delta a = 0.1\cdot10^{-2}$ m = 10^{-3}m, dok je $\bar{b} = 5\cdot10^{-2}$ m i $\Delta b = 0.1\cdot10^{-2}$ m = 10^{-3}m.

Površina paralelograma određuje se po obrascu $P = a\cdot b$, pa je srednja vrednost $\bar{P} = \bar{a}\cdot\bar{b}$ = 10^{-1}m$\cdot5\cdot10^{-2}$m = $4\cdot10^{-3}$ m^2. Prema pravilima za računanje sa približnim vrednostima možemo odrediti relativnu grešku određivanja površine $\delta P=\delta a+\delta b$. Relativne greške merenja dužina stranica su $\delta a = \Delta a/a = 10^{-3}$m/$10^{-1}$m = 0,01 i $\delta b = 10^{-3}/4\cdot10^{-2}$m = 0,025, pa je δP = 0,035. Apsolutnu grešku određivanja površine određujemo prema obrascu $\Delta P = P\cdot\delta P = 1,4\cdot10^{-4}$m^2. Ovu vrednost ocenjujemo sa $\Delta P \approx 1,5\cdot10^{-4}$ m^2. Pošto se izračunata vrednost površine može napisati u obliku $P = 40,0\cdot10^{-4}$m^2, nema potrebe za zaokrugljivanjem pa je veličinu merene površine izražavamo sa:

$$P = (40,0\pm1,5)\cdot10^{-4}\text{m}^2$$

*Napomena:*U žargonu se zahtev da srednja vrednost bude zaokrugljena na istom decimalnom mestu kao i greška kaže da “broj decimala srednje vrednosti treba da je jednak broju decimala greške”. Iako ne sasvim tačan, ovaj stav vizuelno se lako pamti i uspešno primenjuje. To je i razlog zašto smo za srednju vrednost površine usvojili $40,0\cdot10^{-4}$ m^2 a ne $40\cdot10^{-4}$ m^2. Iako matematički jednaki, ova dva izraza u tehnici izražavaju različite tačnosti merenja i izračunavanja.

33. *Izračunati površinu trapeza čije ako su merenjem određene dužine osnovica a = (10,0±0,1) cm i b = (4,0±0,1) cm i visina h = (5,0±0,1) cm.*

Rešenje:

Prema postavci zadatka: $\bar{a} = 10^{-1}$ m, $\Delta a = 10^{-3}$m; $\bar{b} = 4\cdot10^{-2}$ m, $\Delta b = 10^{-3}$m; $\bar{h} = 5\cdot10^{-2}$ m, $\Delta h = 10^{-3}$ m

Formula za površinu trapeza glasi $P = (a+b)\cdot h/2$. Prema tome je $\bar{P} = (\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{h}/2$= $3,5\cdot10^{-3}$ m^2. Izraz za površinu trapeza sadrži i sabiranje i množenje, pa je određivanje greške složenije: u osnovi se on može predstaviti pomoću množenja veličine (a+b) i veličine h i deljenja sa 2. Prema pravilima za računanje sa približnim vrednostima tada je $\delta P = \delta(a+b) + \delta h + \delta 2$. *Greške matematičkih konstanti su jednake nuli* jer njih tačno poznajemo, pa je $\delta 2=0$. Za vrednost δh imamo prema definiciji relativne greške $\delta h=\Delta h/\bar{h}$=0,02. Problem predstavlja određivanje relativne greške zbira (a+b) jer ne postoji jednostavna formula za to; *karakteristična greška studenata je "izmišljanje" formule* ***δ(a+b)=δa+δb*** *koja* ***ne važi****; rezultat te "formule" je 0 poena na zadatku ili padanje na izlaznom kolokvijumu vežbi*. Pravi postupak je korištenje definicije $\delta(a+b)=\Delta(a+b)/(\bar{a}+\bar{b})$ i primena pravila računanja sa približnim vrednostima $\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b$; na taj način je $\Delta(a+b)=2\cdot10^{-3}$ m, a $\delta(a+b)=2\cdot10^{-3}$ m$/14\cdot10^{-2}$ m $\approx 0,014$ (zaokrugljivanja vršimo na četiri značajne cifre, jer rezultate iskazujemo sa tri). Dakle važi da je δP = 0,02+0,014 = 0,034, a odatle je $\Delta P = \bar{P}\cdot\delta P\approx0,12\cdot10^{-3}$ m^2. Ovu vrednost greške ocenjujemo povećavanjem na $\Delta P \approx 0,15\cdot10^{-3}$ m^2. Rezultat izračunavanja površine zapisujemo kao

$$P = (3,50 \pm 0,15)\cdot10^{-3}\text{ m}^2.$$

34. *Odrediti gustinu materijala od koga je načinjen valjak visine $h = (10,0 \pm 0,1)$ cm i poluprečnika $r = (5,0 \pm 0,1)$ cm, ako je merenjem utvrđeno da je njegova masa $m = (8,000 \pm 0,005)$ kg.*

Rešenje:

Prema postavci zadatka je $\overline{h}=0,1$ m, $\Delta h=10^{-3}$ m; $\overline{r}=0,05$ m, $\Delta r=10^{-3}$ m, $\overline{m}=8,000$ kg, $\Delta m=5\cdot 10^{-3}$ kg.

Budući da formula za gustinu materijala (ρ) glasi $\rho = m/V$, a da se zapremina valjka može odrediti prema formuli $V = \pi\cdot r^2\cdot h$, za određivanje gustine u ovom slučaje se dobija formula $\rho = m/(\pi\cdot r^2\cdot h)$. Jednačine ovog oblika (proizvodi, stepeni i količnici merenih veličina) su najčešće zastupljene na laboratorijskim vežbama iz fizike. Jednačinu za određivanje greške je u ovom slučaju jednostavno napisati jer ukupna relativna greška predstavlja prosto zbir svih relativnih grešaka veličina koje učestvuju u formuli vodeći računa da je greška pri stepenovanju jednaka $\delta(x^n) = n\cdot\delta(x)$ (jer je npr. $x^2 = x\cdot x$ pa je greška proizvoda $\delta(x^2)=\delta(x\cdot x)=\delta x+\delta x=2\cdot\delta x$). Zato je u ovom slučaju $\delta\rho = \delta m+\delta\pi+2\cdot\delta r+\delta h$. Budući da je π matematička konstanta $\delta\pi = 0$; po definiciji relativne greške $\delta m=\Delta m/\overline{m}=6,25\cdot 10^{-4}$, $\delta r=\Delta r/\overline{r}=0,02$, $\delta h=\Delta h/\overline{h}=0,01$, pa je $\delta\rho=0,050625$; primećuje se da je greška određivanja mase δm mnogo manja nego greška određivanja dužina, pa praktično ne utiče na ukupnu grešku merenja. Kako je $\overline{\rho}=\overline{m}/(\pi\cdot\overline{r}^2\cdot\overline{h}) \approx 10120$ kg/m^3, apsolutna greška određivanja gustine je $\delta\rho = \rho\cdot\Delta\rho \approx\ \approx 515,7$ kg/m^3 = $5,157\cdot 10^2$kg/m^3 što se ocenjuje sa $\delta\rho\approx 6\cdot 10^2$ kg/m^3 (***Obratiti pažnju:** pri ocenjivanju se greška ne zaokrugljuje na bližu vrednost $5\cdot 10^2$ kg/m^3 već se povećava na $6\cdot 10^2$ kg/m^3 jer je takvo pravilo za ocenjivanje greške, videti pravilo 1 na strani 5. **Na ovom mestu studenti greše vršeći zaokrugljivanje greške umesto povećavanja !!!**). Zaokrugljujući* srednju vrednost na istom decimalnom mestu imamo da je $\overline{\rho}=10120$ kg/m^3 = $101,20\cdot 10^2$ kg/m^3 $\approx 101\cdot 10^2$ kg/m^3, odnosno

$$\rho=(101\pm 6)\cdot 10^2 \text{ kg/m}^3.$$

35. *Iz lista papira oblika pravougaonika isečen je kvadrat, a zatim je lenjirom sa milimetarskom podelom je izvršeno merenje njihovih dimenzija. Ako su dužine stranica pravougaonika 210 mm i 297 mm, a dužina stranice kvadrata iznosi 105 mm, odrediti površinu ostatka papira.*

Rešenje:

Pošto se sve dužine mere istim lenjirom, apsolutna greška merenja svih dužina u zadatku iznosi $\Delta l = ½\, l_{min} = 0,5$ mm, gde $l_{min} = 1$ mm predstavlja dužinu najmanjeg podeoka mernog instrumenta.

Prema tome, ako stranice pravougaonika obeležimo sa a i b, a stranicu kvadrata sa c, onda su relativne greške njihovog merenja $\delta a = \Delta a/a = 0,5$ mm/210 mm $\approx 0,0024$, $\delta b = \Delta b/b \approx 0,0017$ i $\delta c = \Delta c/c \approx 0,048$.

Traženu površinu ostatka papira određujemo kao razliku površina pravougaonuka i kvadrata,

$$P = P_{pr} - P_{kv}.$$

Površina pravougaonika iznosi $P_{pr} = a\cdot b = (210\cdot 10^{-3}\text{ m})\cdot(297\cdot 10^{-3}\text{ m}) = 62370\cdot 10^{-6}\text{ m}^2$. Relativna greška njenog određivanja iznosi $\delta P_{pr} = \delta a + \delta b = 0,0041$, pa je apsolutna greška određivanja površine pravougaonika $\Delta P_{pr} = P_{pr}\cdot\delta P_{pr} \approx 2557\cdot 10^{-6}\text{ m}^2$.

Površina kvadrata iznosi $P_{kv} = a^2 = (105\cdot 10^{-3}\text{ m})^2 = 11025\cdot 10^{-6}\text{ m}^2$. Relativna greška njenog određivanja iznosi $\delta P_{kv} = 2\cdot\delta a = 0,096$, pa je apsolutna greška određivanja površine kvadrata $\Delta P_{kv} = P_{kv}\cdot\delta P_{kv} \approx 1058\cdot 10^{-6}\text{ m}^2$.

Sada je tražena površina ostatka papira $P_{pr} – P_{kv} = 51345\cdot10^{-6}$ m^2 = $5,3145\cdot10^{-2}$ m^2, a greška njenog određivanja iznosi $\Delta P = \Delta P_{pr} + \Delta P_{kv} \approx 3615\cdot10^{-6}$ m^2 = $0,3615\cdot10^{-2}$ m^2. Povećavanjem, grešku određivanja ocenjujemo sa $\Delta P = 0,4\cdot10^{-2}$ m^2, što dovodi do ocene rezultata merenja

$$P = (5,3 \pm 0,4)\cdot10^{-2}\ \text{m}^2.$$

Zadaci za samostalnu vežbu

36. *Odrediti poluprečnik lopte ako je merenjem određeno da njena zapremina iznosi $V = (125 \pm 1)$ cm^3.*

    Rešenje: $r = (3,102 \pm 0,008)\cdot10^{-2}$ m

37. *Odrediti površinu ploče koja je izrađena tako što je u pravougaone ploče stranica $a = (21,2\pm0,1)$ cm i $b = (12,1\pm0,1)$ cm izrezan kružni otvor poluprečnika $r = (7,0\pm0,1)$cm.*

    Rešenje: $P = (103 \pm 8)\cdot10^{-4}$ m^2

38. *Odrediti modul torzije žice na osnovu formule $G = (2\cdot l\cdot c)/(\pi\cdot r^4)$ ako je izmereno: $l = (522\pm1)$ mm , $r = (0,51\pm0,02)$ mm i izračunavanjem određeno $c = 5,9\cdot10^{-3}$ Nm/rad sa relativnom greškom $\delta c = 2\%$.*

    Rešenje: $G = (29 \pm 6)$ GPa

39. *Iz parčeta drveta oblika kruga prečnika 100 mm isečen je komad oblika kruga prečnika 90 mm. Ako je merenje obavljeno lenjirom sa milimetarskom podelom, odrediti površinu ostatka drveta.*

    Rešenje: $P = (1,49 \pm 0,15)\cdot10^{-4}$ m^2

Skalari i vektori

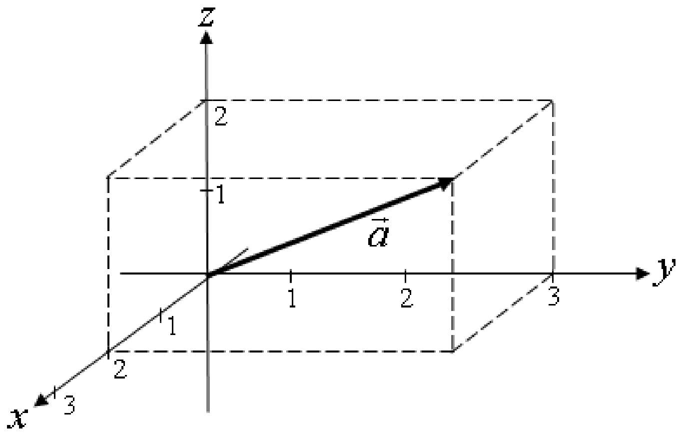
Skalarnim veličinama, ili skalarima, nazivamo veličine za čije je opisivanje dovoljno upotrebiti jedan broj, dok vektorskim veličinama, ili vektorima, nazivamo one veličine za čije je opisivanje potrebno upotrebiti više brojeva.

Vektori u prostoru

Pojam vektora, naučen u osnovnoj školi, prema kome se vektori opisuju intenzitetom, pravcem i smerom je jedan očigledan primer za prethodnu definiciju: jednim brojem opisujemo intenzitet, drugim brojem pravac, a trećim brojem smer vektora. Opisivanje vektora intenzitetom, pravcem i smerom se naziva *prirodno opisivanje vektora*.

Pri *koordinatnom opisivanju vektora*, jedan vektor se opisuje svojim projekcijama na ose Dekartovog koordinatnog sistema. Obzirom da Dekartov koordinatni sistem ima tri ose, svaki vektor ima tri projekcije. Budući da se svaka projekcija predstavlja jednim brojem, vektor se predstavljaju sa tri broja, koji se nazivaju *koordinate* vektora. Koordinata je pozitivan broj ako projekcija vektora na osu ima isti smer kao osa, dok je koordinata negativna ako je projekcija vektora na osu usmerena suprotno od ose. Ne treba mešati pojmove projekcije i koordinate, jer je projekcija vektor, a koordinata skalar kojim se taj vektor opisuje.

U ovoj zbirci će vektori biti označavani strelicom iznad slova kojim se veličina označava (vektor $\vec{a}$), a opisivani navođenjem koordinata vektora odogovarajućim redom u zagradama, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Na sledećoj slici je, kao primer, prikazan vektor $\vec{a} = (2,3,2)$.



Intenzitet vektora će se označavati vertikalnim zagradama (kao apsolutna vrednost realnog broja, $|\vec{a}|$), ili samo slovom kojim se veličina obeležava (a). Ako je vektor koordinatno opisan, intenzitet se može odrediti primenom Pitagorine teoreme:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Treba odmah primetiti da ***koordinate vektora mogu biti i pozitivni i negativni brojevi***, dok je ***intenzitet vektora uvek pozitivan broj***.

Pored toga, važno je naglasiti i da je ***jedinica za neku vektorsku veličinu*** ustvari ***jedinica njenog intenziteta***, odnosno ***jedinica za bilo koju od njenih projekcija***. Na primer, jedinica za silu (koja je vektorska veličina) je njutn, što znači i da je i jedinica svake od projekcija sile njutn, odnosno da je jedinica intenziteta sila njutn.

Pravac vektora se određuje uglovima koje vektor zaklapa sa koordinatnim osama. Ako je vektor koordinatno opisan, uglovi koje zaklapa sa osama se mogu odrediti prema jednačinama:

$$\cos(\vec{a},\vec{x}) = \frac{a_x}{a} \quad \cos(\vec{a},\vec{y}) = \frac{a_y}{a} \quad \cos(\vec{a},\vec{z}) = \frac{a_z}{a}\ .$$

Rešeni zadaci

40. Odrediti intenzitet vektora $\vec{a} = (2,3,2)$.

Rešenje:

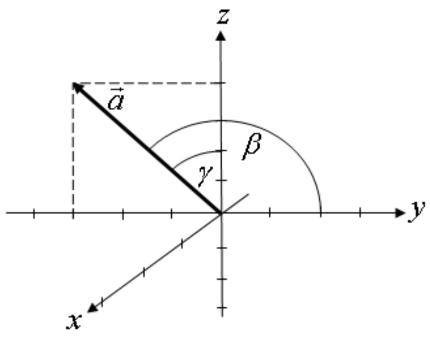
Primenom Pitagorine teoreme se određuje da je

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12.$$

41. Odrediti uglove koje sa osama zaklapa vektor $\vec{a} = (0,-3,4)$.

Rešenje:

Vektor sa koordinatama $a_x = 0$, $a_y = -3$ i $a_z = 4$ je prikazan skicom na desnoj strani.



Uočite da se *koordinatom $a_x = 0$ iskazuje stav* da je projekcija vektora a na x-osu jednaka nuli, odnosno da je *vektor normalan na x-osu*. To istovremeno znači da vektor $\vec{a}$ leži u ravni normalnoj na x-osu (yz-ravan).

Pored toga, treba uočiti i da *negativna vrednost a_y projekcije* vektora znači da je y-komponenta vektora usmerena suprotno od y-ose.

Prema prethodno datim formulama, ugao između x-ose i datog vektora (najčešće se označava sa α) može se odrediti primenom formule

$$\cos\alpha = a_x / a.$$

Intenzitet vektora a je, pri tome,

$$a = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2} = 5\,.$$

Iz $a_x = 0$ sledi da je $\cos\alpha = 0$, odnosno $\alpha = \pi/2$, kako je i ranije bilo zaključeno.

Slično tome, ugao β koji vektor zaklapa sa y-osom određen je relacijom $\cos\beta = a_y/a = -0{,}6$. Negativna vrednost kosinusa ukazuje da je ugao β veći od $\pi/2$, što potvrđuje ranije izrečeni stav da negativna vrednost projekcije ukazuje da je odgovarajuća komponenta vektora usmerena suprotno od posmatrane ose. Prema tome ugao β iznosi $\beta \approx 127^0$.

Na kraju, ugao koji vektor zaklapa sa z-osom, ugao γ, je određen relacijom $\cos\gamma = a_z/a = 0{,}8$, pa je $\gamma = 37^0$.

42. *Kamen pada vertikalno naniže brzinom intenziteta 100 m/s. Odrediti projekcije brzine ako se za pravac i smer x ose usvoji pravac i smer severa, za pravac i smer y-ose pravac i smer zapada, a za pravac z ose normala na površinu Zemlje usmerena naviše.*

    Rešenje:

Ako se ose usvoje kako je opisano u zadatku, onda su x i y projekcije vektora brzine jednake nuli jer je brzina padanja normalna na površinu Zemlje, odnosno njena projekcija na površinu Zemlje je jednaka nuli. Drugim rečima, kamen ne pada niti prema severu ili jugu ($v_x = 0$), niti prema istoku ili zapadu ($v_z = 0$).

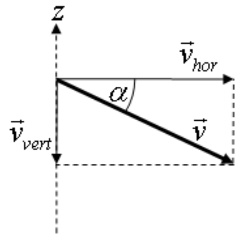
Pošto kamen pada naniže, a z-osa je izabrana da bude usmerena naviše, onda je z-projekcija brzine kamena jednaka -100 m/s. Projekcija brzine kamena od +100 m/s bi značila ili da se kamen kreće vertikalno naviše, ili da je z-osa izabrana tako da bude usmerena naniže.

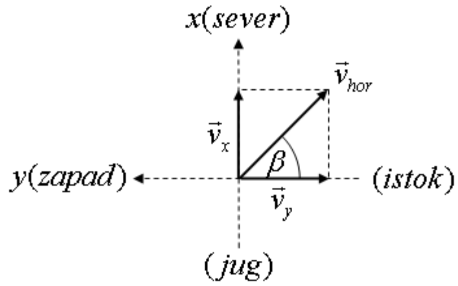
43. *Avion sleće brzinom od 200 km/h na pistu koja ima pravac severoistoka u smeru severa pri čemu je trup aviona nagnut pod uglom od 30^0 u odnosu na vodoravni položaj. Ako se za pravac x ose usvoji pravac severa, za pravac y-ose pravac zapada, a za pravac z ose normala na površinu Zemlje usmerena naviše prikazati brzinu aviona koordinatama.*

    Rešenje:

Obzirom da nije jednostavno skicirati projekcije vektora u prostoru, često je jednostavnije prikazati vektor skicama projekcijama vektora na pojedine ravni (Studenti mašinskog fakulteta ove veštine brzo savladaju u okviru nacrtne geometrije i tehničkog crtanja, pa je ovaj zadatak samo ilustrativan radi početnog uvežbavanja pojma projekcija vektora u fizici).

Čest postupak za pojednostavljenje analize prostornih problema u fizici je da se vektori prvo razlože na horizontalnu i vertikalnu (obično paralelna sa z-osom) komponentu, a da se zatim horizontalna komponenta razlaže na dve (najčešće x i y) projekcije. U konkretnom primeru, kako prikazuje sledeća slika levo, na kojoj je sa α označen ugao između horizontale i brzine aviona, horizontalna komponenta brzine iznosi $v_{hor} = v\cdot\cos\alpha \approx 173$ km/h, dok vertikalna komponenta brzine iznosi $v_{ver} = v\cdot\sin\alpha = 100$ km/h. Važno je sada uočiti da je projekcija brzine na z-osu (vertikalna komponenta) suprotno usmerena od ose z. Zato je projekcija brzine na z osu negativna, i iznosi $v_z = -100$ km/h.





U sledećem koraku, horizontalna komponenta se razlaže na x i y projekcije. Slika desno pokazuje orijentaciju x i y ose i položaj horizontalne komponente brzine kako je to u zadatku opisano. Ugao β jednak je 45^0, pa su *intenziteti* projekcija brzine na x i y osu jednaki i iznose $|v_x| = v_{hor} \cdot \sin\beta \approx 122{,}7$ km/h i $|v_y| = v_{hor} \cdot \cos\beta \approx 122{,}7$ km/h. Međutim, x-projekcija brzine ima smer x-ose, pa je $v_x = 122{,}7$ km/h, dok je y-projekcija brzine usmerena suprotno od y-ose (ima pravac istoka), pa je $v_y = -122{,}7$ km/h. Konačno je, prema izabranom kooordinatnom sistemu,

$$\vec{v} = (122.7, -122.7, -100)\, km/h .$$

Treba napomenuti da je izbor koordinatnog sistema potpuno proizvoljan, i da, pri tome, promena koordinatnog sistema znači i promenu projekcija vektora. Na primer, da je y-osa izabrana u pravcu istoka, onda bi y-koordinata brzine iznosila +122,7 km/h. Međutim, bez obzira na izbor koordinatnog sistema, svi fizički zaključci koji se izvedu analizom će biti isti (primera radi, trajanje leta aviona, količina potrošenog goriva i slično).

Zadaci za samostalnu vežbu

44. Odrediti intenzitet i uglove koje sa osama zaklapa vektor $\vec{F} = (4, -4, -2)\, N$

Rešenje: F = 6 N, $\alpha = 48{,}2^0$, $\beta = 131{,}2^0$, $\gamma = 109{,}5^0$

45. Kap kiše pada brzinom od 10 m/s u pravcu jugozapada i smeru juga pod uglom od 15^0 u odnosu na vertikalu . Ako se za pravac x ose usvoji pravac severa, za pravac y-ose pravac zapada, a za pravac z ose normala na površinu Zemlje usmerena naviše prikazati brzinu kapi koordinatama.

Rešenje: $\vec{v} = (-1.82, 1.82, -9{,}65)\, m/s$

Vektori u ravni

Ako svi vektori koji su od interesa u nekom problemu pripadaju jednoj ravni (ili paralelenim ravnima), onda je projekcija bilo kojeg od vektora na pravac normalan na tu ravan jednaka nuli. Ako se taj pravac izabere za z-osu, onda bi koordinatni zapis svakog od vektora imao isti oblik (x,y,0), odnosno, tada bi z-projekcije svih vektora bile jednake nuli. Radi jednostavnijeg predstavljanja vektora, tada se pri koordinatnom opisivanju vektora prikazuju samo dve projekcije, x i y, i to se beleži kao (x,y).

Grafički prikaz, kao i formule za određivanje intenziteta vektora i uglova koje vektor zaklapa sa koordinatnim osama su tada znatno jednostavniji. Intenzitet vektora $\vec{a} = (a_x, a_y)$ dat je formulom

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

dok su uglovi koje vektor zaklapa sa x i z osom dati jednačinama

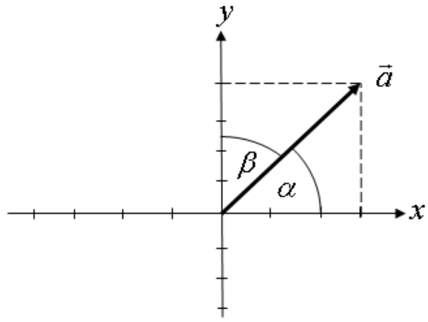
$$\cos(\vec{a},\vec{x}) = \frac{a_x}{a} \quad \cos(\vec{a},\vec{y}) = \frac{a_y}{a}.$$

Rešeni zadaci

46. Grafički prikazati vektor $\vec{a} = (3,4)$*, i odrediti uglove koje zaklapa sa koordinatnim osama.*

Rešenje:

Vektor je grafički prikazan na slici. Njegov intenzitet je dat izrazom $a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.



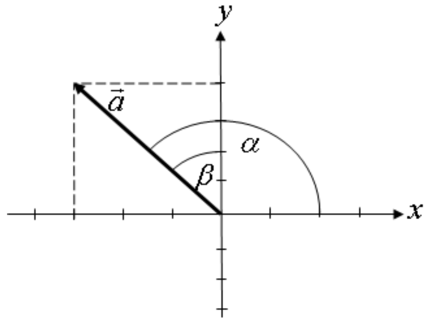
Ugao α koji vektor zaklapa sa x-osom je dat izrazom $\cos\alpha = a_x/a = 0,6$ i iznosi $\alpha = 53^0$.

Ugao β koji vektor zaklapa sa y-osom je dat izrazom $\cos\beta = a_y/a = 0,8$ i iznosi $\beta = 37^0$. Sa slike se opaža da je $\alpha + \beta = \pi/2$.

47. Grafički prikazati vektor $\vec{a} = (-3,4)$*, i odrediti uglove koje zaklapa sa koordinatnim osama.*

Rešenje:

Zadatak ilustruje smisao negativne vrednosti koordinate. Vektor je grafički prikazan na slici. Njegov intenzitet je dat izrazom $a = |\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.



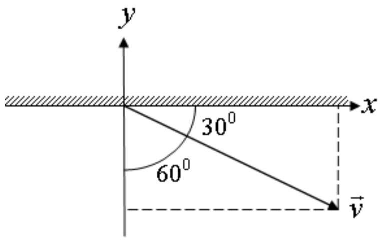
Ugao α koji vektor zaklapa sa x-osom je dat izrazom $\cos\alpha = a_x/a = -0,6$. I u ovom slučjau negativna vrednost koordinate, odnosno kosinusa ugla α, ukazuje da je projekcija vektora na x-osu usmerena suprotno od x-ose. Ugao α je, stoga, veći od $\pi/2$ i iznosi $\alpha = 127^0$.

Ugao β koji vektor zaklapa sa y-osom je dat izrazom $\cos\beta = a_y/a = 0,8$ i iznosi $\beta = 37^0$. Sa slike se opaža da je $\alpha = \pi/2+\beta$.

48. *Kamen pada na horizontalnu podlogu pod uglom od 30^0 stepeni brzinom intenziteta 20 m/s. Ako se za x-osu uzme horizontala, a za y-osu vertikala usmerena naviše, prikazati vektor brzine kamena grafički i koordinatno.*

Rešenje:

Grafički prikaz vektora je dat na slici. x-komponenta brzine ima intenzitet $v_x = v\cdot\cos 30^0 = 17{,}3$ m/s, dok intenzitet y-komponente brzine iznosi $v\cdot\cos 60^0 = 10$ m/s. Obzirom da je x-komponenta brzine usmerena u smeru x-ose, a y-komponenta brzine suprotno od smera y-ose, to je x-projekcija brzine pozitivna, a y-projekcija brzine negativna. Prema tome, $\vec{v} = (17.3,-10)$ m/s.



49. *Ako su α i β uglovi koji neki vektor u ravni zaklapa sa koordinatnim osama pravouglog koordinatnog sistema, pokazati da je* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

Rešenje:

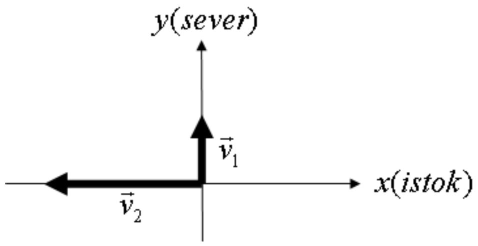
Prema već iznesenim jednačinama $\cos\alpha = a_x/a$ i $\cos\beta = a_y/a$, pa je

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \left(\frac{a_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a_y}{a}\right)^2 = \frac{a_x^2 + a_y^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Zadaci za samostalnu vežbu

50. *Ako se za pravac i smer x-ose usvoji pravac i smer istoka, a za pravac i smer y-ose pravac i smer severa, grafički i koordinatno prikazati vektore brzine vetra koji duva sa juga na sever brzinom intenziteta 20 km/h i vetra koji duva sa istoka na zapad brzinom intenziteta 40 km/h.*

Rešenje:



$\vec{v}_1 = (0,20)$ km/h, $\vec{v}_1 = (-40,0)$ km/h

Vektori na pravcu

Ako su svi vektori koji su od interesa u nekom problemu međusobno paralelni, onda je projekcija bilo kojeg od vektora na pravce normalne na njihov pravac jednaka nuli. Ako se pravac vektora izabere za x-osu, onda bi koordinatni zapis svakog od vektora imao isti oblik (x,0,0), odnosno, tada su y i z-projekcije svih vektora jednake nuli. Radi jednostavnijeg predstavljanja vektora, tada se pri koordinatnom opisivanju vektora prikazuje samo jedna projekcija, i to se beleži kao (x). Intenzitet vektora $\vec{a} = (a_x)$ dat je formulom $a = |\vec{a}| = |a_x|$.

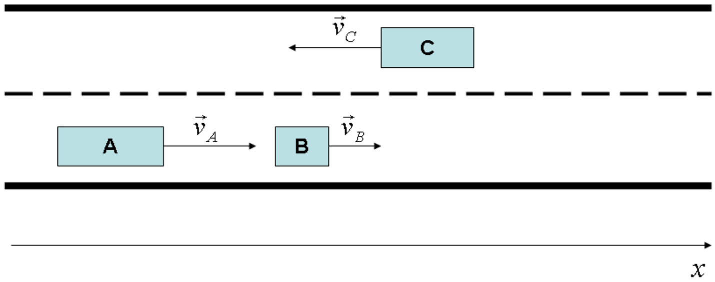
☆ Koliko god ovaj slučaj bio jednostavan, studentima se često dešava da, nepažnjom, pomešaju intenzitet i projekciju vektora. Do zabune upravo i dolazi zbog toga što je, u slučaju da je vektor usmeren u pravcu koordinatne ose, projekcija vektora jednaka njegovom intenzitetu, $a_x = a$. Međutim, u slučaju da je vektor usmeren suprotno od koordinatne ose, projekcija vektora je jednaka suprotnoj vrednosti intenziteta vektora $a_x = -a$. ☆

Rešeni zadaci

51. *Pravom ulicom se kreću automobili A i B u jednom smeru brzinama intenziteta $v_A = 30$ km/h i $v_B = 50$ km/h, dok se kamion C kreće u suprotnom smeru brzinom intenziteta $v_C = 40$ km/h. Prikazati koordinatno vektore brzina ovih vozila.*

Rešenja:

Situacija predstavljena u zadatku je šematski prikazana na sledećoj slici:



Obzirom da je ulica prava, svi vektori su međusobno paralelni, pa je za opisivanje vektora dovoljno koristiti samo jednu koordinatnu osu, paralelnu ulici. Smer koordinatne ose se bira proizvoljno. U ovom slučaju je moguće izabrati smer kretanja vozila A i B (na desno) ili smer kretanja vozila C (na levo).

Ukoliko se smer ose x izabere na desno (kako je to prikazano na slici), tada su vektori $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ usmereni u smeru x-ose, pa je $v_{Ax} = v_A = 30$ km/h i $v_{Bx} = v_B = 50$ km/h. Sa druge strane, vektor $\vec{v}_C$ je usmeren suprotno x-osi, pa je $v_{Cx} = -v_C = -40$ km/h. Prema tome, $\vec{v}_A = (+30$ km/h), $\vec{v}_B = (+50$ km/h) i $\vec{v}_C = (-40$ km/h).

Da je smer ose x izabran suprotno (na desno), tada bi projekcije brzina bile $v_{Ax} = -30$ km/h, $v_{Bx} = -50$ km/h i $v_{Cx} = 40$ km/h, a brzine bi bile $\vec{v}_A = (-30$ km/h), $\vec{v}_B = (-50$ km/h) i $\vec{v}_C = (+40$ km/h). Kao što je ranije objašnjeno, veličina i znak projekcija zavise od izbora koordinatnih osa, ali fizičke činjenice (kao što je činjenica da se automobili i kamion kreću u suprotnim smerovima) ne zavise od izbora koordinata.

Zadaci za samostalnu vežbu

52. *Kamen se baci vertikalno uvis brzinom od 10 m/s i pada na zemlju brzinom od 9 m/s. Koordinatno opisati početnu i krajnju brzinu kamena koristeći vertikalnu osu usmerenu naviše.*

Rešenje: $\vec{v}_{poc} = (+10$ m/s) i $\vec{v}_{kr} = (-9$ m/s)

Sabiranje vektora

Sabiranje vektora definisano pomoću pravila paralelograma i trougla predstavlja geometrijsku interpretaciju sabiranja vektora. Ako se vektori predstave koordinatno, onda se sabiranje vektora interpretira na odgovarajući način i definiše tako da je svaka koordinata zbira jednaka zbiru odgovarajućih koordinata sabiraka, odnosno,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x + b_x = c_c \\ a_y + b_y = c_y \\ a_z + b_z = c_z \end{cases}$$

što se drugačije može napisati

$$(a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_z, a_y + b_y, a_z + b_z)\,.$$

Potpuno analogno, razlika dva vektora se definiše tako da je svaka koordinata razlike jednaka razlici odgovarajućih koordinata umanjenika i umanjioca, odnosno,

$$(a_x, a_y, a_z) - (b_x, b_y, b_z) = (a_x - b_z, a_y - b_y, a_z - b_z)\,.$$

Obzirom da se zbir vektora sa samim sobom $\vec{a}+\vec{a}$ može označiti i kao $2\cdot\vec{a}$, uopšte se može definisati proizvod realnog broja n i vektora tako da je

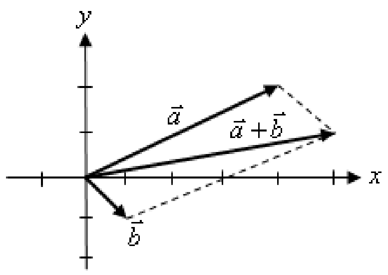
$$n\cdot\vec{a} = n\cdot(a_x, a_y, a_z) = (na_x, na_y, na_z)\,.$$

Obzirom na prethodno opisano, mnogo je lakše vršiti izračunavanja sa vektorima primenom koordinatnog zapisa nego geometrijskim predstavljanjem usmerenim dužima.

Rešeni zadaci

53. Grafički i analitički odrediti zbir vektora $\vec{a}=(4,2)$ *i vektora* $\vec{b}=(1,-1)$.

Rešenje:



Prema definiciji zbira vektora, $\vec{a}+\vec{b}=(4+1,\ 3+(-1))=(5,2)$. Grafičko rešenje primenom metode paralelograma je dato na slici desno.

Uporedite vreme potrebno da se izvrši sabiranje vektora po jednoj i drugoj metodi.

54. Ako je $\vec{a}=(4,2,0)$ *i* $b=(-2,1,-2)$ *odrediti intenzitet vektora* $\vec{a}+2\vec{b}$.

Rešenje:

Prema definiciji sabiranja vektora i množenja vektora brojem,

$$\vec{a}+2\vec{b}=(4,2,0)+2\cdot(-2,1,-2)=(4,2,0)+(-4,2,-4)=(0,4,-4)\,.$$

pa je intenzitet vektora $\vec{a}+2\vec{b}$

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{0^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\approx 5,64\,.$$

Rešavanje ovog zadatka grafičkim putem bi bilo zaista dugotrajno.

55. Pravom ulicom se kreću automobili A i B u suprotnim smerovima brzinama intenziteta v_A *= 30 km/h i* v_B *= 50 km/h. Odrediti vektorski zbir i razliku vektora brzina* $\vec{v}_A$ *i* $\vec{v}_B$.

Rešenje:

Prema proceduri opisanoj u zadatku 51, vektori brzina $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ se koordinatno mogu predstaviti kao $\vec{v}_A$ = (30) km/h i $\vec{v}_B$ = (-50) km/h, pa su vektorski zbir i razlika ovih vektora

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B = (-20) \text{ km/h i } \vec{v}_A - \vec{v}_B = (80) \text{ km/h}$$

Zadaci za samostalnu vežbu

56. *Ako je* $\vec{a} = (3,2,1)$ *i* $b = (2,2,0)$ *i* $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ *odrediti ugao koji zaklapa vektor* $\vec{c}$ *sa osom x.*

    Rešenje: $\alpha = 35{,}8^0$.

57. *Kamen se baci vertikalno uvis brzinom od 10 m/s i pada na zemlju brzinom od 9 m/s. Odrediti intenzitet, pravac i smer razlike krajnje i početne brzine kamena.*

    Rešenje: 19 m/s, pravac vertikale, smer naniže.

Skalarni proizvod dva vektora

Za razliku od skalara, koji za proizvod uvek imaju skalar, kod vektora postoje dve različite operacije množenja vektora, skalarni i vektorski proizvod.

Skalarnim proizvodom dva vektora nazivamo vektorsku operaciju kojom se od dva vektora kao rezultat dobija skalar. Skalarni proizvod dva vektora se označava tačkom (·), kao i proizvod dva skalara.

Skalarni proizvod dva vektora se izračunava tako što se saberu proizvodi svih njihovih respektivnih parova koordinata, odnosno

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

U slučaju da se za opisivanje vektora koriste dve koordinate, onda se skalarni proizvod može izračunati primenom jednostavnije formule

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y ,$$

a u slučaju da vektori pripadaju jednom pravcu, te da se opisuju samo sa po jednom koordinatom, primenom formule

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x .$$

Pored izračunavanja primenom koordinata, skalarni proizvod je moguće izračunati i ako se poznaju intenziteti vektora i ugao koji zaklapaju:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\alpha ,$$

gde je sa ($\vec{a}, \vec{b}$), odnosno α, označen ugao koji zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Često se prethodna formula koristi za određivanje ugla koji zaklapaju dva vektora ako su poznate koordinate tih vektora:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

Skalarni proizvod ima sledeće osobine koje ga, pored tipa rezultata, razlikuju od vektorskog proizvoda:

1. Skalarni proizvod je komutativna operacija, odnosno, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, što je posledica činjenice da je $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$.
2. Skalarni proizvod je jednak nuli kada su vektori uzajamno normalni, jer je $\cos(90^0) = 0$, a najveću vrednost ima kada su vektori paralelni, jer je $\cos(0^0) = 1$.

Skalarni proizvod dva vektora, na taj način, predstavlja meru njihove zajedničke usmerenosti.

Rešeni zadaci

58. Odrediti ugao koji zaklapaju pravci vektora $\vec{a} = (1,2,3)$ *i* $\vec{b} = (4,5,6)$.

Rešenje:

Zadatak ilustruje primenu skalarnog proizvoda za određivanje ugla među vektorima.

Prema formuli za skalarni proizvod dva vektora, kosinus ugla α koji vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zaklapaju iznosi

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b},$$

pa je za njegovo određivanje potrebno izračunati skalarni proizvod vektora $\vec{a}\cdot\vec{b}$ i njihove intenzitete *a* i *b*.

Intenzitet vektora $\vec{a}$ iznosi $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{14}$, a vektora $\vec{b}$, $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{77}$, dok skalarni proizvod $\vec{a}\cdot\vec{b}$ iznosi

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32.$$

Odavde je

$$\cos\alpha = \frac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}} = 0{,}9746$$

pa je α = 13^0.

59. Da li su vektori $\vec{a} = (4,1,2)$ *i* $\vec{b} = (1,-2,-1)$ *međusobno normalni?*

Rešenje:

Zadatak ilustruje primenu skalarnog proizvoda za utvrđivanje ortogonalnosti dva vektora. Ako su dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno normalna, zaklapaju ugao od 90^0, pa je njihov skalarni proizvod $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos 90^0 = 0$, bez obzira na to koliki su njihovi intenziteti. U slučaju prikazanom u zadatku,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 2 = 0,$$

te se zaključuje da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno normalni.

60. Pokazati da je intenzitet nekog vektora moguće prikazati kao kvadratni koren skalarnog proizvoda vektora sa samim sobom, odnosno da je $a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Rešenje:

Skalarni proizvod vektora sa samim sobom iznosi

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

i obzirom da je, prema definiciji intenziteta vektora, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, tvrdnja zadatka je dokazana.

Napomena: Kasnije će biti pokazano da je vektorski proizvod bilo kog vektora sa samim sobom jednak nuli; stoga se kada se napiše kvadrat vektora $\vec{a}^{\,2}$, podrazumeva da se radi o skalarno proizvodu vektora sa samim sobom.

61. *Odrediti intenzitet vektorskog zbira, ako su poznati intenziteti dva vektora i ugao koji oni zaklapaju.*

Rešenje:

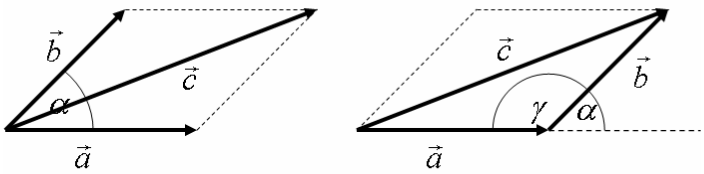
Neka je vektor $\vec{c}$ zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. U prethodnom zadatku je pokazano da se intenzitet nekog vektora može izraziti kao kvadratni koren skalarnog proizvoda tog vektora sa samim sobom, pa je

$$c = \sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}} = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}} = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha}$$

Napomena: Veoma je važno zapaziti da je ugao α definisan kao ugao dva vektora koji imaju zajedničku napadnu tačku, a da se zbir vektora $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ tada određuje primenom pravila paralelograma, kako je to prikazano na slici levo. Ako se za određivanje zbira vektora koristi pravilo trougla, kako to prikazuje slika desno, onda je ugao između pravaca vektora $\gamma = \pi - \alpha$, pa je

$$c = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha} = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\cos(\pi-\alpha)} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}\,.$$

Poslednja jednačina je u geometriji poznata pod imenom *kosinusna teorema* i omogućava određivanje dužine jedne stranice trougla kada su poznate dužine dve preostale stranice i uglovi trougla. Ako je ugao γ prav, $\cos(\gamma) = 0$, i tada se kosinusna teorema svodi na Pitagorinu teoremu.



Zadaci za samostalno rešavanje

62. *Odrediti skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ = (2,2,1) i vektora $\vec{b}$ = (3,-2,3).*

Rešenje: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$

63. *Odrediti ugao koji zaklapaju vektori $\vec{a}$ = (2,2,1) i $\vec{b}$ = (3,-2,3).*

Rešenje: 1,207 rad $\approx 69^0$

64. *Odrediti vrednost koordinate x vektora $\vec{a}$ = (x,2,1) tako da vektor $\vec{a}$ bude normalan na vektor $\vec{b}$ = (2,-2,1).*

Rešenje: x = 1,5

65. *Pokazati da je intenzitet zbira dva vektora jednakih intenziteta koji zaklapaju ugao α jednak $s = 2\cdot a\cdot\cos(\alpha/2)$, gde je sa a označen intenzitet vektora koji se sabiraju, a sa s intenzitet zbira.*

Rešenje: Poći od rezultata zadatka 61, i primeniti trigonometrijske transformacije za funkcije polovine ugla.

Vektorski proizvod dva vektora

Vektorskim proizvodom dva vektora nazivamo vektorsku operaciju kojom se od dva vektora kao rezultat dobija vektor. Vektorski proizvod dva vektora se označava krstićem (×).

Koordinate vektorskog proizvoda dva vektora se izračunavaju prema sledećoj formuli:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_z b_x, a_x b_y - a_y b_x) = (\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}) .$$

U slučaju da se za opisivanje koriste dve koordinate, dok je treća koordinata jednaka nuli, onda vektorski proizvod ima samo treću koordinatu jednaku nuli, i ona se može izračunati primenom jednostavnije formule

$$\vec{a}\times\vec{b} = (0, 0, a_x b_y - a_y b_x) .$$

Ako vektori pripadaju jednom pravcu, pa mogu da se opišu samo sa jednom koordinatom, vektorski proizvod tih vektora je jednak nuli.

Ako su vektori zadati intenzitetom, pravcem i smerom, njihov vektorski proizvod je moguće odrediti primenom sledećih pravila:

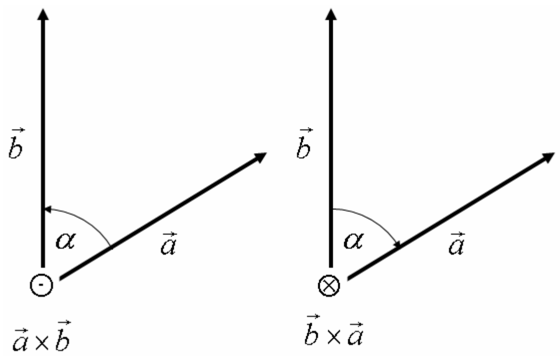
1. Intenzitet vektorskog proizvoda određuje se formulom:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b}) = a\cdot b\cdot\sin\alpha ,$$

2. Pravac vektorskog proizvoda normalan je na pravce oba činioca, odnosno, normalan je na ravan koju određuju ti vektori.

3. Smer vektorskog proizvoda se određuje pravilom desne ruke (desne zavojnice): ako se savijeni prsti desne ruke postave tako da pokazuju od prvog vektora u proizvodu (u ovom slučaju $\vec{a}$) ka drugom (u ovom slučaju $\vec{b}$), onda odvojeni palac pokazuje smer vektorskog proizvoda.

   Napomena: Veoma je čest slučaj da se činioci u vektorskom proizvodu prikazuju na crtežu u ravni lista papira. Tada je proizvod normalan na ravan lista papira, a smer proizvoda se prikazuje oznakama ⊙ (kada je proizvod iznad ravni papira, odnosno usmeren ka posmatraču) i ⊗ (kada je proizvod ispod ravni papira, odnosno usmeren od posmatrača), kako je to pokazano na slici.



Vektorski proizvod ima sledeće osobine koje ga, pored tipa rezultata, razlikuju od skalarnog proizvoda:

1. Vektorski proizvod je antikomutativna operacija, odnosno, $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, što je posledica činjenice da je sin α = -sin (-α).
2. Vektorski proizvod je jednak nuli kada su vektori paralelni, jer je sin $(0^0) = 0$, a najveću vrednost ima kada su vektori uzajamno normalni, jer je sin $(90^0) = 1$.

Vektorski proizvod dva vektora, na taj način, predstavlja meru površine koju oni zahvataju.

Rešeni zadaci

66. Odrediti vektorski proizvod vektora $\vec{a} = (1,2,3)$ *i* $\vec{b} = (4,5,6)$.

Rešenje:

Prema definicionoj formuli komponente vektorskog proizvoda $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ su:

$$c_x = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3$$

$$c_y = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -6$$

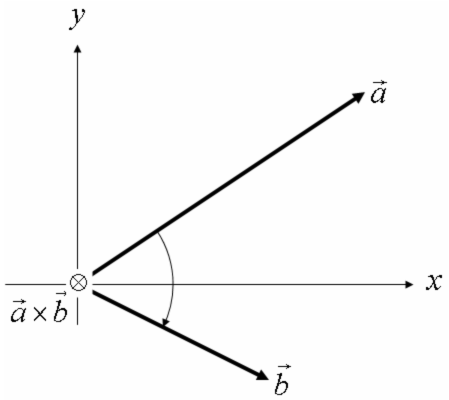
$$c_z = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 8,$$

pa je (1,2,3) × (4,5,6) = (-3,-6,8).

67. Odrediti pravac, smer i intenzitet vektorskog proizvoda vektora $\vec{a} = (4, 2, 0)$ *i* $\vec{b} = (3, -1, 0)$ *i skicirati ga.*

Rešenja:

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju z-koordinatu jednaku nuli, odnosno leže u xy ravni. Vektorski proizvod je normalan na xy ravan, odnosno paralelan z osi. z-koordinata vektorskog proizvoda je $a_x \cdot b_y + a_y \cdot b_x = -10$, odnosno vektorski proizvod ima intenzitet jednak 2, i usmeren suprotno z-osi. Skica vektora i vektorskog proizvoda je prikazana na slici.



68. Pokazati da je $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$*, odnosno da je skalarni proizvod nekog vektora sa bilo kojim njegovim vektorskim proizvodom jednak nuli.*

Rešenje:

Dokaz je jednostavan. Posmatrajmo proizvoljni vektor $\vec{a}$. Bilo koji vektorski proizvod tog vektora $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ je normalan na svoje činioce, pa prema tome, i na sam vektor $\vec{a}$, tj. $\vec{c} \perp \vec{a}$. Skalarni proizvod dva uzajamno normalna vektora je jednak nuli, pa je, dakle, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, što je trebalo dokazati.

Zadaci za samostalno rešavanje

69. Odrediti intenzitet vektorskog proizvoda vektora $\vec{a} = (2, -2, 2)$ *i* $\vec{b} = (2, 2, -2)$.

Rešenje: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8\sqrt{3}$

70. Ako je $\vec{a}=(2,1,1)$, $\vec{b}=(2,1,-2)$ *i* $\vec{c}=(2,-1,1)$, *odrediti* $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Rešenje: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=8$.

71. Skicirati činioce i vektorski proizvod $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ *ako je* $\vec{a}=(1,3,0)$ *i* $\vec{b}=(-1,1,0)$.

Rešenje: $\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,4)$